CAPITULO 4

La circunferencia

UNA CIRCUNFERENCIA, analíticamente, es una ecuación de segundo grado con dos variables. Ahora bien, no toda ecuación de este tipo representa siempre una circunferencia; solo en determinadas condiciones es cierto.

Una circunferencia queda completamente determinada si se conocen su centro y su radio.

LA ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA de centro (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Si el centro es el origen de coordenadas, la ecuación toma la forma $x^2 + y^2 = r^2$.

Toda circunferencia se puede expresar por medio de una ecuación del tipo

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si escribimos esta ecuación en la forma

$$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$$

y sumamos y restamos los términos que se indican para completar cuadrados, se tiene,

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

o bien
$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.$$

El centro es el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y el radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la circunferencia es real.
Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la circunferencia es imaginaria.

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, el radio es cero y la ecuación representa al punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-2, 3)$ y radio 4.

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$, o bien, $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

2. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$ *a*) sumando y restando los términos adecuados para completar cuadrados, *b*) aplicando la fórmula general.

a) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 5y + \frac{25}{4} = 14 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$, o sea, $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{90}{4}$.

Luego el centro es el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ y el radio $r = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

b) $h = -\frac{D}{2} = \frac{3}{2}$, $k = -\frac{E}{2} = -\frac{5}{2}$, y $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 25 + 56} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

3. Hallar el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

Como $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$, resulta $7 = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 100 - 4k}$. Elevando al cuadrado y resolviendo, $k = -8$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(5, -2)$ y que pase por el punto $(-1, 5)$.

El radio de la circunferencia es $r = \sqrt{(5+1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$.

Luego $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 85$, o bien, $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 56$.

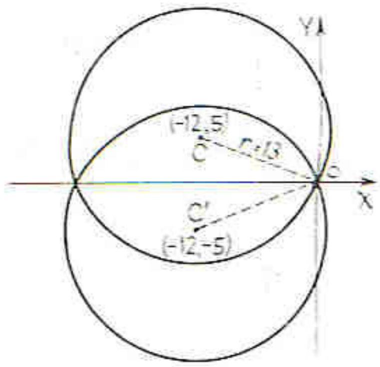
5. Hallar la ecuación de la circunferencia de manera que uno de sus diámetros sea el segmento que une los puntos $(5, -1)$ y $(-3, 7)$.

Las coordenadas del centro son $h = \dfrac{5-3}{2} = 1$, $k = \dfrac{-1+7}{2} = 3$.

El radio es $r = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

Luego $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 32$, o bien, $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 22$.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por el punto $(0, 0)$, tenga de radio $r = 13$ y la abscisa de su centro sea -12.



Como la circunferencia pasa por el origen.

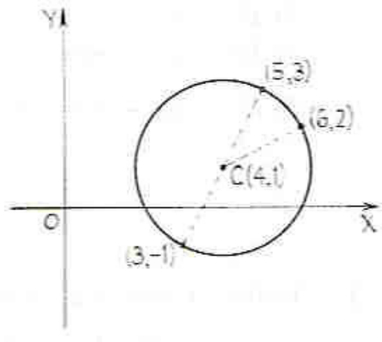
$$h^2 + k^2 = r^2, \text{ o } 144 + k^2 = 169$$

Resolviendo: $k^2 = 169 - 144 = 25$, $k = \pm 5$.

Luego, $(x+12)^2 + (y-5)^2 = 169$
y $(x+12)^2 + (y+5)^2 = 169$.

Desarrollando, $x^2 + y^2 + 24x - 10y = 0$
y $x^2 + y^2 + 24x + 10y = 0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(5, 3)$, $(6, 2)$ y $(3, -1)$.



Cada una de las expresiones

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

o bien, $$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

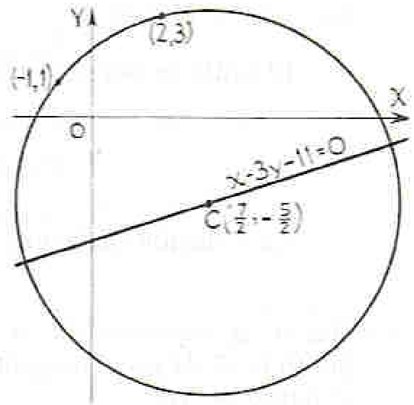
contiene tres constantes indeterminadas con lo que serán necesarias tres condiciones para determinarlas. Como la circunferencia debe pasar por los tres puntos dados, se pueden hallar los coeficientes sustituyendo las coordenadas de los puntos en lugar de x e y resolviendo, a continuación, las tres ecuaciones lineales en D, E y F. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} 25 + 9 + 5D + 3E + F &= 0, \\ 36 + 4 + 6D + 2E + F &= 0, \\ 9 + 1 + 3D - E + F &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene, $D = -8$, $E = -2$ y $F = 12$.

Sustituyendo estos valores de D, E y F, resulta la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(-1, 1)$ y cuyo centro está situado en la recta $x - 3y - 11 = 0$.



Sean (h, k) las coordenadas del centro de la circunferencia. Como (h, k) debe equidistar de los puntos $(2, 3)$ y $(-1, 1)$,

$$\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{(h+1)^2 + (k-1)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $6h + 4k = 11$.

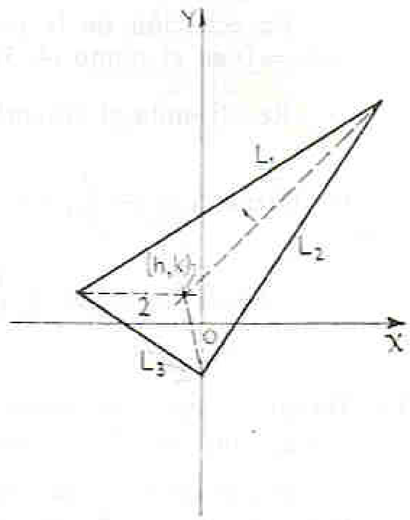
Como el centro debe estar sobre la recta $x - 3y - 11 = 0$ se tiene, $h - 3k = 11$.

Despejando los valores de h y k de estas ecuaciones se deduce, $h = \frac{7}{2}$, $k = -\frac{5}{2}$.

Por tanto, $r = \sqrt{\left(\frac{7}{2} + 1\right)^2 + \left(-\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{130}$.

La ecuación pedida es $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{130}{4}$, o bien, $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son las rectas
L_1: $2x - 3y + 21 = 0$,
L_2: $3x - 2y - 6 = 0$,
L_3: $2x + 3y + 9 = 0$.



Como el centro de la circunferencia es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo será necesario hallar, previamente, las ecuaciones de dichas bisectrices. Sean (h, k) las coordenadas del centro. Para determinar la bisectriz (1) (ver Figura):

$$\frac{2h - 3k + 21}{-\sqrt{13}} = \frac{3h - 2k - 6}{\sqrt{13}}, \text{ o bien, } h - k + 3 = 0.$$

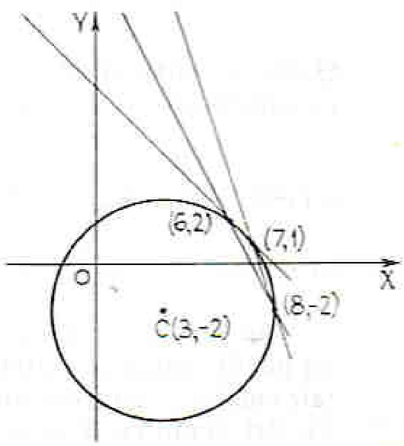
Para la bisectriz (2):

$$\frac{2h + 3k + 9}{-\sqrt{13}} = \frac{2h - 3k + 21}{-\sqrt{13}}, \text{ o bien, } 6k - 12 = 0.$$

Luego, $k = 2$, $h = -1$, y $r = \dfrac{2(-1) + 3(2) + 9}{\sqrt{13}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$.

