
ESCUELA DE VERANO 2009 - MATEMÁTICAS I

Profesores: Adriana Piazza, Felipe Celery, Axel Osses, Juan Peypouquet.

GUÍA # 2: Rectas y Circunferencias

(A) - Rectas

Problema 1.

1. Encuentre vectores paralelos y perpendiculares a los siguientes

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Use los resultados anteriores para escribir las ecuaciones vectoriales de las rectas siguientes:

- a) Pasa por A y es paralela al vector $\vec{b}$.
- b) Pasa por A y es perpendicular al vector $\vec{b}$.
- c) Pasa por B y es paralela al vector $\vec{c}$.
- d) Pasa por C y es perpendicular al vector $\vec{c}$.
- e) Pasa por el origen y es paralela al vector $\overrightarrow{AC}$.
- f) Pasa por el origen y es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$.

Problema 2. Considere las rectas $L_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $L_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1. Determine si los puntos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ pertenecen o no a las rectas anteriores. De ser puntos de alguna recta, debe decir cuanto valen λ o μ .
- 2. Encuentre los valores de λ y μ de modo que el punto de la primera y de la segunda recta coincidan (es decir, resuelva el sistema de ecuaciones que permite intersectar las dos rectas). ¿Cual es el punto de intersección de las dos rectas?

Problema 3. Resuelva los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases} & 2. \begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} & 3. \begin{cases} x/2 - y/3 = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \end{array}$$

Problema 4. Considere el triángulo formado por los puntos $A = (1, 0)$, $B = (1, 2)$ y $C = (-1, -2)$.

1. Escriba las ecuaciones vectoriales de las rectas que contienen a los tres lados del triángulo.
2. Escriba las ecuaciones vectoriales de las rectas que contienen a las alturas del triángulo. (Indicación: Encuentre vectores perpendiculares a los lados del triángulo, para conocer la dirección de las alturas)
3. Encuentre los puntos donde se intersectan las alturas con los lados del triángulo

Problema 5. Considere el triángulo formado por los puntos $A = (0, 0)$, $B = (2, -1)$ y $C = (1, 5)$.

1. Escriba las ecuaciones vectoriales de las rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos.
2. Intersecte dos de las rectas anteriores y verifique que dicho punto pertenece a la tercera recta. Con esto habrá probado que las transversales de gravedad del triángulo concurren en un punto.
3. Por cada punto medio de los lados del triángulo, levante las rectas perpendiculares.
4. Pruebe que estas tres rectas concurren en un punto.

Problema 6.

1. Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que pasa por los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (-1, 2)$.
2. Encuentre la ecuación cartesiana o analítica de la recta D paralela a L y que pasa por el origen.
3. Encuentre la ecuación vectorial y cartesiana de la recta R que pasa por $(3, 3)$ y que es perpendicular a D .

Problema 7. Determine las ecuaciones de las siguientes rectas:

1. Que pasa por $(3, 2)$ y $(9, 7)$.
2. Que pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente -8 .
3. Que pasa por la intersección de las rectas $x = 0$ e $y = -1$, y tiene pendiente 6 .
4. Que pasa por la intersección de las rectas $x - y = 1$ y $x + y = 0$ y es perpendicular a la recta $x + 2y = 0$.

Problema 8. Sean tres rectas cuyas intersecciones definen el triángulo ABC con $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$ y $C = (3, 3)$. Determinar a partir de las coordenadas de los 3 puntos: i) Perímetro del triángulo ABC . ii) Área del triángulo ABC . iii) (mas difícil) Determine la ecuación de la recta formada por todos los puntos C que entreguen triángulos ABC con la misma área. iv) Determine la ecuación de la recta formada por todos los puntos A que entreguen triángulos ABC con la misma área.

Problema 9. Pruebe que las perpendiculares trazadas desde los vértices de un triángulo a los lados opuestos del mismo, se encuentran en un punto. Puede escoger $A = (0, 0)$ y $B = (L, 0)$ y $C = (x_c, y_c)$.

