Control #3: Matrices y Sistemas Lineales

Problema 1

Para $\beta \epsilon \mathbb{R}$ considere el sistema lineal.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & (1-\beta)\cdot x_3 & = & 3 \end{array}$$

i. Utilizando el método o procedimiento de Gauss, encuentre los valores de β para los cuales el sistema:
   - Tiene solución única.
   - No tiene solución.

ii. Para β=0, encuentre la solución del sistema.

Solución

i. Transformando el sistema de ecuaciones a un sistema matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 1-\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Al utilizar el método de Gauss se tienen los siguientes pasos:

1. Al multiplicar la fila (1) por 3 y sumarla a la fila (2).

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 1-\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Al multiplicar la fila (1) por 1 y sumarla a la fila (3).

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 2-\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Al multiplicar la fila (2) por -3/2 y sumarla a la fila (3).

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4-\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema no tenga solución ç, es necesario que en la última fila haya una contradicción, lo que se logra imponiendo que el tercer coeficiente de la tercera fila sea nulo.

$$-4-\beta = 0$$

$$\boxed{\beta = -4}$$

Para que el sistema tenga solución única no se deben presentar contradicciones ni verdades absolutas (como 0=0, lo que implicaría que existen infinitas soluciones); por lo tanto se debe evitar el caso de contradicción, lo que indica que se debe cumplir $\beta \neq -4$ para que la solución sea única.

ii. Utilizando la ultima matriz obtenida, al reemplazar β=0 resulta:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La última ecuación es:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 5$$

$$\boxed{x_3 = \frac{-5}{4}}$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -2$$

$$-2 \cdot x_2 + 4 \cdot \frac{-5}{4} = -2$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-3}{2}}$$

Finalmente, al reemplazar en la primera ecuación:

$$-1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -1$$

$$-1 \cdot x_1 - 2 \cdot \frac{-3}{2} + 1 \cdot \frac{-5}{4} = -1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{21}{4}}$$

Problema 2

Utilice el método o procedimiento de Gauss, para encontrar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ello utilice el siguiente sistema extendido:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Solución

Para encontrar la matriz inversa se debe utilizar el sistema extendido operando las filas de la matriz de la izquierda hasta encontrar la identidad, mientras que la matriz resultante al lado derecho será la inversa.

1. Al multiplicar la fila (1) por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Al multiplicar la fila (1) por -3 y sumarla a la fila (2).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Al multiplicar la fila (1) por -1 y sumarla a la fila (3).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

4. Al multiplicar la fila (2) por -3/2 y sumarla a la fila (3).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

5. Sumando la fila (3) con la fila (2).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -7/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

6. Al multiplicar la fila (3) por -1/4 y sumarla a la fila (1).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1/8 & 3/8 & -1/4 \\ 0 & -2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -7/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

7. Sumando la fila (2) con la fila (1).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/8 & -1/8 & 3/4 \\ 0 & -2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -7/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

8. Al multiplicar la fila (2) por -1/2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/8 & -1/8 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -4 & -7/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

9. Finalmente se multiplica la fila (4) por -1/4 .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/8 & -1/8 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/4 \end{array}\right)$$

Obteniendo que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/8 & -1/8 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 7/8 & 3/8 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Para verificar lo obtenido se realiza la multiplicación entre la matriz inversa encontrada y la matriz original:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5/8 & -1/8 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 7/8 & 3/8 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 \cdot \frac{-5}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{7}{8} & -1 \cdot \frac{-1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} & -1 \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{4} \\ 3 \cdot \frac{-5}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{7}{8} & 3 \cdot \frac{-1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} & 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{4} \\ 1 \cdot \frac{-5}{8} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{7}{8} & 1 \cdot \frac{-1}{8} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} & 1 \cdot \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz obtenida es la inversa de A.

Problema 3

El objetivo del presente problema es estudiar la ecuación:

$$x^2 = -1 \qquad (1)$$

Esta ecuación no tiene solución en los números reales. Le asociaremos una ecuación matricial equivalente que si tiene solución. A cada $a \in \mathbb{R}$, le asociaremos la matriz.

$$a \cdot I = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

i. Verifique si

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

entonces $a^2 = c$.

Escribamos entonces, usando esta identificación, la Ecuación 1 en su versión matricial:

$$X^2 = (-1)I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

donde X es una matriz de 2x2.

ii. Encuentre las dos soluciones X_1 y X_2 de la Ecuación 2, suponiendo que son de la forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, con $y \neq 0$.

Note que esto significa que las soluciones de la Ecuación 2 **no** representan a ningún número real.

iii. Pruebe que $X_1^{-1} = X_2$.

Solución.

i. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a + 0 \cdot 0 & a \cdot 0 + 0 \cdot a \\ 0 \cdot a + a \cdot 0 & 0 \cdot 0 + a \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

Dada la igualdad de matrices,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Se concluye que $a^2 = c$.

ii. Se tiene la siguiente ecuación matricial,

$$X^2 = (-1)I$$

Como se sabe la forma de X, se reemplaza en la ecuación anterior:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices de la izquierda se obtiene,

$$\begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & -y^2 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Realizando la igualdad entre los componentes de las matrices se obtiene 4 ecuaciones:

$x^2 - y^2 = -1$ (3)

$2xy = 0$ (4)

$-2xy = 0$ (5)

$-y^2 + x^2 = -1$ (6)

Se destaca que las ecuaciones (3) y (6) son iguales, mientras que las ecuaciones (4) y (5) también lo son, por lo que solo se ocupan las ecuaciones diferentes (en este caso 3 y 4) resultando un sistema de 2x2.

Como se sabe que $y \neq 0$, de la ecuación (4) podemos concluir que $x = 0$. Y reemplazando este valor en la ecuación (3) se obtiene:

$$y^2 = 1$$

Cuyas soluciones son:

$$y_1 = 1 \quad y \quad y_2 = -1$$

Por lo tanto las matrices X_1 y X_2 son

$$X_1 = \begin{pmatrix} x & y_1 \\ -y_1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x & y_2 \\ -y_2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Estas soluciones no representan un numero real ya que en la parte (i) a cada número real *a* se le asocio la matriz *a*I, que es una matriz diagonal. Las soluciones que se obtuvieron no tienen dicha forma y por lo tanto no representan ningún número real.

iii. Tenemos X_1, por lo que podemos calcular X_1^{-1},

Sabiendo que:

$$si \;\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

donde $|A| = determinante\ de\ A = a \cdot d - b \cdot c$

Por lo tanto,

$$X_1{}^{-1} = \frac{1}{0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Que es idéntico a lo obtenido para X_2, por lo que se concluye que

$$X_1{}^{-1} = X_2 \quad .$$