Sustituyendo en $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$, o sea, $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 8$.

10. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados son las rectas
$x + y = 8$,
$2x + y = 14$,
$3x + y = 22$.



Resolviendo estas ecuaciones tomadas dos a dos, se obtienen las coordenadas de los vértices $(6, 2)$, $(7, 1)$ y $(8, -2)$.

Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación general de la circunferencia, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, resulta el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 6D + 2E + F &= -40, \\ 7D + E + F &= -50, \\ 8D - 2E + F &= -68. \end{aligned}$$

cuya solución proporciona los valores $D = -6$, $E = 4$ y $F = -12$.

Por sustitución se deduce la ecuación pedida, $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

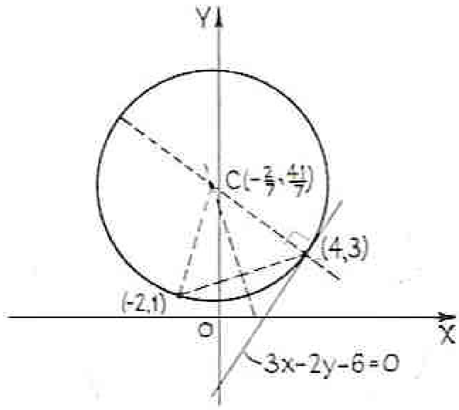
11. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto (—4, 2) y que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$.

El radio se puede determinar calculando la distancia del punto (—4, 2) a la recta.

$$r = \left| \frac{3(-4) + 4(2) - 16}{5} \right| = \left| -\frac{20}{5} \right| = \left| -4 \right| \text{ o sea 4.}$$

La ecuación pedida es $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$, o $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por el punto (—2, 1) y sea tangente a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto (4, 3).



Como la circunferencia debe pasar por los dos puntos (—2, 1) y (4, 3), su centro estará situado sobre la mediatriz del segmento que determinan. Por otra parte, también debe pertenecer a la perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto (4, 3).

La ecuación de la mediatriz del segmento es $3x + y - 5 = 0$.
La ecuación de la perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto (4, 3) es $2x + 3y - 17 = 0$.

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, $2x + 3y - 17 = 0$ y $3x + y - 5 = 0$

se obtiene, $x = -\frac{2}{7}$, $y = \frac{41}{7}$. Por tanto, $r = \sqrt{\left(4 + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(3 - \frac{41}{7}\right)^2} = \frac{10}{7}\sqrt{13}$.

La ecuación pedida es $\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \frac{1.300}{49}$, o bien, $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$.

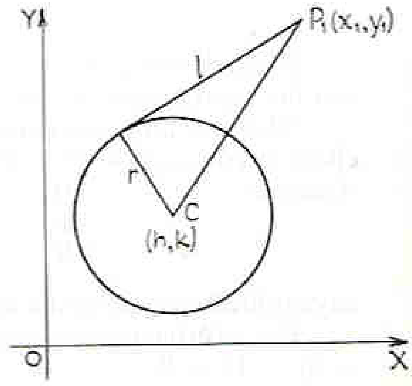
13. Hallar el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuyas hipotenusas son el segmento que determinan los puntos $(0, b)$ y (a, b).

Sea (x, y) el vértice del ángulo recto. Entonces, como los dos catetos son perpendiculares, la pendiente de uno de ellos debe ser el recíproco con signo contrario de la pendiente del otro, es decir,

$$\frac{y - b}{x - 0} = -\frac{1}{\dfrac{y - b}{x - a}} = -\frac{x - a}{y - b}.$$

Simplificando, $(y - b)^2 = -x(x - a)$, o sea, $x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$ (una circunferencia).

14. Hallar la longitud de la tangente desde el punto $P_1(x_1, y_1)$ a la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.



$$l^2 = (P_1C)^2 - r^2,$$

o bien $\quad l^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2,$

de donde $\quad l = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$

En consecuencia, la longitud de la tangente trazada desde un punto cualquiera exterior a una circunferencia es igual a la raiz cuadrada del valor que se obtiene al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la misma.

15. *Definición.* Se llama *eje radical* de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos desde los cuales las tangentes a ellas son de igual longitud.

Deducir la ecuación del eje radical de las circunferencias,

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0.$$

Sea $P'(x', y')$ un punto genérico cualquiera del eje radical pedido.

Tendremos $l_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_1x' + e_1y' + f_1}$ y $l_2 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_2x' + e_2y' + f_2}$.

Como $l_1 = l_2$, $\sqrt{x'^2 + y'^2 + d_1x' + e_1y' + f_1} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_2x' + e_2y' + f_2}$.

Elevando al cuadrado, simplificando y suprimiendo las primas, $(d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + f_1 - f_2 = 0$, que es la ecuación de una recta.

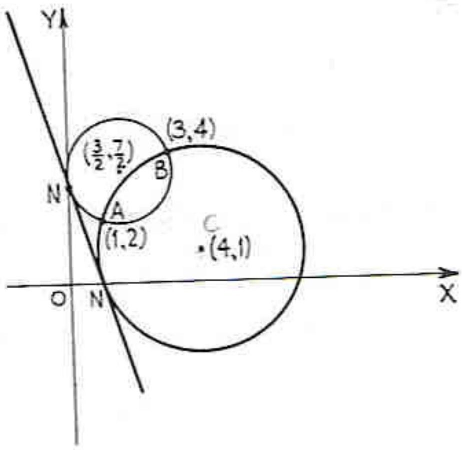
16. Hallar la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por los puntos de intersección de dos dadas.

Sean $x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$ y $x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$, dos circunferencias secantes.

La ecuación $x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 + K(x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2) = 0$ representa a dicha familia, ya que las coordenadas de los puntos de intersección satisfacen a las ecuaciones de dichas circunferencias.

Para todos los valores de K, excepto para $K = -1$, se obtiene una circunferencia. Para $K = -1$, la ecuación se reduce a una recta, que es la cuerda común de dichas circunferencias.

17. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasen por los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ y sean tangentes a la recta $3x + y - 3 = 0$.



Para hallar las coordenadas del centro, $C(h, k)$, se tienen en cuenta las igualdades $CA = CB$ y $CA = CN$, es decir,

$$(h - 1)^2 + (k - 2)^2 = (h - 3)^2 + (k - 4)^2$$

y

$$(h - 1)^2 + (k - 2)^2 = \left(\frac{3h + k - 3}{\sqrt{10}}\right)^2$$

Desarrollando y simplificando se obtiene,

$$h + k = 5$$

y

$$h^2 + 9k^2 - 6hk - 2h - 34k + 41 = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones resultan $h = 4$, $k = 1$ y $h = 3/2$, $k = 7/2$.

