Matemáticas I

Equipo Mat I-EdV

Departamento de Ingeniería Matemática y, Centro de Modelamiento Matemático (CNRS UMI 2807) FCFM, U. de Chile

Índice general

Índice de figuras

CAPíTULO 1

Vectores y Geometría Analítica (Axel Osses)

"La fascinación del espíritu nace de un justo equilibrio entre belleza y utilidad"

1.1. Introducción

La geometría nace en Babilonia y el antiguo Egipto hacia el 2700 a.C.[1] por la necesidad de medir terrenos agrícolas, para la construcción de edificaciones y por intereses astronómicos. Los sacerdotes egipcios llamaban "cosas oscuras" a este conocimiento que les era secreto, pero que ya hacia el 600 a.C. fue adquirido por los griegos. De este tiempo son Tales de Mileto (640–550 a.C.) y Pitágoras (569–500 a.C.). Ellos acuñaron el nombre *geometría* o "medida de las tierras" y la desarrollaron enormemente integrándola a su filosofía y arte como lo demuestran las ideas de Platón (429–328 a.C.) y Aristóteles (384–322 a.C).

Posteriormente, en la Universidad de Alejandría en el delta del Nilo, los griegos cultivaron esta disciplina hasta su madurez que queda plasmada como *geometría plana* en la obra "Elementos" de Euclides (330–275 a.C.) y en los trabajos de Arquímides (287–212 a.C.) en cuerpos curvos. A este mismo periodo se debe el estudio de la cónicas por Apolonio, de la *geodesia* o medida de la Tierra por Eratóstenes y de la *trigonometría* por Hiparco de Nicea, siendo el último de la saga el griego Pappus antes de la conquista de Alejandría por los árabes. Mucho de este conocimiento desapareció con el incendio de la Biblioteca de Alejandría, pero las obras fundamentales, como los "Elementos" de Euclides se tradujeron al árabe y se estudiaron durante siglos en Bagdad y Alejandría, mientras en Europa, luego de la caída de los romanos (476 d.C.) habría que esperar para que este conocimiento, junto al de la aritmética y álgebra provenientes del oriente (India y China) se asimilara[2] en los monasterios pre-renacentistas del siglo XII y se integrara definitivamente al desarrollo cultural europeo y de occidente.

La obra de Euclides mejorada por el francés Legendre en 1794 fue definitivamente renovada por René Descartes (1596–1650) quien daría un paso importante en 1637 al sentar en su obra "La Geometrie" las bases de la *geometría analítica* y que junto al cálculo diferencial de Liebnitz y Newton conformarían lo que actualmente se conoce como *geometría diferencial*. Todo esto conformaría la llamada *geometría euclidiana*. La negación del postulado de las paralelas de Euclides llevaría posteriormente al estudio de las llamadas *geometrías no euclidianas*: el italiano Saccheri en 1733, el ruso Lobachevski en 1830, el húngaro Bolyai en 1832 y el alemán Riemann en su tesis de 1854.

[1] 1700 a.C. manuscrito de Ahmes, museo británico, se cree adaptación de un manuscrito 1000 años más antiguo.

[2] 1120 d.C. Atelbardo de Bath, monje inglés, traduce los "Elementos" de Euclides al latín.

1.2. Vectores

Para dar cuenta de las nociones del espacio plano, como son por ejemplo distancias, lugares, figuras e incluso movimiento, necesitaremos un *sistema de referencia* o *sistema de coordenadas cartesianas*. Cada punto A tiene asociadas dos coordenadas $A = (x, y)$. El trazo dirigido del origen al punto A o *vector posición* lo denotamos por

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

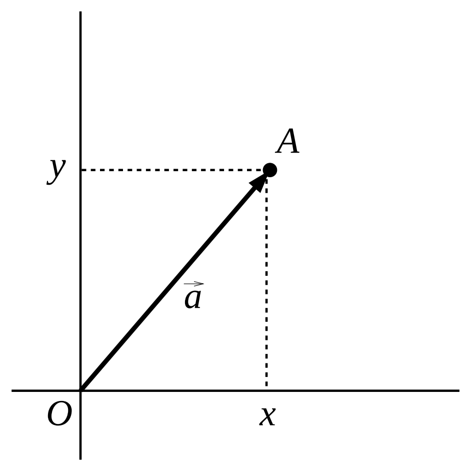

Figura 1.1. Sistema de coordenadas y vector posición.

1.2.1. Vector desplazamiento e igualdad de vectores.

Así como un vector puede indicar *posición* respecto de un origen dado, por ejemplo, el vector posición que apunta en cada momento del Sol a la Tierra, un vector también es útil para indicar *desplazamientos*. Sean A y B dos puntos cualesquiera del plano, entonces el trazo dirigido con origen en A y término en B se llama *vector desplazamiento* o *vector libre* $\overrightarrow{AB}$.

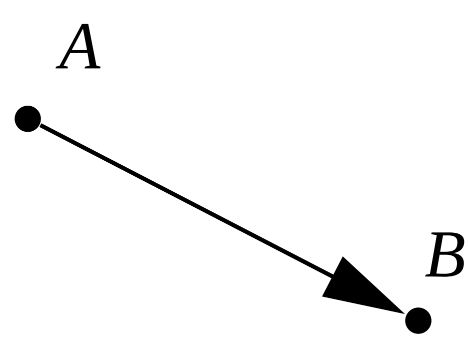

Figura 1.2. Vector desplazamiento.

1.2.2. Módulo de un vector. El módulo del vector desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ es por definición la longitud del segmento AB.

1.2.3. Dirección de un vector. Si $A \neq B$, la dirección de un vector desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ hace referencia a la dirección de recta que contiene al segmento AB.

1.2.4. Sentido de un vector. Si $A \neq B$, el sentido de un vector desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ es uno de los dos posibles en la dirección dada.

1.2.5. Igualdad de vectores. Para entender cabalmente la noción de igualdad de vectores, utilicemos un *paralelogramo*, que es por definición un cuadrilátero de lados opuestos paralelos. Consideremos por ejemplo el paralelogramo $ABCD$ de la figura. Por geometría elemental y congruencia de triángulos, se puede probar que los lados opuestos del paralelogramo son además de igual longitud.