Problema 10. Determinar la ecuación de la recta que pasa por $A = (1, 1)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 2.

Problema 11. Determine las ecuaciones de las siguientes rectas: i) Que pasa por $(3, 2)$ y $(9, 7)$. ii) Que pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente -8 . iii) Que pasa por la intersección de las rectas $x = 0$ e $y = -1$, y tiene pendiente 6. iv) Que pasa por la intersección de las rectas $x - y = 1$ y $x + y = 0$ y es perpendicular a la recta $x + 2y = 0$.

Problema 12. 1. Encuentre la ecuación cartesiana o general de la recta L_1 que pasa por los puntos $A = (2, 1)$ y $B = (3, 3)$.

2. Encuentre la ecuación cartesiana o general de la recta L_2 que es perpendicular a L_1 y pasa por el punto medio M del segmento AB .

3. Dada la recta

$$L_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

pruebe que el punto C de intersección de L_2 y L_3 está sobre el eje x .

4. Calcule la distancia del punto C a la recta L_1 , es decir, la distancia de C a M .

Problema 13. ✖ Determine las ecuaciones de las rectas que pasan por $A = (2, -1)$ y junto a las rectas $2x - y + 5 = 0$ y $3x + 6y - 1 = 0$ forman un triángulo isósceles.

Problema 14. ✖ En la figura se representa una mesa de pool con tres bolas A , B y una tercera entre ambas. La mesa tiene un largo de 150 y un ancho de 100 (centímetros). Situamos el origen O de coordenadas en una esquina de la mesa, con ejes paralelos a los bordes de la mesa. Las coordenadas de A y B en este sistema son $A = (100, 50)$ y $B = (40, 30)$.

Se desea golpear la bola B con la bola A sin tocar la tercera bola que se interpone, de manera que la bola B caiga dentro de un agujero que se encuentra en el origen O . Un tiro directo no es posible, pero una solución es un tiro con dos rebotes en los bordes de la mesa.

Un jugador experimentado sabe que el punto del primer rebote R es tal que A , R y B'' estén alineados. En la figura B' representa el punto simétrico a B con respecto al primer borde y B'' es el punto simétrico a B' con respecto al segundo borde. Lo mismo para O , O' y O'' .

- Encuentre las coordenadas de O' , O'' , B' y B'' .
- Encuentre la ecuación cartesiana de la recta que pasa por A y B'' .
- Encuentre el punto de intersección G del primer rebote.
- Compruebe que $\overrightarrow{AB''}$ es paralelo a $\overrightarrow{AO''}$, esto es, compruebe que la bola B'' se dirigirá luego del golpe directo hacia O'' .

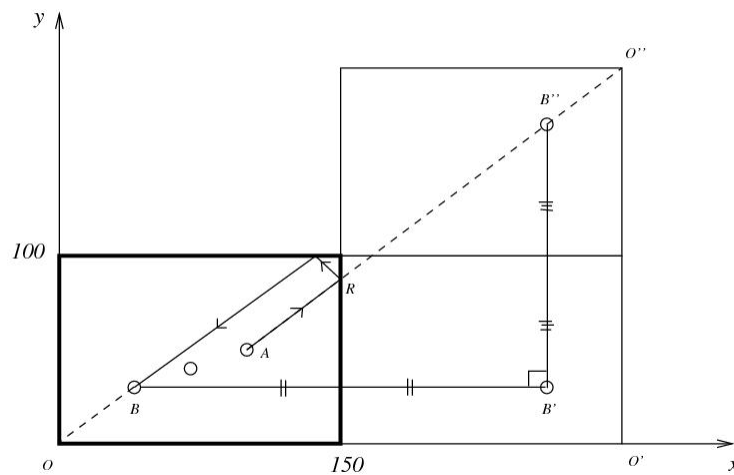


Figura 1: Mesa de billar

(B) - Circunferencia y Parábolas

Problema 2. Determine las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

- De centro $(-3, -5)$ y radio 7.
- Los extremos de un diámetro son $(2, 3)$ y $(-4, 5)$.
- Que pasa por los puntos $(-3, 3)$ y $(-4, 5)$ y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$.

