
ESCUELA DE VERANO - MATEMÁTICAS I - Enero 2009

Profesores: Adriana PIAZZA, Juan PEYPOUQUET,
Axel OSSES, Felipe CÉLÈRY

Pauta Control #2 : Geometría Analítica

Problema 1.- Considere la parábola con foco en $F = (0, p)$ y directriz de ecuación $D : y = -p$. Además considere la recta $L : y = mx$ donde $p > 0$ y $m > 0$.

- (i) Escriba la ecuación de la parábola descrita anteriormente.
- (ii) Encuentre, en términos de p y m , los puntos de intersección entre la parábola y la recta L . Denótelos por P y Q .
- (iii) Finalmente calcule las coordenadas del punto medio entre P y Q .

Sol:

- (i) De clases sabemos que la ecuación de esta parábola es

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \quad (2,0 \text{ ptos})$$

- (ii) Intersectemos. Para ello debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4p}x^2 \\ y &= mx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow mx = \frac{1}{4p}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4p}x^2 - mx = 0 \quad (0,5 \text{ ptos})$$

lo cual es una ecuación cuadrática cuyas soluciones son

$$x = \frac{-(-m) \pm \sqrt{(-m)^2 - 4\left(\frac{1}{4p} \cdot 0\right)}}{\left(\frac{2}{4p}\right)} = \frac{m \pm \sqrt{m^2}}{\frac{1}{2p}} \quad (0,5 \text{ ptos})$$

porque $m > 0$.

Luego, las soluciones son:

$$x_1 = 4pm, x_2 = 0 \quad (0,5 \text{ ptos})$$

Reemplazando en la ecuación de L , se obtienen

$$y_1 = 4pm^2, y_2 = 0 \quad (0,5 \text{ ptos})$$

por ende:

$$P = (0, 0), Q = (4pm, 4pm^2)$$

(iii) Sabemos que el punto medio entre P y Q es

$$M = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2} \right) = \left(\frac{0 + 4pm}{2}, \frac{0 + 4pm^2}{2} \right) \\ \Rightarrow M = (2pm, 2pm^2) \quad (2,0 \text{ ptos})$$

□

Problema 2.-

- (i) Escriba la ecuación de la recta L que pasa por el punto $A = (2, 3)$ y tiene pendiente m .
- (ii) Escriba la ecuación de la circunferencia C con centro en $(0, 0)$ y radio $R = \sqrt{13}$. Verifique que el punto A está en C .
- (iii) Determine m de modo que la recta L sea tangente a la circunferencia C .
Indicación: Intersecte las ecuaciones anteriores e imponga que la solución es única usando el método de anular el discriminante.
- (iv) Verifique que la recta L es perpendicular a la recta definida por el radio OA , donde O denota el origen del sistema de coordenadas.

Sol:

- (i) Sabemos que la fórmula para la recta de pendiente m , que pasa por un punto (x_0, y_0) es

$$L : y - y_0 = m(x - x_0)$$

En este caso queda

$$L : y - 3 = m(x - 2) \quad (1,5 \text{ ptos})$$

Alternativamente podemos deducir esta ecuación escribiendo

$$L : y = mx + n$$

e imponiendo que (x_0, y_0) está en la recta L :

$$y_0 = mx_0 + n$$

restando se obtiene

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

que en este caso es

$$y - 3 = m(x - 2)$$

- (ii) Sabemos que la ecuación de la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio R es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Así, en este caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y $R = \sqrt{13}$, por ende, la ecuación para C es

$$C : x^2 + y^2 = 13.$$

(1,0 pto por reconocer el centro y el radio)

Veamos si $(x, y) = (2, 3)$ está en C :

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Por ende, $(2, 3)$ está en C (0,5 ptos.)

(iii) Intersectemos las dos ecuaciones. Esto nos lleva al siguiente sistema:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$y = m(x - 2) + 3$$

$$\Rightarrow x^2 + (m(x - 2) + 3)^2 = 13$$

$$\Rightarrow x^2 + m^2(x - 2)^2 + 6m(x - 2) + 9 = 13$$

$$\Rightarrow x^2 + m^2(x^2 - 4x + 4) + 6mx - 12m + 9 = 13$$

$$\Rightarrow x^2 + m^2x^2 - 4m^2x + 4m^2 + 6mx - 12m + 9 = 13$$

juntando los términos y factorizando queda

$$\Rightarrow \underbrace{(1 + m^2)}_a x^2 + \underbrace{(6m - 4m^2)}_b x + \underbrace{(4m^2 - 12m - 4)}_c = 0.$$

Así, llegamos a una ecuación de segundo grado que, para que la recta sea tangente a C , se debe cumplir que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

En este caso queda

$$(6m - 4m^2)^2 - 4(1 + m^2)(4m^2 - 12m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (36m^2 - 48m^3 + 16m^4) - 4((4m^2 - 12m - 4) + m^2(4m^2 - 12m - 4)) = 0$$

$$\Rightarrow 36m^2 + 48m + 16 = 0$$

podemos dividir por 4:

$$\Rightarrow 9m^2 + 12m + 4 = 0 \quad (0,5 \text{ ptos por llegar a esta ecuación}).$$

Nuevamente llegamos a una ecuación de segundo orden cuya solución es:

$$m = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(9)(4)}}{18} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 12^2}}{18} = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$$

(0,5 ptos por saber la fórmula y llegar al resultado).

(iv) Finalmente, escribamos la ecuación de la recta que define OA : Esto es una recta que pasa por dos puntos. Como un punto es el origen, sabemos que es de la forma

$$y = mx.$$

Imponiendo que pase por $(2, 3) = A$ se tiene

$$3 = m \cdot 2 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

Así, $OA : y = \frac{3}{2}x$ (0,5 ptos por llegar a la ecuación de OA)

y como $L : y = -\frac{2}{3}x$

se tiene que $m_L \cdot m_{OA} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, por ende, $OA \perp L$.

(1,0 pto por verificar perpendicularidad).

□

Tiempo: 2:30 hrs.