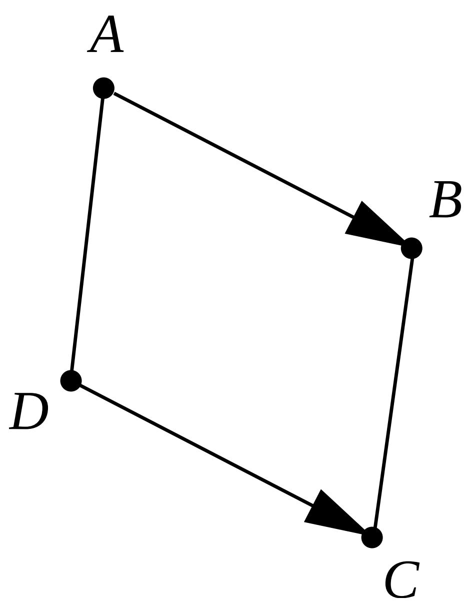

FIGURA 1.3. Paralelogramo.

Es fácil ver entonces que los vectores desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen igual *longitud, dirección y sentido.* Aunque no tienen el mismo origen diremos que ambos vectores son el mismo vector, pero con el origen desplazado. A esto se le llama igualdad geométrica de vectores.

De manera equivalente, podemos considerar dos vectores desplazamiento iguales si coinciden cuando los trasladamos al origen. Esto es, una vez trasladados al origen, es claro que dos vectores serán iguales si el punto al que apuntan es el mismo, esto es si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son vectores posición de $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ respectivamente, entonces, por igualdad de pares ordenados, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

A esto se le llama *igualdad algebraica* de vectores.

1.2.6. Suma de vectores. Si nos desplazamos de A a B y luego de B a C, es natural pensar que el desplazamiento total es el vetor que va de A a C. Esto es

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

En el paralelogramo $ABCD$ de antes, esto se ve así:

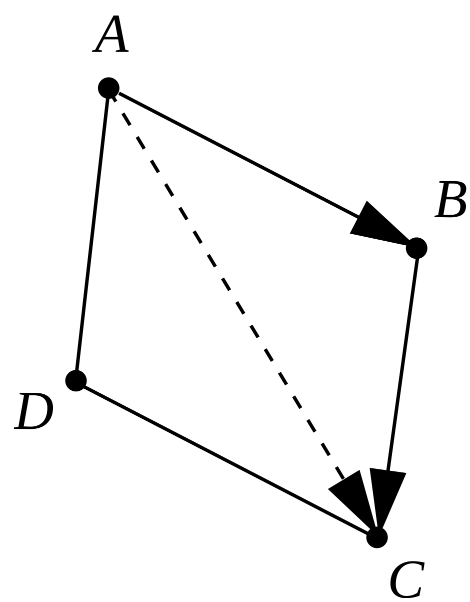

FIGURA 1.4. Suma geométrica de vectores.

donde el vector suma resulta seguir una de las diagonales del paralelogramo.

Otra forma de verlo es así, donde luego de desplazar paralelamente $\overrightarrow{BC}$ hasta $\overrightarrow{AD}$, ahora miramos los dos vectores desde un mismo origen común A. En este caso la suma sigue siendo la misma, y correspondería por ejemplo a la fuerza resultante de arrastrar un peso en dos direcciones diferentes.

Es fácil ver de la siguiente figura que se cumple para los vectores por el origen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que la suma de vectores es conmutativa y asociativa.

1.2.7. Ponderación de vectores. Siguiendo con la idea de fuerzas, si duplicamos la magnitud de una fuerza, o la reducimos a la mitad, solamente estamos cambiando la longitud del vector fuerza por un factor, sin variar su dirección ni su sentido. A este factor lo llamaremos *ponderador* o *escalar* y lo denotaremos preferentemente por una letra griega para diferenciarlo de los vectores. Lo que decimos corresponde a ponderadores positivos $\alpha = 2$, $\alpha = 1/2$. Geométricamente, esto se muestra en la figura siguiente:

Podemos también cambiar el sentido de la fuerza, sin variar su dirección, esto corresponde a ponderadores negativos $\alpha < 0$.

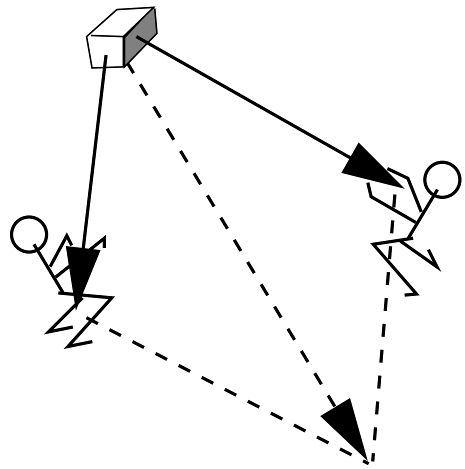

FIGURA 1.5. Resultante de fuerzas que arrastran un peso.

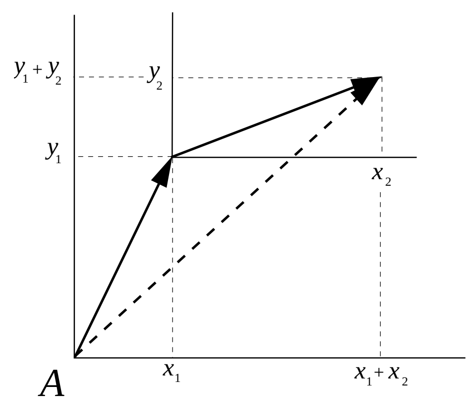

FIGURA 1.6. Suma analítica.