De $r = \dfrac{3h + k - 3}{\sqrt{10}}$ se deduce $r = \dfrac{12 + 1 - 3}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ y $r = \dfrac{9/2 + 7/2 - 3}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Teniendo en cuenta $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, tendremos

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10 \quad \text{y} \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}.$$

Desarrollando estas ecuaciones, resulta $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ y $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$ en el punto $(4, 1)$.

Sean (h, k) las coordenadas del centro.

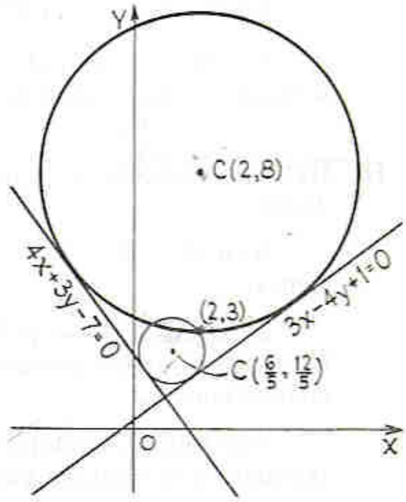
Entonces $\dfrac{3h + 4k - 16}{5} = \pm 5$, o bien, $3h + 4k - 16 = \pm 25$.

Por otra parte, $(h - 4)^2 + (k - 1)^2 = 25$, es decir, $h^2 + k^2 - 8h - 2k = 8$.

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las dos soluciones $(7, 5)$ y $(1, -3)$.

Las ecuaciones de las dos circunferencias respectivas son $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$, y $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

19. Hallar las ecuaciones de las dos circunferencias tangentes a las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $4x + 3y - 7 = 0$ y que pasan por el punto $(2, 3)$.



Sea (h, k) las coordenadas del centro. Entonces,

$$\frac{3h - 4k + 1}{-5} = \frac{4h + 3k - 7}{5} \quad \text{o} \quad 7h - k - 6 = 0. \quad (a)$$

Por otra parte, como $r = \dfrac{3h - 4k + 1}{-5}$,

$$(h - 2)^2 + (k - 3)^2 = \left(\frac{3h - 4k + 1}{-5}\right)^2$$

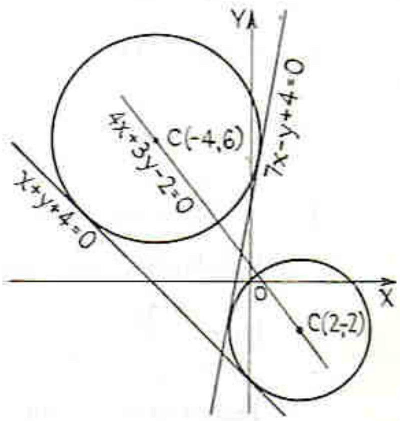
o bien, $16h^2 + 9k^2 - 106h - 142k + 24hk + 324 = 0. \quad (b)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (a) y (b) se obtienen, para las coordenadas de los dos centros, los puntos $(2, 8)$ y $(6/5, 12/5)$.

Para la circunferencia de centro $(2, 8)$, $r = \dfrac{3h - 4k + 1}{-5} = \dfrac{6 - 32 + 1}{-5} = 5$ y la ecuación de la misma es $(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = 25$.

Para la de centro $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$, $r = 1$, y la ecuación de la circunferencia es $\left(x - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{12}{5}\right)^2 = 1$.

20. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x + y + 4 = 0$ y $7x - y + 4 = 0$ y que tenga su centro en la recta $4x + 3y - 2 = 0$.



Sean (h, k) las coordenadas del centro. Entonces,

$$\frac{h + k + 4}{\sqrt{2}} = \pm \frac{7h - k + 4}{5\sqrt{2}}$$

o bien, $h - 3k - 8 = 0$ y $3h + k + 6 = 0$,

que son las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas dadas. Como el centro ha de pertenecer a la recta $4x + 3y - 2 = 0$ se verificará, $4h + 3k - 2 = 0$. De esta ecuación, y de $h - 3k - 8 = 0$, se obtienen $h = 2$ y $k = -2$.

Por tanto, $r = \dfrac{2 - 2 + 4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, con lo que la ecuación de la circunferencia es $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones $4h + 3k - 2 = 0$ y $3h + k + 6 = 0$ resulta, $h = -4$, $k = 6$ y $r = 3\sqrt{2}$.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18$.

21. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x', y') cuya suma de los cuadrados de sus distancias a las rectas $5x + 12y - 4 = 0$ y $12x - 5y + 10 = 0$ sea igual a 5.

La distancia del punto (x', y') a la recta $5x + 12y - 4 = 0$ es $\dfrac{5x' + 12y' - 4}{13}$, y a la recta $12x - 5y + 10 = 0$ es $\dfrac{12x' - 5y' + 10}{-13}$. Luego, $\left(\dfrac{5x' + 12y' - 4}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{12x' - 5y' + 10}{-13}\right)^2 = 5.$

Simplificando y suprimiendo las primas, se obtiene $169x^2 + 169y^2 + 200x - 196y = 729$, una circunferencia.

2. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos fijos $(2, 3)$ y $(-1, -2)$ sea igual a 34.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 34$. Simplificando, se obtiene, $x^2 + y^2 - x - y = 8$, una circunferencia.

3. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuya relación de distancias a los puntos fijos $(-1, 3)$ y $(3, -2)$ sea igual a a/b.

$\dfrac{\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2}}{\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2}} = \dfrac{a}{b}$. Elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene, $(b^2 - a^2)x^2 + (b^2 - a^2)y^2 + 2(b^2 + 3a^2)x - 2(3b^2 + 2a^2)y = 13a^2 - 10b^2$, una circunferencia.

4. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyo cuadrado de la distancia al punto fijo $(-5, 2)$ sea igual a su distancia a la recta $5x + 12y - 26 = 0$.

$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = \pm\left(\dfrac{5x + 12y - 26}{13}\right)^2$. Desarrollando y simplificando,

$13x^2 + 13y^2 + 125x - 64y + 403 = 0$ y $13x^2 + 13y^2 + 135x - 40y + 351 = 0$, circunferencias.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

El centro de la circunferencia dada es $(2, -3)$. El radio de la circunferencia pedida es la distancia del punto $(2, -3)$ a la recta $3x - 4y + 7 = 0$, es decir, $r = \dfrac{6 + 12 + 7}{5} = 5$.

Luego la circunferencia pedida tiene de ecuación $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

6. Hallar las ecuaciones de las circunferencias de radio 15 que sean tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 100$ en el punto $(6, -8)$.

El centro de estas circunferencias debe estar sobre la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(6, -8)$, cuya ecuación es $y = -\dfrac{4}{3}x$.

Llamando (h, k) a las coordenadas del centro, $k = -\dfrac{4}{3}h$ y $(h - 6)^2 + (k + 8)^2 = 225$.

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones se obtienen los valores de h y k $(-3, 4)$ y $(15, -20)$.