Problema 3. Dada las circunferencias de ecuaciones: $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ y $C_2 : (x - 4)^2 + y^2 = 16$ determine todas las intersecciones entre ambas.

Problema 4. Encuentre la ecuación de la circunferencia que satisface:

- Centro en $(5, -6)$ y radio 4.
- Pasa por $A = (2, 3)$, $B = (-2, -3)$ y $C = (-2, 3)$.
- Por su centro pasa la recta $x - 2y + 9 = 0$ y contiene a los puntos $A = (4, 1)$ y $B = (-3, 2)$.

Problema 5. Encontrar el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia de ecuación:

- $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
- $x^2 + y^2 = 2$
- $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$

Problema 6. Establezca si las siguientes ecuaciones definen o no una circunferencia y en caso afirmativo determine su centro y su radio.

1. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 16 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 2x = 0$
3. $x^2 + y^2 - x + 6y + 9 = 0$

Problema 7. Dados los puntos $O = (0, 0)$ y $A = (3, 0)$.

1. Escriba las ecuaciones de las circunferencias centradas en O y A y con radio $r = 5/2$.
2. Encuentre los dos puntos de intersección de ambas circunferencias.
3. A partir de esto, encuentre las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por O y A y que tienen radio $5/2$.

Problema 8. (*) Hallar la mínima y la máxima distancia del punto $(10, 7)$ a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Problema 9. (*) La circunferencia con centro $(3, -1)$ encierra de la recta $2x - 5y + 18 = 0$ una cuerda de longitud 6. ¿Cuál es la ecuación?

Problema 10. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y un punto $P = (0, a)$ exterior a ella, se traza una recta que pase por P y que corte la circunferencia en dos puntos, A y B . Compruebe que $d(P, A) \cdot d(P, B) = a^2 - r^2$.

Problema 11. Represente gráficamente las parábolas de ecuación: (a) $y = x^2 + 3$ (b) $y = (x - 3)^2$ (c) $y = 3(x - 1)^2$ y (d) $y = -x^2 + 1$.

Problema 12. Para la parábola $y = x^2 + 2x - 8$, encuentre:

- ¿En qué punto corta al eje OX ?
- ¿En qué punto corta al eje OY ?
- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
- Dibuje la curva.

Problema 13. Para la parábola $y = x^2 - 9x + 14$ se pide: hallar su vértice, intersecciones con los ejes y su eje de simetría.

Problema 14. Hallar las intersecciones de las parábolas $y = x^2 - 5x + 4$ e $y = x^2 + 6x + 7$. Graficar las intersecciones.

Problema 15. Encuentre las dimensiones de un rectángulo de perímetro 11 y área 6.

Problema 16. Encuentre la ecuación de la parábola de foco en $(0, 5)$ y directriz $y = 0$. Encuentre vértice, directriz y foco de la parábola $y = 2(x - 3)(x + 1)$.

Problema 17. Hallar la ecuación de los puntos que están a la misma distancia de la recta $y + 5 = 0$ y del punto $(0, 5)$.

Problema 18. Hallar la longitud de la cuerda de la parábola $x^2 = 2py$ (donde p es conocido), sabiendo además que la cuerda es horizontal y pasa por el foco.

Problema 19. Considere el cuadrado de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$. Encuentre la intersección de la circunferencia inscrita en el cuadrado con el segmento que va del origen al vértice $(1, 2)$.

Problema 20. ✖ Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y un punto $P = (0, a)$ exterior a ella, se traza una recta que pase por P y que corte la circunferencia en dos puntos, A y B . Compruebe que $d(P, A) \cdot d(P, B) = a^2 - r^2$.

Problema 21. ✖ Descubrir la curva que describe el punto medio de una escalera apoyada en una muralla que resbala y cae.