

P2 $O_1 = (0,0)$ $R = (10,0)$ $P = (x,y)$

(a) $\vec{OA} \perp \vec{OP}$ $\wedge$ $\|\vec{OA}\| = \|\vec{OP}\|$

Sea $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ Luego por perpendicularidad $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = 0$

$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ $a_1 x + a_2 y = 0$
 $a_1 x = -a_2 y$

$a_1 = -\frac{y}{x} a_2$ (1) 0,5

Con el dato del módulo: $\|\vec{OA}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ $\|\vec{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\|\vec{OA}\| = \|\vec{OP}\|$

$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ $|()^2$

$a_1^2 + a_2^2 = x^2 + y^2$ (2) 0,5

$a_2^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2} = x^2 + y^2$

$a_2^2 = (x^2 + y^2) \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

$a_2^2 = x^2$

$a_2 = x$ (3)

Luego

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

1.0

Reemplazando (1) en (2)

$\left(-\frac{y}{x} a_2\right)^2 + a_2^2 = x^2 + y^2$

$a_2^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = x^2 + y^2$

Usando (3) en (1)

$a_1 = -\frac{y}{x} \cdot x$

$a_1 = -y$

$$(b) \vec{RB} \perp \vec{RP} \quad \|\vec{RB}\| = \|\vec{RP}\|$$

Mostrar que $\vec{RB} = \begin{pmatrix} y \\ 10-x \end{pmatrix}$

Por los datos $\vec{RP} = \vec{OP} - \vec{OR} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} x-10 \\ y \end{pmatrix}} = \vec{RP}$

→ Si $\vec{RP} \perp \vec{RB}$, entonces $\vec{RP} \cdot \vec{RB} = 0$

Tomando ambos vectores; $\vec{RP} \cdot \vec{RB} = \begin{pmatrix} x-10 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 10-x \end{pmatrix}$

$$= y(x-10) + y(10-x)$$

$$= y(x-10) - y(x-10)$$

$$= 0 \quad 0,5$$

Como el producto punto de los vectores es 0, estos son $\perp$

$$\begin{aligned} \rightarrow \|\vec{RP}\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} x-10 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-10 \\ y \end{pmatrix}} = \sqrt{(x-10)^2 + y^2} \\ \|\vec{RB}\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} y \\ 10-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 10-x \end{pmatrix}} = \sqrt{y^2 + (10-x)^2} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Ambos módulos son} \\ \text{iguales} \end{array} \right\} \text{Luego } \|\vec{RB}\| = \|\vec{RP}\|$$

0,5

Como se cumplen ambas condiciones para el vector dado, se comprueba que

$$\vec{RB} = \begin{pmatrix} y \\ 10-x \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

$$\vec{RB} = \vec{OB} - \vec{OR} \Rightarrow \vec{OB} = \vec{RB} + \vec{OR}$$

$$= \begin{pmatrix} y \\ 10-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+y \\ 10-x \end{pmatrix} = \vec{OB}$$

Así $\boxed{B = (10+y, 10-x)}$ 1.0

(c) Tesoro ubicado entre A y B, en el punto medio T

$$A = (-y, x) \quad B = (10+y, 10-x)$$

$$T = \left(\frac{-y + (10+y)}{2}, \frac{x + (10-x)}{2} \right) \quad \leftarrow \text{Se calcula el punto medio.} \quad 1.0$$

$$= \left(\frac{-\cancel{y} + 10 + \cancel{y}}{2}, \frac{\cancel{x} + 10 - \cancel{x}}{2} \right)$$

$$= (5, 5)$$

Finalmente el tesoro se ubica en $T = (5, 5)$ 1.0

Nota: En las primeras dos partes del problema también se considera válido que cuando dos vectores son

- perpendiculares
- de igual módulo

Están de la forma $\vec{a} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ $\vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -j \\ i \end{pmatrix}$