Las ecuaciones de las dos circunferencias son $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 225$ y
$(x - 15)^2 + (y + 20)^2 = 225$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la ecuación de la circunferencia

a) de centro el punto (3, —1) y radio 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

b) de centro el punto (0, 5) y radio 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 10y = 0$.

c) de centro el punto (—4, 2) y diámetro 8. *Sol.* $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$.

d) de centro el punto (4, —1) y que pase por (—1, 3).
Sol. $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 24 = 0$.

e) de diámetro el segmento que une los puntos (—3, 5) y (7, —3).
Sol. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 36 = 0$.

f) de centro el punto (—4, 3) y que sea tangente al eje y.
Sol. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$.

g) de centro el punto (3, —4) y que pase por el origen.
Sol. $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

h) de centro el origen y que pase por el punto (6, 0).
Sol. $x^2 + y^2 - 36 = 0$.

i) que sea tangente a los dos ejes de coordenadas de radio $r = 8$ y cuyo centro esté en el primer cuadrante. *Sol.* $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$.

j) que pase por el origen, de radio $r = 10$ y cuya abscisa de su centro sea —6.
Sol. $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$, $x^2 + y^2 + 12x + 16y = 0$.

2. Hallar el centro y el radio de las circunferencias siguientes. Determinar si cada una de ellas es real, imaginaria o se reduce a un punto. Aplicar la fórmula y comprobarla por suma y resta de los términos adecuados para completar cuadrados.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$. *Sol.* $(4, -5)$, $r = \sqrt{53}$, real.

b) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$. *Sol.* $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $r = \frac{1}{3}\sqrt{-13}$, imaginaria.

c) $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$. *Sol.* $\left(4, \frac{7}{2}\right)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{113}$, real.

d) $x^2 + y^2 = 0$. *Sol.* $(0, 0)$, $r = 0$, un punto.

e) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$. *Sol.* $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $r = \frac{1}{4}$, real.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos

a) (4, 5), (3, —2), y (1, —4). *Sol.* $x^2 + y^2 + 7x - 5y - 44 = 0$.

b) (8, —2), (6, 2), y (3, —7). *Sol.* $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

c) (1, 1), (1, 3), y (9, 2). *Sol.* $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$.

d) (—4, —3), (—1, —7), y (0, 0). *Sol.* $x^2 + y^2 + x + 7y = 0$.

e) (1, 2), (3, 1), y (—3, —1). *Sol.* $x^2 + y^2 - x + 3y - 10 = 0$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de lados

a) $x - y + 2 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$, y $4x + y - 17 = 0$.
Sol. $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$.

b) $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$, y $x - y + 1 = 0$.
Sol. $3x^2 + 3y^2 - 13x - 11y + 20 = 0$.

c) $3x + 2y - 13 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, y $x + y - 5 = 0$.
Sol. $x^2 + y^2 - 17x - 7y + 52 = 0$.

d) $2x + y - 8 = 0$, $x - y - 1 = 0$, y $x - 7y - 19 = 0$.
Sol. $3x^2 + 3y^2 - 8x + 8y - 31 = 0$.

e) $2x - y + 7 = 0$, $3x + 5y - 9 = 0$, y $x - 7y - 13 = 0$.
Sol. $169x^2 + 169y^2 - 8x + 498y - 3707 = 0$.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de lados

a) $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$, y $3x + 4y - 5 = 0$.
Sol. $x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0$.

b) $7x + 6y - 11 = 0$, $9x - 2y + 7 = 0$, y $6x - 7y - 16 = 0$.
Sol. $85x^2 + 85y^2 - 60x + 70y - 96 = 0$.

c) $y = 0$, $3x - 4y = 0$, y $4x + 3y - 50 = 0$.
Sol. $4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$.

d) $15x - 8y + 25 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, y $5x + 12y - 30 = 0$.
Sol. $784x^2 + 784y^2 - 896x - 392y - 2399 = 0$.

e) inscrita al triángulo de vértices $(-1, 3)$, $(3, 6)$ y $\left(\frac{31}{5}, 0\right)$.
Sol. $7x^2 + 7y^2 - 34x - 48y + 103 = 0$.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-2, 3)$ que sea tangente a la recta $20x - 21y - 42 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el origen que sea tangente a la recta $8x - 15y - 12 = 0$. *Sol.* $289x^2 + 289y^2 = 144$.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, -3)$ que sea tangente a la recta que une los puntos $(-2, 4)$ y $(2, 1)$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esté en el eje x y que pase por los puntos $(-2, 3)$ y $(4, 5)$. *Sol.* $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$.

10. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, -4)$ y $(5, 2)$ y que tiene su centro en la recta $x - 2y + 9 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 47 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(4, 1)$ y sea tangente al eje x. *Sol.* $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 42x - 290y + 441 = 0$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(3, 6)$ y sea tangente a la recta $2x + y - 2 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(11, 2)$ y sea tangente a la recta $2x + 3y - 18 = 0$ en el punto $(3, 4)$. *Sol.* $5x^2 + 5y^2 - 98x - 142y + 737 = 0$.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$ en el punto $(7, 2)$.
Sol. $x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 2y + 4 = 0$ y $2x - y - 8 = 0$ y que pase por el punto $(4, -1)$.
Sol. $x^2 + y^2 - 30x + 6y + 109 = 0$, $x^2 + y^2 - 70x + 46y + 309 = 0$.

16. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 3y + 9 = 0$ y $3x + y - 3 = 0$ y que tenga su centro en la recta $7x + 12y - 32 = 0$.
Sol. $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 31 = 0$, $961x^2 + 961y^2 + 248x - 5270y + 7201 = 0$.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia definida por el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos $(-4, 1)$ y $(3, 2)$.
Sol. $x^2 + y^2 + x - 3y - 10 = 0$.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $4x + 3y - 50 = 0$ y $3x - 4y - 25 = 0$ y cuyo radio sea igual a 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 100 = 0$,
$x^2 + y^2 - 36x - 2y + 300 = 0$,
$x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$,
$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

19. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares $2x + 3y - 6 = 0$ y $3x - 2y + 8 = 0$ sea igual a 10. Si es una circunferencia, hallar su centro y su radio.

Sol. $13x^2 + 13y^2 + 24x - 68y - 30 = 0$. Centro $\left(-\frac{12}{13}, \frac{34}{13}\right)$, $r = \sqrt{10}$.

20. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $b_1x - a_1y + c_2 = 0$ es una constante K^2, es una circunferencia.

21. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos fijos $(-2, -5)$ y $(3, 4)$ sea igual a 70. Si es una circunferencia, hallar su centro y su radio.
Sol. $x^2 + y^2 - x + y - 8 = 0$. Centro $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{34}$.

22. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos $(2, -1)$ y $(-3, 4)$ sea igual a $2/3$. Si es una circunferencia, determinar su centro y su radio.
Sol. $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$. Centro $(6, -5)$, $r = 6\sqrt{2}$.

23. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos (a, b) y (c, d) es igual a K (constante) es una circunferencia.

24. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyo cuadrado de la distancia al punto fijo $(-2, -5)$ sea el triple de la correspondiente a la recta $8x + 15y - 34 = 0$.
Sol. $17x^2 + 17y^2 + 44x + 125y + 595 = 0$, $17x^2 + 17y^2 + 92x + 215y + 391 = 0$.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 4y + 17 = 0$ que sea concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$.
Sol. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$.

26. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$.
Sol. $x^2 + y^2 - 18x - 24y + 125 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 75 = 0$.

27. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento de 30 centímetros de longitud cuyos extremos se apoyan constantemente en los ejes de coordenadas.
Sol. Una circunferencia, $x^2 + y^2 = 225$.