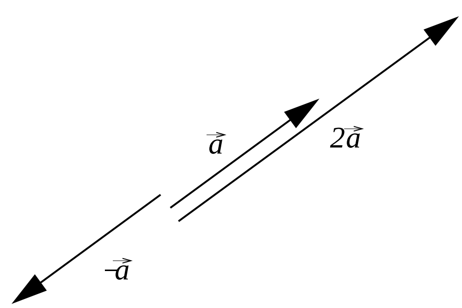

FIGURA 1.7. Ponderación de un vector.

En ambos casos, analíticamente lo que hacemos es:

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

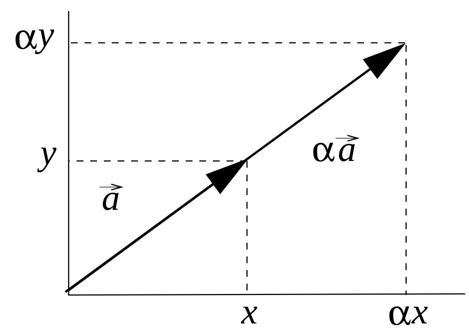

FIGURA 1.8. Ponderación de un vector. A cada coordenada se le aplica un factor α.

Esto incluye el caso particular en que $\alpha = 0$, en cuyo caso se obtiene el *vector nulo*:

$$0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el caso $\alpha = 1$ que deja invariente al vector:

$$1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y para el caso $\alpha = -1$ se obtiene lo que se conoce como el *vector opuesto*

$$(-1)\overrightarrow{a} = \overrightarrow{-a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Notar que vector y opuesto dan como resultante el vector nulo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o en notación más condensada

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{-a} = \overrightarrow{0}$$

y que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o en notación más condensada

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}.$$

Puede el lector verificar también en forma analítica la asociatividad siguiente:

$$(\alpha)\beta\overrightarrow{a} = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}$$

y la distributividad tanto para vectores como para escalares:

$$\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$$
$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$$

1.2.8. Vectores paralelos. Dos vectores se dicen paralelos si tienen igual dirección. De forma equivalente, dos vectores son paralelos si uno es ponderación del otro, con un ponderador no nulo, esto es:

$$\overrightarrow{a} \,||\, \overrightarrow{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{existe } \alpha \neq 0 \text{ tal que } \overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{b}$$

Llevándolo a forma analítica esto es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{existe } \alpha \neq 0 \text{ tal que } x_1 = \alpha x_2,\ y_1 = \alpha y_2$$

eliminando α se obtiene la condición de paralelismo[3] siguiente[4]:

$$x_1\, y_2 - x_2\, y_1 = 0.$$

1.2.9. Tres puntos colineales. Tres puntos A, B, C se dicen colineales si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos. Notar que los dos vectores comparten un punto común.

1.2.10. Resta de vectores. Consideremos el triángulo siguiente formado por los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$. Es claro que si operáramos con vectores tal como se hace para los números reales se tendría:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$

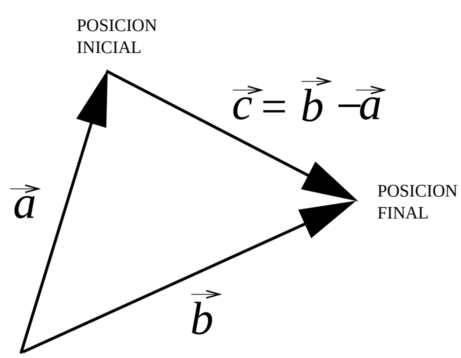

Figura 1.9. Resta de vectores.

A través de la resta de vectores, veamos ahora la utilidad de ver los vectores de forma algebraica. Utilizando las propiedades vistas hasta ahora[5] el despeje de $\overrightarrow{c}$ se hace paso por paso así:

[3] Más adelante se leerá esta expresión como “determinante nulo”.

[4] Más adelante veremos que esto equivale a la condición de que las pendientes de ambos vectores son iguales: $y_1/x_1 = y_2/x_2$.

[5] Propiedades llamadas de Espacio Vectorial.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} &= \overrightarrow{b} \\
\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} &= \overrightarrow{b} \qquad /(\text{usando conmutatividad...}) \\
(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) + (-\overrightarrow{a}) &= \overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a}) \qquad /(\text{sumando opuesto a ambos lados...}) \\
\overrightarrow{c} + (\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a})) &= \overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a}) \qquad /(\text{por asociatividad...}) \\
\overrightarrow{c} + \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a}) \qquad /(\text{por opuesto...}) \\
\overrightarrow{c} &= \overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a}) \qquad /(\text{por neutro...})
\end{aligned}$$

de donde es natural definir la resta como la suma del opuesto, al igual que para los números reales:

$$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a})$$

esto es, analíticamente, la resta de vectores queda:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Verifique geométricamente que la resta en un paralelogramo corresponde a otra de sus diagonales.

Notar que con la definición de resta se tiene automáticamente que

$$\alpha(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}, \qquad (\alpha - \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} - \beta\overrightarrow{a}$$

1.2.11. Punto medio y razón. El vector posición $\overrightarrow{m}$ correspondiente al punto medio M entre los puntos A y B, cuyos vectores posición son respectivamente $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ está dado por:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$$

calculando (y omitiendo paréntesis cada vez que se pueda por asociatividad) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{m} &= \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\
&= \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{a} \qquad /(\text{por distributividad...}) \\
&= \overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \qquad /(\text{por conmutatividad...}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \qquad /(\text{por distributividad...}) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \qquad /(\text{restando...}) \\
&= \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}
\end{aligned}$$

analíticamente, si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, entonces

$$\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}$$

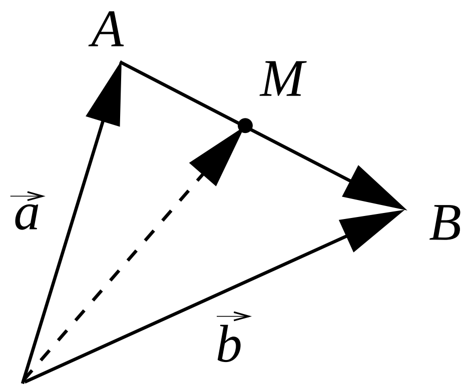

FIGURA 1.10. Punto medio.

