

Pauta Control 2
Matemáticas I, 2006

Problema 1

1. Encuentre la ecuación cartesiana o general L_1 de la recta que pasa por los puntos $A = (2, 1)$ $B = (3, 3)$.

Sol

Buscamos primero la pendiente: $m = \frac{3-1}{3-2} = 2$

Luego la ecuación es: $y - 1 = 2(x - 2)$

Lo que queda: $y = 2x - 3$

2. Encuentre la ecuación cartesiana o general L_2 de la recta que es perpendicular a L_1 y pasa por el punto medio M del segmento $\overline{AB}$.

Sol

Buscamos primero el valor de M .

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces $M = (\frac{5}{2}, 2)$

La pendiente de recta perpendicular a L_1 es $-\frac{1}{2}$

Luego la recta es:

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - \frac{5}{2})$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{4}$$

3. Dada la recta
 $L_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

Pruebe que el punto C de intersección de L_2 con L_3 está sobre el eje x .

Sol

Vectorialmente L_2 es:

$$L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Igualemos L_2 con L_3

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego quedan las ecuaciones:

$$0 = 13\alpha - \lambda$$

$$\frac{17}{4} = 2\alpha + \frac{\lambda}{2}$$

De aquí $\lambda = 13\alpha$, luego

$$\frac{17}{4} = 2\alpha + \frac{13\alpha}{2}$$

$$\frac{17}{4} = \frac{17\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Luego reemplazando el α en L_3 queda que el punto de intersección es $C = (\frac{13}{2}, 0)$ el cual está en el eje x .

4. Calcule la distancia del punto C a la recta L_1 , es decir, la distancia de C a M .

Sol

$$C = (\frac{13}{2}, 0) \text{ y } M = (\frac{5}{2}, 2)$$

$$\vec{CM} = \vec{c} - \vec{m} = (\frac{8}{2}, -2) = (4, -2)$$

$$\text{Luego la distancia es } |\vec{CM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

Problema 2

1. Establezca si las siguientes ecuaciones definen o no una circunferencia y en caso afirmativo determinar su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 16 = 0$

Sol

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = -3$$

No define circunferencia.

b) $x^2 + y^2 + 2x = 0$

Sol

$$x^2 + y^2 + 2x = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 1$$

Define una circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 1.

c) $x^2 + y^2 - x + 6y + 9 = 0$

Sol

$$x^2 + y^2 - x + 6y + 9 = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 3)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 3)^2 = \frac{1}{4}$$

Define una circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, -3)$ y radio $\frac{1}{2}$.

2. Dados los puntos $O = (0, 0)$ y $A = (3, 0)$

- a) Escriba las ecuaciones de las circunferencias centradas en A y en O con radio $r = \frac{5}{2}$.

Sol

En O :

$$x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$

En A :

$$(x - 3)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$

- b) Encuentre los dos puntos de intersección de ambas circunferencias.

Sol

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{25}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{25}{4} - x^2 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 + \frac{25}{4} - x^2 &= \frac{25}{4} \\ \Rightarrow (x - 3)^2 - x^2 &= 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - x^2 = 0 \\ \Rightarrow -6x + 9 &= 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y^2 &= \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ \Rightarrow y &= \pm 2 \end{aligned}$$

Entonces las intersecciones son: $(\frac{3}{2}, 2)$ y $(\frac{3}{2}, -2)$

- c) A partir de esto, encuentre las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por O y A que tienen radio $r = \frac{5}{2}$.

Sol

Esas son las circunferencias centradas en $(\frac{3}{2}, 2)$ y $(\frac{3}{2}, -2)$ con radio

$$\begin{aligned} r &= \frac{5}{2} \\ (x - \frac{3}{2})^2 + (y - 2)^2 &= \frac{25}{4} \\ (x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 &= \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Problema 3

Resuelva solamente uno de los siguientes problemas.

- a) (Primera alternativa) Encuentre las dimensiones de un rectángulo de perímetro 11 y área 6.

Sol

Las ecuaciones que quedan son $xy = 6$ y $x + y = 11$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow y = 11 - x, \text{ luego queda } x(11 - x) = 6 \\
&\Rightarrow -x^2 + 11x - 6 = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4(-1)(-6)}}{-2} \\
&x = \frac{11 \mp \sqrt{121 - 24}}{2} \\
&x = \frac{11 \mp \sqrt{97}}{2} \\
&y = 11 - x \Rightarrow y = \frac{11 \pm \sqrt{97}}{2}
\end{aligned}$$

b) (Segunda alternativa)

- 1) Encuentre la ecuación de la parábola de foco en $(0, 5)$ y directriz $y = 0$.

Sol

La ecuación de una parábola con vértice en (h, k) y foco en $(h, k + p)$ es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Si el foco es $(0, 5)$ y la directriz es $y = 0$, el vértice es $(0, \frac{5}{2})$

Luego $h = 0$, $p = \frac{5}{2}$ y $k = \frac{5}{2}$.

Entonces queda:

$$x^2 = 10(y - \frac{5}{2})$$

$$x^2 = 10y - 25$$

$$\frac{x^2 + 25}{10} = y$$

- 2) Encuentre vértice, directriz y foco de la parábola $y = 2(x - 3)(x + 1)$.

Sol

$$\frac{1}{2}y = x^2 - 2x - 3$$

$$\frac{1}{2}y + 4 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$4\frac{1}{8}(y + 8) = (x - 1)^2$$

Luego $p = \frac{1}{8}$, $k = -8$ y $h = 1$

Así que el foco está en $(1, \frac{1}{8} - 8) = (1, -\frac{63}{8})$

La directriz es $y = k - p = -8 - \frac{1}{8} = -\frac{65}{8}$