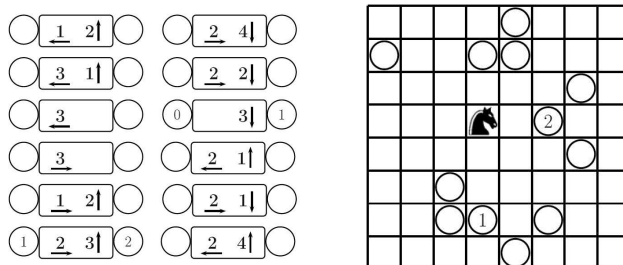


Pauta Control #1: Vectores

Problema 1.- El siguiente juego es llamado Wyx. Debe hacer saltar el caballo de uno a otro círculo del tablero una sola vez, utilizando para ello los desplazamientos indicados en cada una de las 12 fichas que se encuentran en desorden a la izquierda del tablero. El lugar de donde parte el caballo está numerado por 0, y las dos primeras etapas de su desplazamiento por 1 y 2.

- Encuentre el orden de los desplazamientos siguientes hasta la casilla 6 y dibuje los vectores desplazamiento en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Encuentre el vector resultante (suma) de estos 6 primeros desplazamientos y dibújelo también.
- ¿Sin establecer el orden de los siguientes desplazamientos, puede determinar cuál será la posición final del caballo? Encuéntrala y justifique su respuesta.



Solución Problema 1.- Todos los ítemes tienen igual puntaje: 2 puntos cada uno.

- Los primeros desplazamientos son

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La resultante de los primeros 6 desplazamientos es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El alumno debe hacer un gráfico sumando los vectores y mostrando la resultante.

- Para encontrar la posición final del caballo, se pueden sumar todos los desplazamientos como vectores:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

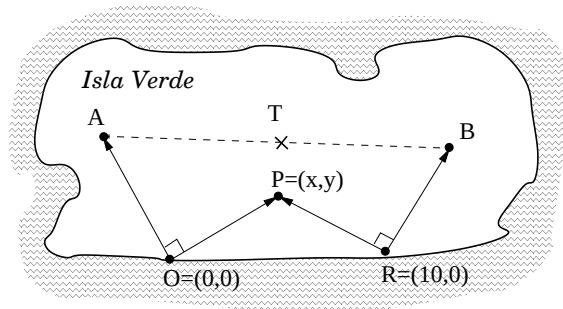
Es decir, la posición final del caballo corresponde al círculo que se encuentra casilla a la derecha y casillas hacia arriba de la posición inicial 0 del caballo.

Justificación: esto funciona pues la suma de vectores es conmutativa y asociativa, y por lo tanto el orden en que se realicen los desplazamientos no afectará el desplazamiento total.

Problema 2.- El mapa del tesoro. Un viajante encuentra en la Isla Verde frente a la bahía de Ñagué un viejo mapa que se cree pertenece al famoso pirata Lord Willow. El mapa podría esconder la localización del tesoro que el pirata escondió luego de encallar en la bahía en 1525.

Para encontrar el tesoro, mirando desde la orilla, se debe localizar primero en la playa la cueva $O=(0,0)$ que se toma como origen y la roca $R=(10,0)$, luego hay un punto al interior de la isla $P=(x,y)$ cuyas coordenadas no están indicadas en el mapa y son completamente desconocidas!

- El vector $\overrightarrow{OA}$ es perpendicular a $\overrightarrow{OP}$ y con la misma magnitud. Encuentre $\overrightarrow{OA}$ y las coordenadas del punto A en función de x e y .
- El vector $\overrightarrow{RB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{RP}$ y con la misma magnitud. Muestre que $\overrightarrow{RB} = \begin{pmatrix} y \\ 10 - x \end{pmatrix}$ y encuentre las coordenadas del punto B en función de x e y .
- El tesoro se localiza en el punto medio T entre A y B . El viajero descubrió que las coordenadas de T no dependen de la localización del punto P . Encuéntralas!



Solución Problema 2.- Todos los ítemes tienen igual puntaje: 2 puntos cada uno.

- El vector

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

es perpendicular a $\overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = x(-y) + yx = 0$$

y de la misma magnitud

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Además, como las coordenadas de P son positivas, entonces la abscisa de A es negativa y su ordenada positiva, lo que es coherente con la figura. (Hay otro vector: $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ que también es perpendicular y de la misma magnitud al vector $\overrightarrow{OP}$, pero es opuesto al vector $\overrightarrow{OA}$ de la figura).

Como el origen del sistema de coordenadas se ha escogido en O , el vector $\overrightarrow{OA}$ es el vector posición de A y por ello las coordenadas del punto A son simplemente $A = (-y, x)$ y coinciden con las componentes del vector $\overrightarrow{OA}$.

- Para calcular $\overrightarrow{RB}$ se puede por ejemplo primero calcular el vector $\overrightarrow{RP}$ como la resta de los dos vectores posición $\overrightarrow{OR}$ (final) y $\overrightarrow{OP}$ (inicial), obteniéndose:

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 10 \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, un vector perpendicular a $\overrightarrow{RP}$ como se muestra en la figura, es:

$$\overrightarrow{RB} = \begin{pmatrix} y \\ 10 - x \end{pmatrix}.$$

En efecto, son perpendiculares pues su producto punto es cero:

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RB} = \begin{pmatrix} x - 10 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 10 - x \end{pmatrix} = (x - 10)y + y(10 - x) = 0$$

y tienen los dos vectores la misma magnitud dada por:

$$\sqrt{(x - 10)^2 + y^2}.$$

Las coordenadas de B se pueden obtener calculando su vector posición $\overrightarrow{OB}$. Este a su vez, se puede escribir como la suma de los vectores $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{RB}$:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 10 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + y \\ 10 - x \end{pmatrix}.$$

De modo que resulta

$$B = (10 + y, 10 - x).$$

- Para encontrar la localización del tesoro, se calcula T como el punto medio entre A y B . O lo que es lo mismo usando vectores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 + y \\ 10 - x \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y + 10 + y \\ x + 10 - x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de modo que

$$T = (5, 5).$$

Esto es, las coordenadas del tesoro de Lord Willow que no dependen de las coordenadas (x, y) del punto P desconocido!

Notas:

1. Cualquier otro argumento deductivo utilizando vectores es válido y tiene todo el puntaje.
2. Algunos alumnos pueden haber encontrado gráficamente que $T = (5, 5)$ sin un argumento deductivo. Esta es solamente una solución aproximada del problema y para un caso particular de (x, y) . En este caso se tiene un puntaje máximo de 2.0 de 6.0. Si además el alumno verificó gráficamente para varios casos el puntaje máximo es 2.5.