De forma similar se puede obtener el punto el vector posición $\overrightarrow{r}$ del punto R que separa el segmento AB en la razón m es a n como

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$$

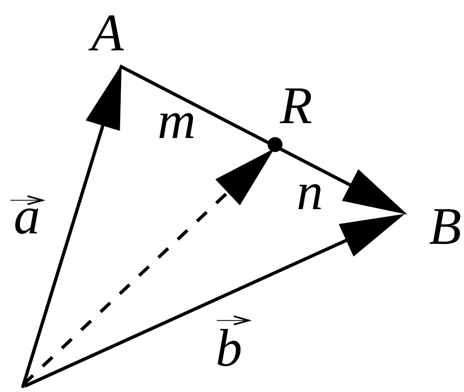

FIGURA 1.11. Razón $m : n$.

1.2.12. Producto punto de vectores. Se define el siguiente producto entre dos vectores:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1\, y_2 + y_1\, y_2$$

Notar que el producto punto no es un vector, sino que un número real que puede se negativo, positivo o nulo.

Verificar las siguientes propiedades:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$$
$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$$

1.2.13. Vectores perpendiculares. Dos vectores se dicen perpendiculares si su producto punto es nulo, esto es

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

esto es la condición de perpendicularidad es la siguiente [6]

$$x_1 \, x_2 + y_1 \, y_2 = 0$$

1.2.14. Cálculo del módulo de un vector. Vectores unitarios. Veremos más adelante que para calcular el módulo de un vector debemos calcular la raíz (positiva) del producto punto del vector consigo mismo, esto es:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}.$$

Un vector unitario es un vector de módulo 1:

$$\overrightarrow{a} \text{ es unitario} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\overrightarrow{a}| = 1$$

y se denota por

$$\widehat{a}.$$

1.2.15. Independencia lineal y base. Base canónica. Dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ se dicen *linealmente independientes* si no son paralelos. En ese caso se dice que forman una *base*. Si ambos vectores son además perpendiculares entre sí se dice que la base es *ortogonal*. Si además ambos vectores son unitarios se dice que la base es *ortonormal*.

Todo punto del plano se puede representar de manera única como combinación lineal de la base formada por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, esto es, si $\overrightarrow{OP}$ es el vector posición de un cierto punto P del plano, se tiene que

$$\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$$

donde α y β son números reales que corresponden a las coordenadas del P en la base formada por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$. Estas coordenadas son únicas ya que de haber dos combinaciones:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{a} + \beta_1 \overrightarrow{b}$$
$$\overrightarrow{OP} = \alpha_2 \overrightarrow{a} + \beta_2 \overrightarrow{b}$$

restando se obtendría

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \overrightarrow{a} + (\beta_1 - \beta_2) \overrightarrow{b} = 0$$

y esto quiere decir que

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \beta_1 = \beta_2$$

de lo contrario $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ serían paralelos.

[6] Más adelante veremos que esto equivale a la condición "producto de pendientes igual -1" ya que corresponde a $\frac{y_1}{x_1} \frac{y_2}{x_2} = -1$.

La base canónica está formada por los vectores

$$\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una base ortonormal (verificarlo). En esta base, un vector se descompone como sigue:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}.$$

1.2.16. Problemas de triángulos definidos en forma vectorial. Dos problemas clásicos son:

1. Demostrar que un triángulo con uno de sus lados diámetro de una circunferencia y el vértice opuesto sobre la misma circunferencia es necesariamente rectángulo.

   Desde el centro de la circunferencia, llamar a un radio $\overrightarrow{a}$ y al otro radio opuesto $-\overrightarrow{a}$. Al vector que va del centro al vértice opuesto C del triángulo llamarlo $\overrightarrow{c}$. Entonces verificar que:

   $$(-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) = 0$$

   usando que el radio es igual, esto es que $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c}$.
2. Demostrar que las transversales de gravedad se intersectan en la razón 2:1.

   Hacerlo por ejemplo en el triángulo de la figura definido por los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, hay que mostrar que

   $$\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) - \frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}\right)$$

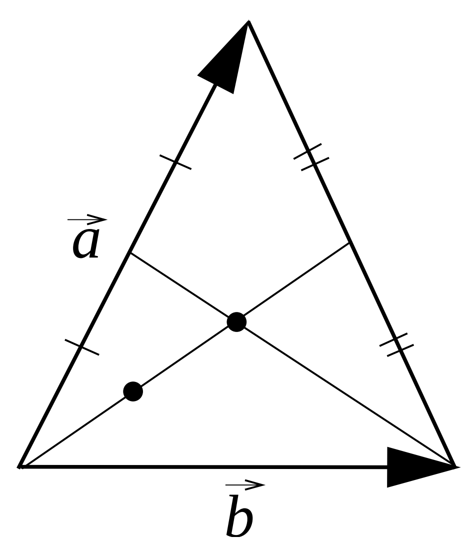

FIGURA 1.12. Transversales de gravedad.

1.2.17. Temas de cierre.

a) Dimensión superior y/o fraccionaria
b) Estructura de espacio vectorial

1.3. Geometría Analítica

1.3.1. Rectas. Para motivar, tomemos de nuevo el ejemplo de las transversales de gravedad de un triángulo como el de la Figura 1.12 y demostremos de un modo más convincente que se cortan en la razón 1 : 2. Usaremos por primera vez el concepto de *recta en forma vectorial.* La idea es encontrar el punto de intersección G de las rectas que contienen las transversales, llamado *centro de gravedad del triángulo* y de paso probar la propiedad pedida. Para ello, debemos primero describir las tres rectas en forma vectorial:

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$

$$L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{a}}{2} + \beta\left(\overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)$$

$$L_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{b}}{2} + \gamma\left(\overrightarrow{a} - \frac{\overrightarrow{b}}{2}\right)$$

Cada punto (x, y) de las rectas se obtiene de sumarle a un vector fijo o *vector posición* un *vector director* ponderado por un cierto escalar. Para la recta L_1 el vector posición es nulo, de modo que solamente se pondera su director.