28. Hallar la máxima y mínima distancias del punto $(10, 7)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$. *Sol.* 15 y 5.

29. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $(7, 8)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.
Sol. $2\sqrt{26}$.

30. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $(6, 4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$. *Sol.* 9.

31. Hallar el valor de K para el cual la longitud de la tangente trazada desde el punto $(5, 4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2Ky = 0$ sea igual a *a*). 1, *b*). 0. *Sol.* *a*) $K = -5$, *b*) $K = -5{,}125$.

32. Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales de las circunferencias siguientes, y demostrar que se cortan en un punto.
$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0$, y $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Sol. $5x - y + 2 = 0$, $3x - 2y - 3 = 0$, $2x + y + 5 = 0$. Punto de intersección $(-1, -3)$. Este punto se denomina centro radical de las circunferencias.

33. Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales de las circunferencias siguientes y hallar el centro radical (punto de intersección de los ejes).
$x^2 + y^2 + x = 0$, $x^2 + y^2 + 4y + 7 = 0$, y $2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y + 9 = 0$.
Sol. $x - 4y - 7 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Centro $(-1, -2)$.

34. Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales y el centro radical de las circunferencias siguientes.
$x^2 + y^2 + 12x + 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$, y $x^2 + y^2 - 4x + 16y + 43 = 0$.
Sol. $x + 2 = 0$, $x - y - 2 = 0$, $y + 4 = 0$. Centro $(-2, -4)$.

35. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-2, 2)$ y por los de intersección de las circunferencias
$$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0.$$
Sol. $5x^2 + 5y^2 - 7y - 26 = 0$.

36. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(3, 1)$ y por los de intersección de las circunferencias
$$x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0.$$
Sol. $3x^2 + 3y^2 - 13x + 3y + 6 = 0$.

37. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ y cuyo centro esté en la recta $y = x$.
Sol. $7x^2 + 7y^2 - 10x - 10y - 12 = 0$.

CAPITULO 5

Secciones cónicas.–La parábola

DEFINICION. El lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante recibe el nombre de *sección cónica* o simplemente *cónica*.

El punto fijo se llama *foco* de la cónica, la recta fija *directriz* y la relación constante *excentricidad* que, normalmente, se representa por la letra e.

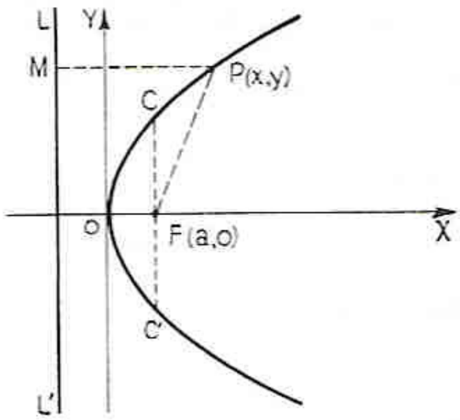
Las secciones cónicas se clasifican en tres categorías, según su forma y propiedades. Estas se establecen de acuerdo con los valores de la excentricidad e.

Si $e < 1$, la cónica se llama *elipse*.
Si $e = 1$, la cónica se llama *parábola*.
Si $e > 1$, la cónica se llama *hipérbola*.

PARABOLA. Sean $L'L$ y F la recta y punto fijos. Tracemos por F la perpendicular al eje x y sea $2a$ la distancia de F a $L'L$. Por definición de parábola la curva debe cortar al eje x en el punto O, equidistante de F y $L'L$. El eje y se traza perpendicular al x por el punto O.

Las coordenadas de F son $(a, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -a$, o bien, $x + a = 0$.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de manera que $\dfrac{PF}{PM} = e = 1$.



Entonces, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x + a$.

Elevando al cuadrado,

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

o bien, $$y^2 = 4ax.$$

De la forma de la ecuación se deduce que la parábola es simétrica con respecto al eje x. El punto en que la curva corta al eje de simetría se denomina *vértice*. La cuerda $C'C$ que pasa por el foco y es perpendicular al eje se llama *latus rectum*. La longitud del *latus rectum* es $4a$, es decir, el coeficiente del término de primer grado en la ecuación.

Si el foco está a la izquierda de la directriz, la ecuación toma la forma

$$y^2 = -4ax.$$

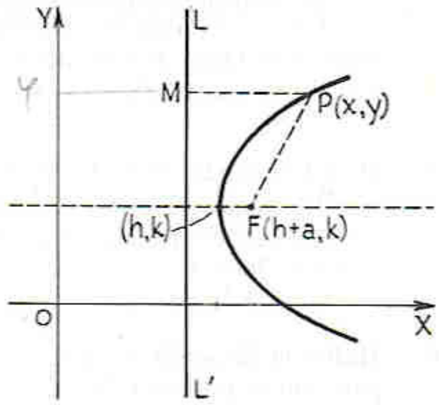
Si el foco pertenece al eje y, la forma de la ecuación es

$$x^2 = \pm 4ay$$

en la que el signo depende de que el foco esté por encima o por debajo de la directriz.

Consideremos ahora una parábola de vértice el punto (h, k), de eje paralelo al de coordenadas x y cuyo foco esté a una distancia a del vértice y a la derecha de él. La directriz, paralela al eje y y a una distancia $2a$ a la izquierda del foco, tendrá la ecuación $x = h - a$, o bien, $x - h + a = 0$.

Llamemos $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de la parábola. Como $PF = PM$,



$$\sqrt{(x - h - a)^2 + (y - k)^2} = x - h + a,$$

es decir, $\quad y^2 - 2ky + k^2 = 4ax - 4ah,$

o bien, $\quad (y - k)^2 = 4a(x - h).$

Otras expresiones típicas son:

$$(y - k)^2 = -4a(x - h);$$
$$(x - h)^2 = 4a(y - k);$$
$$(x - h)^2 = -4a(y - k).$$

Que desarrolladas adquieren la forma $\quad x = ay^2 + by + c,$
$\quad y = ax^2 + bx + c.$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del *latus rectum* de la parábola $3y^2 = 8x$, o bien, $y^2 = \frac{8}{3}x$.

De la ecuación de la parábola se deduce que $4a = \frac{8}{3}$, de donde, $a = \frac{2}{3}$. El foco es, pues el punto de coordenadas $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, y la ecuación de la directriz, $x = -\frac{2}{3}$.

Para hallar la longitud del *latus rectum* se calcula el valor de y para $x = \frac{2}{3}$. Para $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, con lo cual, la longitud del *latus rectum* es $2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

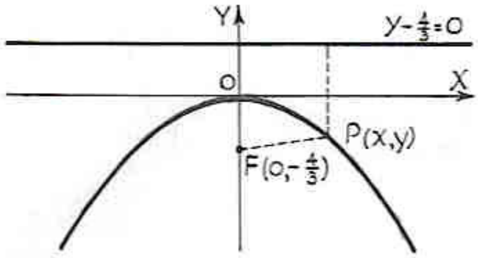
2. Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ y por directriz la recta $y - \frac{4}{3} = 0$. Hallar la longitud del *latus rectum*.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de la parábola. En estas condiciones,

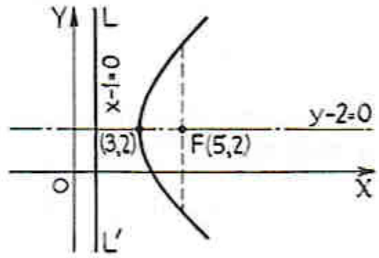
$$\sqrt{(x - 0)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2} = y - \frac{4}{3}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $x^2 + \frac{16}{3}y = 0$. *Latus rectum* $= 4a = \frac{16}{3}$.

