
ESCUELA DE VERANO 2008 - MATEMÁTICAS

Profesores: Rodolfo Carvajal, Juan Peypouquet, Jaime González, Axel Osses.

CONTROL #3 : Matrices y Sistemas Lineales

El Problema 3 es obligatorio y debe escoger un problema entre el 1 y el 2.

Problema 1. - Para $\beta \in \mathbb{R}$, considere el sistema lineal:

$$\begin{array}{rclcl} -x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +(1-\beta)x_3 & = & 3. \end{array}$$

- (i) Usando el método o procedimiento de Gauss, encuentre los valores de β para los cuales el sistema:
- Tiene solución única.
 - No tiene solución.
- (ii) Para $\beta = 0$, encuentre la solución del sistema.

Problema 2. - Utilice el método o procedimiento de Gauss, para calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para ello, utilice el siguiente sistema extendido:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Problema 3 (Obligatorio). - El objetivo del presente problema es estudiar la ecuación:

$$x^2 = -1. \tag{1}$$

Esta ecuación no tiene solución en los números reales. Le asociaremos una ecuación matricial equivalente que sí tiene solución. A cada $a \in \mathbb{R}$, le asociamos la matriz

$$aI = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

- (i) Verifique que si

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

entonces $a^2 = c$.

Escribamos entonces, usando esta identificación, la Ecuación 1 en su versión matricial:

$$X^2 = (-1)I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

en donde X es una matriz de 2×2 .

- (ii) Encuentre las dos soluciones X_1 y X_2 de la Ecuación 2, suponiendo que son de la forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, con $y \neq 0$.

Note que esto significa que las soluciones de la Ecuación 2 **no** representan a ningún número real.

- (iii) Pruebe que $X_1^{-1} = X_2$.

Tiempo: 2 horas y 30 minutos.