El punto de intersección G se obtiene para ciertos valores de α, β y γ. Para que la propiedad de la razón 1 : 2 sea válida, ellos deberían ser, respectivamente:

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Para obtener estos valores, igualemos las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2:

$$\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a}}{2} + \beta\left(\overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)$$

entonces

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{a} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}.$$

En la expresión anterior, ambos factores deben ser nulos, de lo contrario los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ serían paralelos y no formarían un triángulo[7]. Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo este simple sistema lineal se obtienen los valores

$$\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \beta = \frac{1}{3}.$$

[7]Esto se conoce como independencia lineal de los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.

De manera análoga se obtiene $\gamma = \frac{1}{3}$, al igualar las ecuaciones de las rectas L_1 y L_3.

1.3.2. Ecuación vectorial de una recta.

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{p} + \alpha \overrightarrow{d}$$

Notar que los vectores posición $\overrightarrow{p}$ y director $\overrightarrow{d}$ no son únicos. A α se le llama parámetro y puede tomar cualquier valor real. Notar que para una recta que pasa por el origen se puede escoger $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

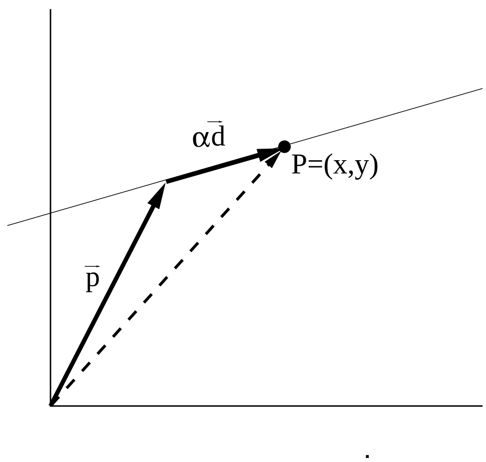

FIGURA 1.13. Vectores posición y director de la recta.

1.3.3. Director y Normal a la recta.

Un vector normal a una recta es cualquier vector no nulo perpendicular al vector director de la recta. Entonces los vectores director y normal son perpendiculares entre sí. Dado un director, hay dos sentidos posibles para la normal.

$$\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix} \quad \text{(sentido antihorario)}, \quad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix} \quad \text{(sentido horario)}$$

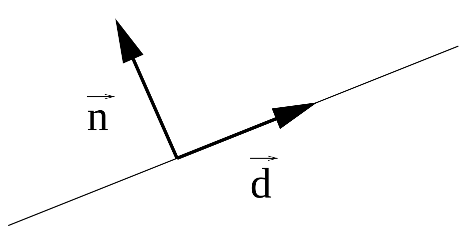

FIGURA 1.14. Vectores director y normal (en el sentido antihorario).

1.3.4. Ecuación paramétrica de una recta. Se obtiene igualando componentes en la forma vectorial.

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \alpha d_1 \\ y &= p_2 + \alpha d_2 \end{aligned}$$

1.3.5. Ecuación analítica o general de una recta. Se obtiene eliminando el parámetro α de la forma anterior. Definiendo las constantes

$$A = d_2, \qquad B = -d_1, \qquad C = d_1\,p_2 - d_2\,p_1$$

se obtiene:

$$Ax + By + C = 0$$

llamada *forma analítica o general de la recta.*

$$\begin{aligned} \text{Rectas horizontales:} \qquad & A = 0 \\ \text{Rectas verticales:} \qquad & B = 0 \end{aligned}$$

1.3.6. La forma estándar o principal. Pendiente. Se puede obtener de la forma general solamente si la recta no es vertical ($B \neq 0$)

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

con

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{d_2}{d_1}$$

queda

$$y = mx + n$$

que es la ecuación de una recta conociendo la pendiente m y la intersección con el eje y (coeficiente de posición n), llamada comúnmente *forma principal de una recta.*

Si la recta pasa por un punto (x_1, y_1) se tiene

$$y_1 = mx_1 + n$$

y restando se obtiene

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ecuación de una recta conocido un punto y la pendiente. Si la recta pasa por un segundo punto (x_2, y_2) se obtiene

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$

de donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

da la pendiente entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), siempre que la recta no sea vertical ($x_1 \neq x_2$).

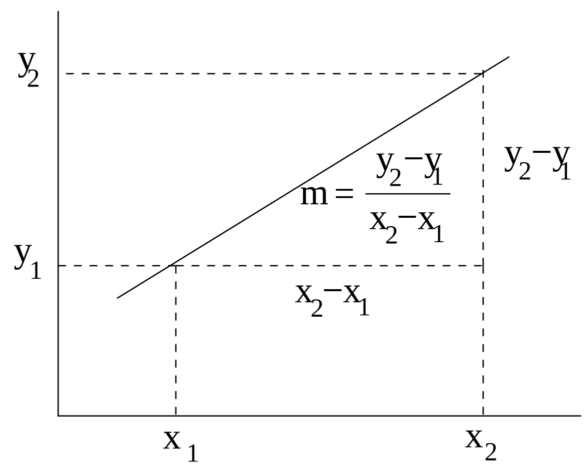

FIGURA 1.15. Pendiente de la recta.

1.3.7. Ecuación normal de una recta (optativo). Consideremos la forma general:

$$Ax + By = -C$$

Si además se sabe que la recta pasa por el punto (x_0, y_0) queda

$$Ax_0 + By_0 = -C$$

restando

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

La normal está dada por

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

de donde

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{p}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

llamada *forma normal de la recta*, donde $\overrightarrow{p} = \binom{x_0}{y_0}$ es un vector posición de la recta y $\overrightarrow{r} = \binom{x}{y}$ un punto de la recta.

1.3.8. Paso de una forma a otra. Para el camino:

$$\text{Forma vectorial} \quad \rightarrow \quad \text{Forma paramétrica} \quad \rightarrow \quad \text{Forma analítica}$$

se hace como antes, igualando componentes y luego eliminando el parámetro.