Y= X



Problema 2



Problema 3

3. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto (3, 2) y foco (5, 2).

Como el vértice es el punto (3, 2) y el foco (5, 2) se tiene, $a = 2$ y la ecuación adquiere la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, o sea, $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$.

Simplificando, $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

4. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el origen, de eje el de coordenadas y, y que pase por el punto $(6, -3)$.

La ecuación que hemos de aplicar es $x^2 = -4ay$.

Como el punto $(6, -3)$ pertenece a la curva el valor de a debe ser tal que las coordenadas del punto satisfagan a la ecuación.

Sustituyendo, $36 = -4a(-3)$, de donde, $a = 3$. La ecuación pedida es $x^2 = -12y$.

5. Hallar la ecuación de la parábola de foco el punto $(6, -2)$ y directriz la recta $x - 2 = 0$.

De la definición, $\sqrt{(x-6)^2 + (y+2)^2} = x - 2$.

Elevando al cuadrado, $x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 4x + 4$. Simplificando, $y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$.

6. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(2, 3)$, de eje paralelo al de coordenadas y, y que pase por el punto $(4, 5)$.

La ecuación que hemos de aplicar es $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, es decir, $(x - 2)^2 = 4a(y - 3)$.

Como el punto $(4, 5)$ pertenece a la curva, $(4 - 2)^2 = 4a(5 - 3)$, de donde, $a = \dfrac{1}{2}$.

La ecuación pedida es $(x - 2)^2 = 2(y - 3)$, o bien, $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al de coordenadas x, y que pase por los puntos $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(-1, 3)$.

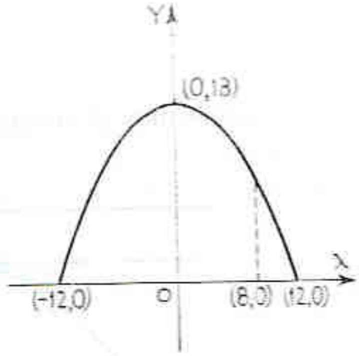
Aplicamos la ecuación $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Sustituyendo x e y por las coordenadas de los puntos,
$$\begin{aligned} 1 - 2D + E + F &= 0,\\ 4 + D + 2E + F &= 0,\\ 9 - D + 3E + F &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, $D = \dfrac{2}{5}$, $E = -\dfrac{21}{5}$, $F = 4$.

Por tanto, la ecuación pedida es $y^2 + \dfrac{2}{5}x - \dfrac{21}{5}y + 4 = 0$, o bien, $5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$.

8. Hallar la altura de un punto de un arco parabólico de 18 metros de altura y 24 metros de base, situado a una distancia de 8 metros del centro del arco.



Tomemos el eje x en la base del arco y el origen en el punto medio. La ecuación de la parábola será de la forma

$$(x - h)^2 = 4a(y - k)$$

o bien
$$(x - 0)^2 = 4a(y - 18).$$

La curva pasa por el punto $(12, 0)$. Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación se obtiene, $a = -2$. Por consiguiente,

$$(x - 0)^2 = -8(y - 18).$$

Para hallar la altura del arco a 8 metros del centro se sustituye $x = 8$ en la ecuación y se despeja el valor de y. Por tanto, $8^2 = -8(y - 18)$, de donde, $y = 10$ metros. El arco simple más resistente es el de forma parabólica.

9. Dada la parábola de ecuación $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$, hallar las coordenadas del vértice y del foco, y la ecuación de su directriz.

Sumando y restando términos adecuados, para completar un cuadrado, $y^2 + 8y + 16 = 6x - 4 + 16 = 6x + 12$, o bien, $(y + 4)^2 = 6(x + 2)$.

El vértice es el punto $(-2, -4)$. Como $4a = 6$, $a = 3/2$. Luego el foco es el punto de coordenadas $(-\frac{1}{2}, -4)$, y la ecuación de la directriz es $x = -7/2$.

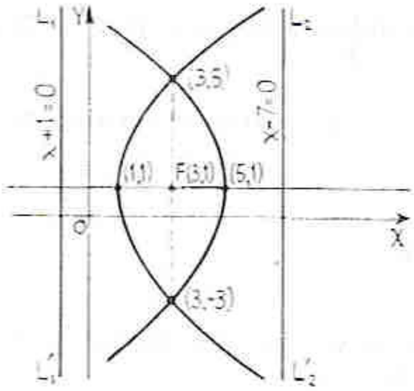
10. Hallar la ecuación de la parábola cuyo *latus rectum* es el segmento entre los puntos (3, 5) y (3, −3).

Aplicamos la ecuación en la forma $(y - k)^2 = \pm 4a(x - h)$.

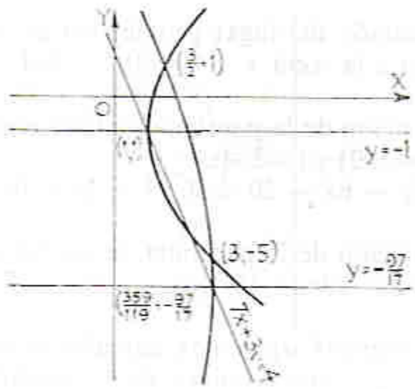
Como la longitud del *latus rectum* es 8, $4a = 8$, e $(y - k)^2 = \pm 8(x - h)$.

Para determinar las coordenadas (h, k) tenemos, $(5 - k)^2 = \pm 8(3 - h)$ y $(-3 - k)^2 = \pm 8(3 - h)$, ya que los puntos (3, 5) y (3, −3) pertenecen a la curva. Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen como valores de h y k los puntos (1, 1) y (5, 1).

Las ecuaciones pedidas son (1) $(y - 1)^2 = 8(x - 1)$ o $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$
y (2) $(y - 1)^2 = -8(x - 5)$ o $y^2 - 2y + 8x - 39 = 0$.



Problema 10



Problema 11

11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en la recta $7x - 3y - 4 = 0$, de eje horizontal y que pase por los puntos (3, −5) y (3/2, 1).

Aplicamos la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$. Sustituyendo las coordenadas de los puntos dados se obtiene,

$$(-5 - k)^2 = 4a(3 - h) \quad \text{y} \quad (1 - k)^2 = 4a(3/2 - h).$$

Como (h, k) pertenece a la recta $7x - 3y - 4 = 0$, se tiene, $7h - 3k - 4 = 0$.

Resolviendo el sistema de estas tres ecuaciones resulta $h = 1$, $k = -1$, $4a = 8$; y $h = 359/119$, $k = -97/17$, $4a = -504/17$.

Luego las ecuaciones pedidas son, $(y + 1)^2 = 8(x - 1)$ e $\left(y + \dfrac{97}{17}\right)^2 = -\dfrac{504}{17}\left(x - \dfrac{359}{119}\right)$.

