Control #3: Matrices

Problema 1

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las matrices A+B, A+3B, y AB.
b) Calcule las matrices inversas de A, B y AB.
c) Calcule C=A+λB, en términos de λ y encuentre λ de modo que $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución

a) Calcule las matrices A+B, A+3B, y AB.

i. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-3) & 2 + 1 \\ (-1) + 2 & 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ii. $A + 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

iii. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

b) Calcule las matrices inversas de A, B y AB.

Recordando que la inversa de una matriz de 2x2 es:

$$si\ \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

donde $|A| = determinante\ de\ A = a \cdot d - b \cdot c$

i. Matriz inversa de A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 4$

$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

ii. Matriz inversa de B.

$$B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$|B|=(-3)\cdot 0-2\cdot 1=-2$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

iii. Matriz inversa de AB.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

$$|AB|=1\cdot(-1)-1\cdot 7=-8$$

$$AB^{-1}=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{7}{8} & \frac{-1}{8}\end{pmatrix}$$

c) Calcule C=A+λB, en términos de λ y encuentre λ de modo que $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

$$C=A+\lambda B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3\lambda & 2+\lambda\\ 2\lambda-1 & 2\end{pmatrix}$$

$$C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3\lambda & 2+\lambda\\ 2\lambda-1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-3\lambda)\cdot 1+(2+\lambda)\cdot 1\\ (2\lambda-1)\cdot 1+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\lambda\\ 2\lambda+1\end{pmatrix}$$

Imponiendo la condición $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix}3-2\lambda\\ 2\lambda+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

Donde se obtienen dos ecuaciones, resolviendo la primera se obtiene el siguiente valor para λ

$$3-2\lambda=1$$
$$2=2\lambda$$
$$\boxed{\lambda=1}$$

Verificando que se cumple la igualdad pedida, se reemplaza el valor encontrado en la segunda ecuación.

$$2\lambda+1=3$$
$$2\cdot 1+1=3$$
$$3=3\ \rightarrow OK$$

Por lo tanto el valor de λ que cumple la condición $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ es λ=1.

Problema 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 0 \\ 5x & + & 6y & + & z & = & 8 \\ -2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

a) Escriba el sistema en forma matricial.
b) Usando el "método de Gauss" transforme el sistema en uno triangular superior.
c) Resuelva el sistema usando sustitución hacia atrás.

Solución

a) Usando el vector de incógnitas $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, el sistema puede ser expresado de la forma matricial $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Tomando la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Haciendo Fila (2) – Fila (1)*5 en Fila (2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Haciendo Fila (3) + Fila (1)*2 en Fila (3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Haciendo Fila (3)*4 + Fila (2)*3 en Fila (3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 28 \end{array}\right]$$

Con lo que se obtiene una transformación del sistema matricial a una matriz triangular superior, el sistema modificado es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 28 \end{bmatrix}$$

c) Del sistema matricial obtenido en (b), es posible de la tercera fila obtener el valor de la incógnita z. Escribiendo la fila (3) como una ecuación se obtiene:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 7 \cdot z = 28$$

$$\boxed{z = 4}$$

Ahora, expresando la segunda fila como ecuación y reemplazando el valor de z obtenido:

$$0 \cdot x + (-4) \cdot y + 1 \cdot z = 8$$

$$-4 \cdot y + 4 = 8$$

$$\boxed{y = -1}$$

Finalmente, de la primera fila se puede obtener una ecuación para encontrar x usando los valores ya obtenidos:

$$1 \cdot x + 2 \cdot y + 0 \cdot z = 0$$

$$x + 2 \cdot (-1) = 0$$

$$\boxed{x = 2}$$

Para verificar los resultados se realiza la siguiente multiplicación matricial, correspondiente al sistema de ecuaciones inicial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde se verifica que los resultados obtenidos son correctos.

Problema 3

En este problema, diremos que una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es *0-diagonal* si cumple $a + d = 0$.

a) Compruebe que si A y B son matrices *0-diagonales*, entonces A+B y λA también son *0-diagonales*.

b) Si A y B son matrices *0-diagonales* invertibles, estudie si A^{-1} y AB son o no matrices *0-diagonales*.

c) Encuentre α, β y γ de modo que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{pmatrix}$ y su producto sean *0-diagonales*.

Solución

a) Sean $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ matrices *0-diagonales*, por lo que se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $a_1 + a_4 = 0$ y

(2) $b_1 + b_4 = 0$

I. $A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$

Al sumar los elementos de la diagonal se tiene:

$(a_1 + b_1) + (a_4 + b_4) = (a_1 + a_4) + (b_1 + b_4) = 0 + 0 = 0$

Por lo tanto, la matriz A+B también es *0-diagonal.*

II. $\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \lambda a_3 & \lambda a_4 \end{pmatrix}$

Al sumar los elementos de la diagonal se tiene:

$\lambda a_1 + \lambda a_4 = \lambda(a_1 + a_4) = \lambda \cdot 0 = 0$

Por lo tanto, la matriz λA también es *0-diagonal.*

b) Sean $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

i. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|} \cdot a_4 & -\frac{1}{|A|} \cdot a_2 \\ -\frac{1}{|A|} \cdot a_3 & \frac{1}{|A|} \cdot a_1 \end{pmatrix}$

Sumando los elementos de la diagonal se obtiene:

$\frac{1}{|A|} \cdot a_4 + \frac{1}{|A|} \cdot a_1 = \frac{1}{|A|} \cdot (a_4 + a_1) = \frac{1}{|A|} \cdot (a_1 + a_4) = \frac{1}{|A|} \cdot (0) = 0$

Por lo tanto, la matriz A^{-1} es *0-diagonal.*

ii. $AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_3 & a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_4 \\ a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_3 & a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_4 \end{pmatrix}$

Sumando los elementos de la diagonal se obtiene:

$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_4 \neq 0$

Por lo tanto la matriz AB no es *0-diagonal.*

c) Usando las Matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{pmatrix}$, es posible encontrar la matriz AB directamente:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma \\ (-1) \cdot 1 + \alpha \cdot 1 & (-1) \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \beta + \gamma \\ \alpha - 1 & \alpha \cdot \gamma - \beta \end{pmatrix}$$

Para encontrar las incógnitas se impone que las matrices A, B y AB son *0-diagonales*.

i. A es *0-diagonal* $\Longrightarrow 1 + \alpha = 0$

$$\boxed{\alpha = -1}$$

ii. B es *0-diagonal* $\Longrightarrow 1 + \gamma = 0$

$$\boxed{\gamma = -1}$$

iii. AB es *0-diagonal* $\Longrightarrow 3 + \alpha \cdot \gamma - \beta = 0$

$$3 + (-1) \cdot (-1) - \beta = 0$$

$$\boxed{\beta = 4}$$

Con los valores encontrados para α, β y γ se cumple que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{pmatrix}$ y su producto son *0-diagonales*.