Para el camino inverso:

$$\text{Forma analítica} \quad \rightarrow \quad \text{Forma vectorial}$$

lo mejor es obtener dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) de la forma analítica y con ellos obtener posición y dirección (resta):

$$\overrightarrow{p} = (x_0, y_0), \qquad \overrightarrow{d} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

1.3.9. Rectas paralelas y perpendiculares. Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos. Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares.

Si L_1 tiene director $\overrightarrow{d} = \binom{d_1}{d_2}$ y L_2 tiene director $\overrightarrow{e} = \binom{e_1}{e_2}$ entonces

$$\begin{array}{rcll} L_1 || L_2 & \Leftrightarrow & d_1\, e_2 - d_2\, e_1 = 0 & \left(\begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix} = 0 \right) \\ L_1 \perp L_2 & \Leftrightarrow & d_1\, e_1 + d_2\, e_2 = 0 & \left(\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{e} = 0 \right) \end{array}$$

De manera equivalente, dos rectas son paralelas (resp. perpendiculares) si sus vectores normales son paralelos (resp. perpendiculares).

La condición de paralelismo es equivalente a la igualdad de pendientes (salvo en el caso de rectas verticales). En efecto

$$\begin{array}{rcl} L_1 || L_2 & \Leftrightarrow & d_1\, e_2 - d_2\, e_1 = 0 \\ & \Leftrightarrow & d_2\, e_1 = d_1\, e_2 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{e_2}{e_1} \\ & \Leftrightarrow & m_1 = m_2 \end{array}$$

Y la condición de perpendicularidad es equivalente a la célebre regla de producto de pendientes -1 (excepto para pares de rectas horizontales/verticales). Esto es porque:

$$\begin{array}{rcl} L_1 \perp L_2 & \Leftrightarrow & d_1\, e_1 + d_2\, e_2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & d_2\, e_2 = -d_1\, e_1 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{d_2}{d_1} \dfrac{e_2}{e_1} = -1 \\ & \Leftrightarrow & m_1\, m_2 = -1 \end{array}$$

1.3.10. Sistemas de dos rectas. Hay tres casos:

1. existe una infinidad de soluciones, el sistema es consistente y las rectas se intersectan en todos sus puntos pues son coincidentes. Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & -1 \\ 2x + 4y & = & -2 \end{array}$$

2. no existe solución, el sistema es inconsistente y las rectas no se intersectan pues son paralelas pero no coincidentes. Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & -1 \\ 2x + 4y & = & -3 \end{array}$$

3. existe una única solución, el sistema es consistente y las rectas (secantes) se intersectan en un único punto (x, y). Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & -1 \\ -2x + y & = & -1 \end{array} \qquad \rightarrow \qquad (x, y) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5} \right)$$

1.3.11. Teorema de Pitágoras. El Teorema de Pitágoras tiene muchas demostraciones. Establece que en un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a y b se tiene que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Una demostración muy ingeniosa es la de la Figura 1.16, donde escribiendo el área del cuadrado mayor de lado c como suma del área de los cuatro triángulos más el área del cuadrado menor de lado $b - a$ se obtiene:

$$\begin{aligned} c^2 &= 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2 \\ &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

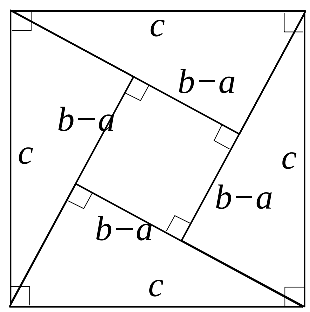

Figura 1.16. Una demostración del Teorema de Pitágoras.

1.3.12. Raíz cuadrada. Buscando un número cuyo cuadrado sea 2:

$$x^2 = 2$$

el grupo de Pitágoras dio con la siguiente demostración por *reducción al absurdo* de que una tal número, de existir, es irracional[8].

Supongamos que x es un racional *irreductible* de la forma:

$$x = \frac{p}{q}$$

Entonces

$$2\,q^2 = p^2$$

de modo que p^2 es par, de donde p es par. Si escibimos $p = 2k$ entonces

$$q^2 = 2k^2$$

de donde q también resulta par. Esto nos lleva a algo absurdo, ya que la fracción irreductible p/q sería de hecho reductible, ya que tanto numerador como denominador son pares.

Al número x se le llama *raíz cuadrada de* 2 y se denota por $x = \sqrt{2}$. Pero la raíz cuadrada no es única ya que también es raíz de 2 el número $-\sqrt{2}$.

[8] O *inconmensurable* como llamaron a los números irracionales los griegos.

Más generalmente, dado un real $a \geq 0$, a los números x tales que[9]

$$x^2 = a$$

se les llama respectivamente raíz positiva y negativa de a:

$$\sqrt{a} \qquad -\sqrt{a}$$

o más sintéticamente

$$x = \pm\sqrt{a}.$$

1.3.13. Distancia entre dos puntos. Dados los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, su distancia se obtiene usando el Teorema de Pitágoras y la definición de raíz cuadrada (positiva). Se obtiene lo que ya habíamos aprendido para calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1.3.14. Distancia de un punto a una recta. Consideremos una recta

$$L: \; Ax + By = -C$$

y un punto

$$P = (x_0, y_0).$$

La recta perpendicular a L y que pasa por P está dada por:

$$L': \; -Bx + Ay = -Bx_0 + Ay_0.$$

Intersectando L con L' se obtiene el punto

$$P' = \left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - CA}{A^2 + B^2}, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)$$

y calculando el módulo de $\overrightarrow{PP'}$ después de algo de álgebra se obtiene la distancia del punto P a la recta L:

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

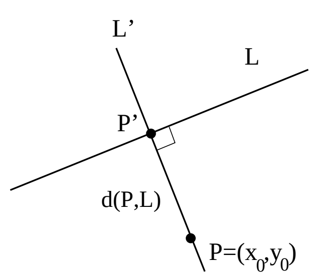

FIGURA 1.17. Cálculo de la distancia de un punto $P = (x_0, y_0)$ a una recta L.