12. La trayectoria descrita por un proyectil lanzado horizontalmente, desde un punto situado y metros (m) sobre el suelo, con una velocidad v metros por segundo (m/s), es una parábola de ecuación

$$x^2 = -\frac{2v^2}{g}\,y,$$

siendo x la distancia horizontal desde el lugar de lanzamiento y $g = 9{,}81$ metros por segundo en cada segundo (m/s²), aproximadamente. El origen se toma en el punto de salida del proyectil del arma.

En estas condiciones se lanza horizontalmente una piedra desde un punto situado a 3 metros (m) de altura sobre el suelo. Sabiendo que la velocidad inicial es de 50 metros/segundo (m/s), calcular la distancia horizontal al punto de caída.

$$x^2 = -\frac{2v^2}{g}\,y = -\frac{2(50)^2}{9{,}8}(-3), \text{ con lo que } x = 50\sqrt{0{,}61} = 39 \text{ m}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar las coordenadas del foco, la longitud del *latus rectum* y la ecuación de la directriz de las parábolas siguientes. Representarlas gráficamente.

a) $y^2 = 6x$. *Sol.* $(3/2, 0)$, 6, $x + 3/2 = 0$.
b) $x^2 = 8y$. *Sol.* $(0, 2)$, 8, $y + 2 = 0$.
c) $3y^2 = -4x$. *Sol.* $(-1/3, 0)$, $4/3$, $x - 1/3 = 0$.

2. Hallar la ecuación de las parábolas siguientes:

a) Foco $(3, 0)$, directriz $x + 3 = 0$. *Sol.* $y^2 - 12x = 0$.
b) Foco $(0, 6)$, directriz el eje x. *Sol.* $x^2 - 12y + 36 = 0$.
c) Vértice el origen, eje el de coordenadas x, y que pase por $(-3, 6)$. *Sol.* $y^2 = -12x$.

3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(-2, 3)$ sea igual a su distancia a la recta $x + 6 = 0$. *Sol.* $y^2 - 6y - 8x - 23 = 0$.

4. Hallar la ecuación de la parábola de foco el punto $(-2, -1)$ y cuyo *latus rectum* es el segmento entre los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, 4)$.
Sol. $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$, $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$.

5. Hallar la ecuación de la parábola de vértice $(-2, 3)$ y foco $(1, 3)$.
Sol. $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$.

6. Dadas las parábolas siguientes, calcular *a*) las coordenadas del vértice, *b*) las coordenadas del foco, *c*) la longitud del *latus rectum* y *d*) la ecuación de la directriz.

(1) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$. *Sol.* *a*) $(2, 2)$, *b*) $(1/2, 2)$, *c*) 6, *d*) $x - 7/2 = 0$.
(2) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$. *Sol.* *a*) $(3/2, -7/4)$, *b*) $(3/2, -4/3)$, *c*) $5/3$.
(3) $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$. *Sol.* *a*) $(3/2, 2)$, *b*) $(3, 2)$, *c*) 6, *d*) $x = 0$.

7. Hallar la ecuación de una parábola cuyo eje sea paralelo al eje x y que pase por los puntos $(3, 3)$, $(6, 5)$ y $(6, -3)$. *Sol.* $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$.

8. Hallar la ecuación de una parábola de eje vertical y que pase por los puntos $(4, 5)$, $(-2, 11)$ y $(-4, 21)$.
Sol. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

9. Hallar la ecuación de una parábola cuyo vértice esté sobre la recta $2y - 3x = 0$, que su eje sea paralelo al de coordenadas x, y que pase por los puntos $(3, 5)$ y $(6, -1)$.
Sol. $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$, $11y^2 - 98y - 108x + 539 = 0$.

10. El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros (m) y están separados una distancia de 500 metros (m), quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros (m) sobre la calzada del puente. Tomando como eje x la horizontal que define el puente, y como eje y el de simetría de la parábola, hallar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a 80 metros (m) del centro del puente. *Sol.* $x^2 - 1.250\,y + 12.500 = 0$; 15,12 m.

11. Se lanza una piedra horizontalmente desde la cima de una torre de 185 metros (m) de altura con una velocidad de 15 metros por segundo (m/s). Hallar la distancia del punto de caída al pie de la torre suponiendo que el suelo es horizontal. *Sol.* 92,5 m.

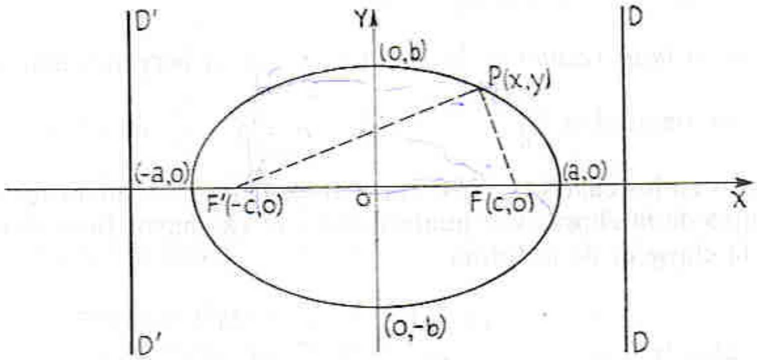
12. Un avión que vuela hacia el Sur a una altura de 1.500 metros (m) y a una velocidad de 200 kilómetros por hora (km/h) deja caer una bomba. Calcular la distancia horizontal del punto de caída a la vertical del punto de lanzamiento. *Sol.* 972 m.

13. Un arco parabólico tiene una altura de 25 metros (m) y una luz de 40 metros (m). Hallar la altura de los puntos del arco situados 8 metros a ambos lados de su centro. *Sol.* 21 m.

CAPITULO 6

La elipse

DEFINICION. Elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos*.



Sean los dos puntos fijos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y $2a$ la suma constante, $(a > c)$. Consideremos un punto genérico $P(x, y)$ que pertenezca al lugar. Por definición,

$$F'P + PF = 2a,$$

es decir, $$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a,$$

o bien, $$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}.$$

Elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes,

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Dividiendo por $a^2(a^2 - c^2)$ se obtiene la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Como $a > c$, $a^2 - c^2$ es positivo. Haciendo $a^2 - c^2 = b^2$, resulta la ecuación de la elipse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

o bien, $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Como esta ecuación solo contiene potencias pares de x e y, la curva es simétrica con respecto a los ejes de coordenadas x e y, y con respecto al origen. El punto O es el centro de la elipse y los ejes se denominan *eje mayor* y *eje menor*.

Si los focos fueran los puntos de coordenadas $(0, c)$ y $(0, -c)$, el eje mayor estaría sobre el eje y, con lo que la ecuación resulta de la forma $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$.

La *excentricidad* $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, o bien $c = ae$.

Como la elipse tiene dos focos, también tendrá dos directrices. Las ecuaciones de las directrices $D'D'$ y DD son, respectivamente,

$$x + \frac{a}{e} = 0 \quad \text{y} \quad x - \frac{a}{e} = 0.$$

Si los focos estuvieran sobre el eje y, las ecuaciones de las directrices serían

$$y + \frac{a}{e} = 0 \quad \text{y} \quad y - \frac{a}{e} = 0.$$

Se denomina *latus rectum* de la elipse a la cuerda perpendicular al eje mayor por uno de los focos. Su longitud es $\dfrac{2b^2}{a}$.

Los puntos en los cuales la elipse corta al eje mayor se llaman *vértices*.

