Tarea #4 - Matemática 1 - Sección 1 - 2009

P4. Encuentre la ecuaci{on de la circunferencia que satisface:

- ***Centro en (5,-6) y radio 4***

$$(x-5)^2+(y-(-6))^2=4^2$$

Luego la ecuación queda,

$$(x-5)^2+(y+6)^2=16$$

- **Pasa por A=(2,3), B=(-2, -3), C=(-2,3)**

Planteando la ecuación general de la circunferencia,

$$x^2+y^2+A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

Y reemplazando los puntos que pertenecen a la circunferencia se obtiene un sistema de 3x3 (3 ecuaciones y 3 incógnitas),

$$4+9+A\cdot 2+B\cdot 3+C=0$$
$$4+9-A\cdot 2-B\cdot 3+C=0$$
$$4+9-A\cdot 2+B\cdot 3+C=0$$

De aquí se deduce que A=0, B=0 y C=-13.

Luego la ecuación de la circunferencia queda,

$$x^2+y^2-13=0$$

- ***Por su centro pasa la recta x-2y+9=0 y que contiene los puntos A=(4,1) y B(-3,2).***

Si planteamos que el centro esta en la coordenada (a,b), y este punto pertenece a la recta, tenemos una primera ecuación,

$$a-2\cdot b+9=0$$

Además, por la forma de la ecuación de la circunferencia se puede decir,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Como se tienen puntos que pertenecen a la circunferencia estos se pueden reemplazar en la última expresión, generando dos ecuaciones más,

$$(4-a)^2+(1-b)^2=r^2$$
$$(-3-a)^2+(2-b)^2=r^2$$

Igualando las últimas 2, ya que el radio es común,

$$(4-a)^2+(1-b)^2=(-3-a)^2+(2-b)^2=r^2$$

Desarrollando los binomios,

$$a^2-8\cdot a+16+b^2-2\cdot b+1=a^2+6\cdot a+9+b^2-4\cdot b+4$$

Los términos cuadráticos se van,

$$-8\,a-2\cdot b+17=6\cdot a-4\cdot b+13$$

$$4=14\,a-2\cdot b$$

Luego tenemos 2 ecuaciones que estan en función de las coordenadas del centro, por lo que se tiene un sistema,

$$\begin{gathered} a-2\cdot b+9=0 \\ 14\,a-2\cdot b-4=0 \end{gathered}$$

Cambiando el signo a una,

$$\begin{gathered} -a+2\cdot b-9=0 \\ 14\,a-2\cdot b-4=0 \end{gathered}$$

Luego sumándolas,

$$13\cdot a-13=0$$

$$\begin{gathered} a=1 \\ b=5 \end{gathered}$$

Reemplazando en las anteriores se obtiene r^2

$$\begin{gathered} (4-a)^2+(1-b)^2=r^2 \\ (4-1)^2+(1-5)^2=r^2 \\ (3)^2+(-4)^2=r^2 \\ 9+16=r^2 \\ 25=r^2 \end{gathered}$$

Concluyendo que la ecuación de la circunferencia es,

$$(x-1)^2+(y-5)^2=25$$

P6. Establezca si las siguientes ecuaciones definen o no una circunferencia y en caso afirmativo determine su centro y radio.

- $x^2 + y^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y + 16 = 0$

Agrupando las variables,

$$x^2 - 6 \cdot x + y^2 + 4 \cdot y = -16$$

Completando cuadrados,

$$\left(x^2 - 6 \cdot x + 9\right) + \left(y^2 + 4 \cdot y + 4\right) = -16 + 9 + 4$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = -3$$

Luego, la circunferencia no existe, puesto que,

r^2 **No puede ser negativo.**

- $x^2 + y^2 + 2 \cdot x = 0$

Agrupando variables,

$$x^2 + 2 \cdot x + y^2 = 0$$

Completando cuadrados,

$$\left(x^2 + 2 \cdot x + 1\right) + y^2 = 1$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1$$

$$r^2 = 1$$

Finalmente la circunferencia existe,

Centro= (-1,0) Radio= 1

- $x^2 + y^2 - x + 6 \cdot y + 9 = 0$

Agrupando variables,

$$x^2 - x + y^2 + 6 \cdot y = -9$$

Completando cuadrados,

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + 6 \cdot y + 9\right) = -9 + \frac{1}{4} + 9$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = \frac{1}{4}$$

Así,

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Se concluye que la ecuación define una circunferencia y,

$$\text{Centro} = \left(\frac{1}{2}, -3\right) \quad \text{Radio} = \frac{1}{2}$$