[9]Se puede demostrar que la raíces siempre existen y son números reales en este caso.

1.3.15. Puntos y rectas notables en un triángulo. En un triángulo, las medianas[10] o transversales de gravedad son rectas que quedan definidas por dos puntos: un vértice y un punto medio del lado opuesto. Las alturas y simetrales (también llamadas mediatrices) quedan definidas por pasar por un punto (vértice o punto medio de un lado respectivamente) y por ser perpendiculares a la dirección de un lado. Las bisectrices se obtienen igualando las distancias de un punto a las rectas que conforman dos lados. En todos los casos, usando las herramientas de geometría analítica que hemos estudiado, se puede comprobar que las *rectas notables* son concurrentes en ciertos *puntos notables* que se describen en la siguiente tabla.

recta notable	pto. notable	propiedad
medianas o transversales de gravedad	*baricentro*	centro de gravedad
simetrales o mediatrices	*circuncentro*	centro de la circunferencia circunscrita
alturas	*ortocentro*	centro de una circunferencia circunscrita a un cierto triángulo circunscrito
bisectrices	*incentro*	centro de la circunferencia inscrita

CUADRO 1.1. Rectas y puntos notables en un triángulo

1.3.16. Circunferencias. De centro $C(x_0, y_0)$ y radio $r \geq 0$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Desarrollando se llega a la forma analítica general:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

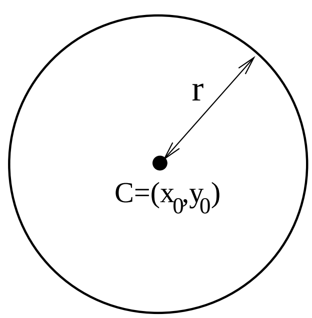

FIGURA 1.18. Circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r.

[10]En algunos textos las medianas se refieren a los segmentos paralelos a cada lado que pasan por los puntos medios de los lados, pero en otros a las transversales de gravedad.

1.3.17. Completación de cuadrados. Completando cuadrados se puede saber cuando la forma general corresponde efectivamente a una circunferencia de radio no negativo:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+Ax+By+C &= 0 \\ x^2+Ax+\frac{A^2}{4}-\frac{A^2}{4}+y^2+By+\frac{B^2}{4}-\frac{B^2}{4}+C &= 0 \\ \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2 &= \frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C \end{aligned}$$

entonces

$$r=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$$

siempre que[11]

$$A^2+B^2-4C\geq 0.$$

1.3.18. Parábolas. Dado una posición p un foco $F=(0,p)$ y una directriz $D:\ y=-p$, los puntos $P=(x,y)$ equidistantes de F y D conforman una parábola:

$$d(P,F)=d(P,D)$$

esto es

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=y+p$$

desarrollando se llega a

$$y=\frac{1}{4p}x^2.$$

Notar que el vértice de la parábola coincide con el origen

$$V=(0,0).$$

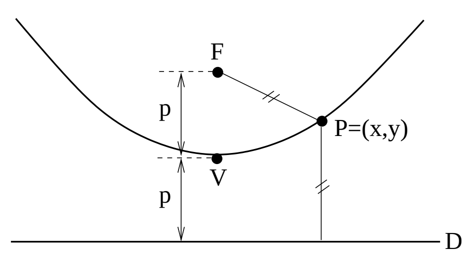

FIGURA 1.19. Parábola: La distancia de P al foco y a la directriz es la misma.

[11]El caso $r=0$ corresponde a una circunferencia que se reduce a su centro.

1.3.19. Traslación del sistema de coordenadas. Si trasladamos el sistema Oxy a un sistema $O'x'y'$ donde el nuevo origen tiene coordenadas

$$O' = (x_0, y_0)$$

entonces las coordenadas en los dos sistemas se relacionan por

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned}$$

esto se ve fácilmente con vectores, si se considera que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

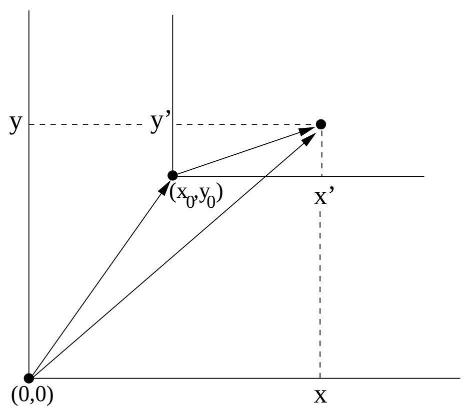

FIGURA 1.20. Coordenadas en el sistema trasladado.

Si cambiamos el vértice de la parábola al nuevo origen O', la ecuación de la parábola queda:

$$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$$

donde el vértice es ahora

$$V = (x_0, y_0).$$

Para encontrar la forma general, desarrollemos la forma anterior y obtenemos

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes. Se puede volver a la forma anterior completando cuadrados en x.

1.3.20. Ecuación de segundo grado. Corresponde a encontrar la intersección de la parábola con el eje x:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y se resuelve completando cuadrados en x

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Si introducimos el llamado discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

queda

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

lo que provee

- $\Delta > 0$: dos raíces reales y distintas x_1 y x_2
- $\Delta = 0$: una raíz real doble $x_1 = x_2$
- $\Delta < 0$: ninguna raíz real

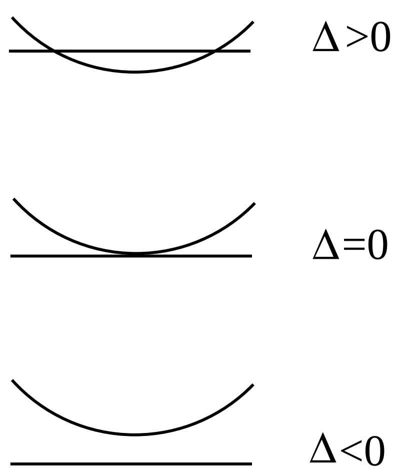

FIGURA 1.21. Discriminante y raíces.