Si el centro de la elipse es el punto (h, k) y el eje mayor tiene la dirección del eje x, la ecuación de la elipse es de la forma

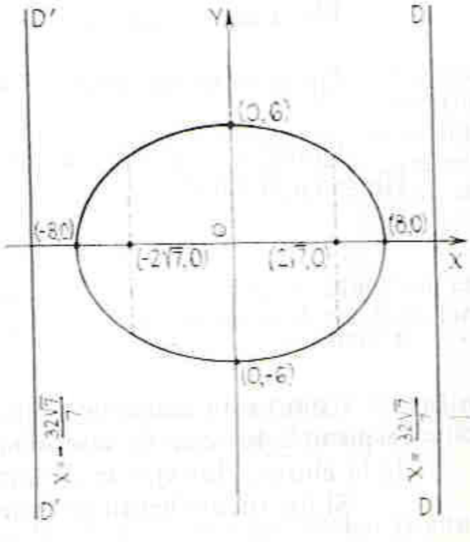
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

o bien, $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ si el eje mayor fuera paralelo al eje y. En cualquier caso, la forma general de la ecuación de la elipse es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

siempre que A y B sean del mismo signo.

PROBLEMAS RESUELTOS



1. Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 576$, hallar el semieje mayor, el semieje menor, la excentricidad, las coordenadas de los focos, las ecuaciones de las directrices y la longitud del *latus rectum*.

Dividiendo por 576 se tiene $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. Luego

$a = 8$ y $b = 6$.

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{7}.$$

Coordenadas de los focos: $(2\sqrt{7}, 0)$ y $(-2\sqrt{7}, 0)$.

Las ecuaciones de las directrices son

$$x = \pm \frac{a}{e} \quad \text{o} \quad x = \pm \frac{32\sqrt{7}}{7}.$$

La longitud del *latus rectum* de la elipse es $2b^2 a = 72/8 = 9$.

2. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, foco en el punto (0, 3) y semieje mayor igual a 5.

Datos: $c = 3$ y $a = 5$. Por consiguiente, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Aplicando la fórmula $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, se obtiene la ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

3. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, eje mayor sobre el eje x y que pase por los puntos (4, 3) y (6, 2).

La fórmula a aplicar es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sustituyendo x e y por las coordenadas de los puntos dados se obtiene, $\frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$ y $\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, $a^2 = 52$, $b^2 = 13$.

Luego la ecuación pedida es $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$, o bien, $x^2 + 4y^2 = 52$.

4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la correspondiente a la recta $x - 16 = 0$.

Del enunciado del problema se deduce,

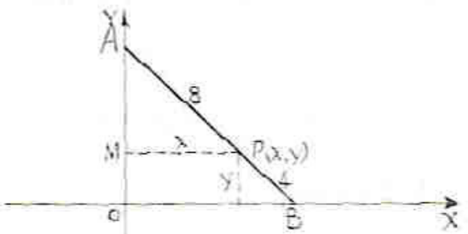
$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \tfrac{1}{2}(x - 16), \text{ o sea, } x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{x^2 - 32x + 256}{4}.$$

Simplificando, se obtiene la ecuación $3x^2 + 4y^2 = 192$, de la elipse.

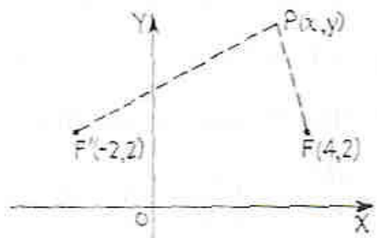
5. Se considera un segmento AB de 12 unidades de longitud y un punto $P(x, y)$ situado sobre él a 8 unidades de A. Hallar el lugar geométrico de P cuando el segmento se desplace de forma que los puntos A y B se apoyen constantemente sobre los ejes de coordenadas y y x respectivamente.

Por triángulos semejantes, $\frac{MA}{AP} = \frac{y}{PB}$, o sea, $\frac{\sqrt{64 - x^2}}{8} = \frac{y}{4}$.

Luego $64 - x^2 = 4y^2$, o bien, $x^2 + 4y^2 = 64$. El lugar es una elipse con su centro en el origen y de eje mayor sobre el eje x.



Problema 5



Problema 6

6. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (4, 2) y (—2, 2) sea igual a 8.

$F'P + PF = 8$, o sea, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 8$.

Ordenando términos, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 8 - \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$.

Elevando al cuadrado y reduciendo términos, $3x - 19 = -4\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$.

Elevando de nuevo al cuadrado y reduciendo términos resulta la ecuación $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$, que es una elipse.

7. Dada la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$, hallar su centro, semiejes, vértices y focos.

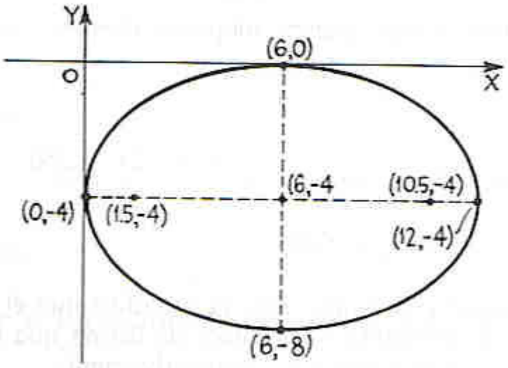
Esta ecuación se puede poner en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, de la manera siguiente:

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = 144,$$

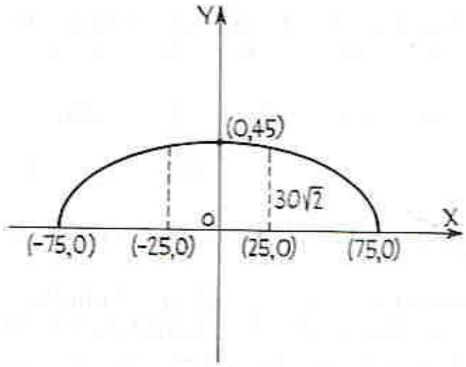
$$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144,$$

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1.$$

Por tanto, el centro de la elipse es el punto de coordenadas $(6, -4)$; $a = 6$, $b = 4$; los vértices son los puntos $(0, -4)$, $(12, -4)$, y los focos $(6 + 2\sqrt{5}, -4)$, $(6 - 2\sqrt{5}, -4)$.



Problema 7



Problema 8

8. Un arco tiene forma de semielipse con una luz de 150 metros siendo su máxima altura de 45 metros. Hallar la longitud de dos soportes verticales situados cada uno a igual distancia del extremo del arco.

Supongamos el eje x en la base del arco y el origen en su punto medio. La ecuación del arco será, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, siendo $a = 75$, $b = 45$.

Para hallar la altura de los soportes, hacemos $x = 25$ en la ecuación y despejamos el valor de y.

Es decir, $\frac{625}{5.625} + \frac{y^2}{2.025} = 1$, $y^2 = 8(225)$, e $y = 30\sqrt{2}$ metros.

9. La Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse vale $1{,}485 \times 10^8$ kilómetros y que la excentricidad es, aproximadamente, 1/62, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol.

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$. Luego $\frac{1}{62} = \frac{c}{148.500.000}$, o sea, $c = 2.400.000$.

La máxima distancia es $a + c = 1{,}509 \times 10^8$ km.
La mínima distancia es $a + c = 1{,}461 \times 10^8$ km.