Pauta Pregunta 2 - Control 2

i. **Escriba la ecuación de la recta L que pasa por el punto A=(2,3) y tiene pendiente *m*.**

Sea la recta $L: y = mx + n$
Como pasa por el punto (2,3), este satisface su ecuación, con lo que se obtiene:

$$3 = 2m + n$$
$$n = 3 - 2m$$

Reemplazando en la ecuación de la recta:

$$L: y = mx - 2m + 3$$

ii. **Escriba la ecuación de la circunferencia C con centro en (0,0) y radio $r = \sqrt{13}$. Verifique que el punto A esta en C.**

La ecuación de la circunferencia es: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.
Reemplazando se obtiene: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$

$$x^2 + y^2 = 13$$

Ahora se verifica que el punto A pertenezca a la circunferencia, para esto se reemplazan sus coordenadas en la ecuación.

$$2^2 + 3^2 = 13$$
$$4 + 9 = 13 \quad OK!$$

Por lo tanto el punto si pertenece a la circunferencia.

iii. **Determine *m* de modo que la recta L sea tangente a la circunferencia C.**

Se hace un sistema con las ecuaciones de las curvas encontradas

$$y = mx - 2m + 3 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (2)$$

Remplazando la ecuación (1) en la ecuación (2) se obtiene:

$$x^2 + (mx - 2m + 3)^2 = 13$$
$$x^2 + m^2x^2 + 4m^2 + 9 - 4m^2x + 6mx - 12m = 13$$
$$x^2(1 + m^2) + x(6m - 4m^2) + (4m^2 - 12m - 4) = 0$$

Para que la recta sea tangente la intersección debe ser solo un punto, lo que se logra imponiendo que el discriminante sea nulo.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$
$$(6m - 4m^2)^2 - 4(1 + m^2)(4m^2 - 12m - 4) = 0$$
$$36m^2 - 48m^3 + 16m^4 - 4(4m^2 - 12m - 4 + 4m^4 - 12m^3 - 4m^2) = 0$$
$$36m^2 - 48m^3 + 16m^4 - 16m^2 + 48m + 16 - 16m^4 + 48m^3 + 16m^2 = 0$$
$$0 = 36m^2 + 48m + 16$$

Dividiendo la ecuación por 4.

$$0 = 9m^2 + 12m + 4$$

Sabiendo que la solución de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtiene,

$$m = \frac{-12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9}$$

$$m = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2 \cdot 9} = \frac{-12 \pm 0}{18}$$

Las soluciones son:

$$m_1 = \frac{-12 + 0}{18} \quad y \quad m_2 = \frac{-12 - 0}{18}$$

En este caso las dos soluciones son iguales, por lo que la solución del problema es,

$$m = \frac{-2}{3}$$

iv. Verifique que la recta L es perpendicular a la recta definida por el radio OA, donde O denota el origen del sistema de coordenadas.

Sabemos que dos rectas son perpendiculares si la multiplicación de sus pendientes es -1. Como ya conocemos la pendiente de la recta L, se calcula la pendiente de la recta que pasa por OA.

$$m_{OA} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

Puesto que la recta pasa por los puntos $(x_1, y_1) = (2{,}3)$ y por $(x_2, y_2) = (0{,}0)$.

Ahora se realiza la multiplicación de las pendientes, obteniendo,

$$m \cdot m_{OA} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$$

Por lo que se verifica que la recta L es perpendicular a la recta definida por el radio OA.