En los dos primeros casos se puede encontrar entonces la siguiente factorización:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

1.3.21. Condición de tangencia. El caso de discriminante nulo

$$\Delta = 0$$

también se conoce como *condición de tangencia* ya que corresponde justamente al caso en que la intersección es un único punto. Esta condición es útil por ejemplo para imponer la condición de que una recta sea tangente a una circunferencia o a una parábola, que dos circunferencias tangentes, que una parábola y una circunferencia tangentes, etc.

1.3.22. Elipses. Utilicemos el método del jardinero[12] para trazar una elipse como sigue: se ata una cuerda de largo $2a$ a dos estacas situadas en $F' = (-c, 0)$ y $F = (c, 0)$. Luego, manteniendo la cuerda tensa dibuja una curva con harina en el suelo que corresponde exactamente a una elipse con $b^2 = a^2 - c^2$. F y F' son los focos de la elipse, a el semieje mayor y b el semieje menor.

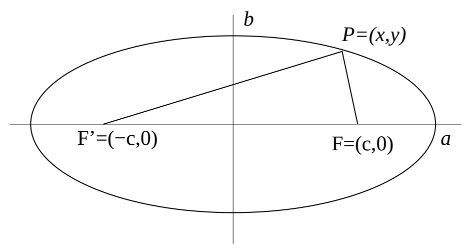

FIGURA 1.22. En la elipse $d(F, P) + d(F', P)$ es constante igual a $2a$.

Encontremos ahora la ecuación de la elipse. Para ello, sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Imponiendo la condición

$$d(F', P) + d(F, P) = 2a$$

y desarrollando

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 & \\
+2\sqrt{((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2)} &= 4a^2 \\
(x^2+y^2+c^2) - 2a^2 &= -\sqrt{((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2)} \\
(x^2+y^2+c^2)^2 + 4a^4 - 4a^2(x^2+y^2+c^2) &= ((x+c)^2+y^2)(x-c)^2+y^2) \\
(x^2+y^2+c^2)^2 + 4a^4 - 4a^2(x^2+y^2+c^2) &= (x^2+y^2+c^2+2cx)(x^2+y^2+c^2-2cx) \\
(x^2+y^2+c^2)^2 + 4a^4 - 4a^2(x^2+y^2+c^2) &= (x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2 \\
a^4 - a^2(x^2+y^2+c^2) &= -c^2x^2 \\
(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1
\end{aligned}$$

[12]Utilizado por ejemplo para construir una plaza elíptica con flores.

reemplazando $b^2 = a^2 - c^2$ se llega a la siguiente ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1.3.23. Temas de cierre.

- Propiedades de parábolas: espejos, focos y antenas. Una propiedad difícil de probar (pero posible) y que hace a la parábola tan especial es que los rayos de luz que parten desde el foco y se *reflejan*[13] en la parábola emergen de ella paralelos entre sí en la dirección del eje de simetría. Esto explica por qué los focos parabólicos concentran la luz si la fuente de luz está situada en su foco. También explica por qué las antenas de recepción de ondas de televisión o los radiotelescopios o los espejos de ciertos observatorios tienen forma parabólica: en todos ellos el foco concentra las ondas (microondas, ondas de luz, ondas de radio) que inciden paralelamente en la dirección de su eje de simetría.

  Una manera de probarlo es primero probar primero (anulando discriminante) que la recta tangente a la parábola

  $$y = \frac{1}{4p}x^2$$

  que pasa por un punto $P = (x_0, y_0)$ que *pertenece a la parábola* viene dada por

  $$y - y_0 = \frac{x_0}{2p}(x - x_0).$$

  Luego de esto, podemos encontrar el punto de intersección H de la recta tangente con el eje y que resulta

  $$H = (0, -y_0)$$

  y donde se debe usar que $x_0^2 = 4py_0$. En seguida, buscamos el punto de intersección P' de la recta vertical que pasa por P con la directriz $D: \ y = -p$ que es

  $$P' = (x_0, -p).$$

  Si $F = (0, p)$ es el foco de la parábola, haciendo algunos cálculos (donde de nuevo se usa que $x_0^2 = 4py_0$) es fácil probar que

  $$d(P', H) = \sqrt{x_0^2 + (p - y_0)^2} = p + y_0 = d(F, H).$$

  Como P está en la parábola, además se tiene que:

  $$d(F, P) = d(P, P').$$

  De modo que los triángulos ΔFPH y $\Delta HPP'$ son congruentes. Como consecuencia se tiene la igualdad de ángulos

  $$\angle FPH = \angle HPP'.$$

  Finalmente, como el ángulo opuesto por el vértice de $\angle HPP'$ es también igual a $\angle HPP'$, se tiene que el rayo que viene del foco y que se refleja en P sale vertical.

[13] Esto es, rayos incidente y reflejado en un punto forman el mismo ángulo con la recta tangente a la parábola en dicho punto.

- Orbitas planetarias y de cometas, excentricidad, Brahe, Kepler, Newton, Einstein. Las elipses
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
las hipérbolas
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
y las parábolas conforman las llamadas *secciones cónicas*. Las órbitas de los planetas son elipses[14] y las de los cometas que no vuelven son hipérbolas. La excentricidad de las órbitas (si $a > b$) viene dada por
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$
El lector inquieto puede investigar sobre la excentricidad de las órbitas de los planetas del sistema solar. Asimismo, en lo que concierne las órbitas elípticas de los planetas, investigar sobre las observaciones astronómicas de Brahe, las leyes de Kepler, las teorías de la gravitación universal de Newton y de la relatividad general de Einstein al respecto.

[14]Para la mecánica clásica son elípticas, aunque la presencia de los otros planetas perturba las órbitas. La mecánica relativista introduce incluso otra corrección a las elipses debido a la curvatura del espacio por el Sol, que es más perceptible en la órbita de Mercurio.

Bibliografía

[1] J.E. Thompson *Geometría*, col. Matemáticas al alcance de todos, traducción de la obra original en inglés: "Geometry for a practical man", D. Van Nostrand Co., New York, Ed. Uthea, México, México, 1961. Fue la fuente del resumen histórico.