

Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile

Escuela de Verano 2009

Matemáticas III

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliares: Roberto Castillo, Benjamín Obando

Guía de Problemas N° 1*

P1.- Sean p , q y r proposiciones. Demostrar con y sin tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologías:

- (i) $p \Rightarrow (p \vee q)$
- (ii) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
- (iii) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
- (iv) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- (v) $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$
- (vi) $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \sim p$
- (vii) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
- (viii) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- (ix) $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \sim p$
- (x) $(p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$
- (xi) $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q)$
- (xii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$

P2.- Sean p y q proposiciones. Se define la proposición $p \downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- (i) Probar que $\sim p \Leftrightarrow (p \downarrow p)$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \downarrow q)$.
- (ii) Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \wedge p$ usando sólo $\downarrow$ y $\sim$.

*Esta guía fue extraída del material de apoyo confeccionada por el Departamento de Ingeniería Matemática para el curso de Álgebra dictado en Plan Común.

P3.- Sean p y q proposiciones. Definamos la proposición,

$$(p \vdash q) \Leftrightarrow (\text{Existe una proposición } r \text{ tal que } (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)).$$

Pruebe que $p \vdash q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$.

P4.- Sean p, q, r tres proposiciones tales que r es falsa, $(p \Leftrightarrow \sim q)$ es verdadera y $(q \Rightarrow r)$ es verdadera. Deduzca el valor de verdad de p .

P5.- Sean p, r, r proposiciones.

- (i) Construya la proposición lógica que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones p, q, r es verdadera. Entregue una forma reducida de la proposición.
- (ii) Compare la proposición obtenida en el punto anterior con la proposición $(p \vee q) \vee r$, donde

$$p \vee q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q).$$

P6.- (i) Sean p, q, r proposiciones. Construir la proposición compuesta “ s ” (en función de p, q, r) cuya tabla de verdad es:

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

- (ii) Probar que $s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ es una tautología.

P7.- Negar las siguientes proposiciones:

- (i) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x < y$
- (ii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x \geq y$
- (iii) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x > 1 \wedge y \leq 1$
- (iv) $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) |a_n| < \epsilon$

P8.- (i) Negar la proposición siguiente:

$$(\forall x \in \mathbb{Q})(\forall \epsilon > 0)(\exists y \in \mathbb{Q}^c) \epsilon/3 < |x - y| < \epsilon/2.$$

- (ii) Indique el valor de verdad de las proposiciones cuantificadas siguientes:

- (a) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{N}) \quad n(x^2 - mx) \leq 0.$
(b) $(\forall x \in A)(\exists \delta > 0) \quad x^2 > \delta$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 10\}.$

P9.- Sean las proposiciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ tales que $[(p_1 \vee p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_4)]$ es falsa. Determinar el valor de verdad de:

- (i) $(p_5 \Rightarrow p_6) \vee (p_1 \vee p_2)$
(ii) $[(p_5 \Rightarrow p_2) \vee \sim p_1] \Rightarrow (p_4 \vee p_3)$
(iii) $\sim [(p_6 \vee p_5) \wedge (p_1 \wedge p_2)] \Leftrightarrow (p_4 \Rightarrow p_3)$

P10.- Sea S un conjunto de números reales. Se dice que x es un punto aislado de S si existe un número real positivo d tal que para todo punto $y \in S$ la distancia entre x e y es mayor o igual que d .

- (i) Escribir la definición de punto aislado usando cuantificadores.
(ii) Demostrar que si $x \in S$ entonces x no es punto aislado de S .
(iii) Sea $S = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$. Probar que el origen no es un punto aislado de S .

P11.- (a) Si q y r son proposiciones no equivalentes. Determine el valor de verdad de la proposición:

$$[\sim (q \vee r) \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\sim s \vee q)]$$

- (b) Si la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa. Cual es el valor de verdad de la proposición $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q$.
(c) Considere el conjunto $A = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (justifique):

- (i) $(\forall x, y \in A) \quad (x + y \leq 1)$
(ii) $(\forall x \in A)(\exists y \in A) \quad (x^2 \leq y)$

Escriba la negación de las proposiciones anteriores.

P12.- (i) Sean p, q y r proposiciones tales que $((\sim p \vee q) \Rightarrow r)$ es falsa. Entregar el valor de verdad de las siguientes proposiciones (justifique su respuesta):

- (a) $\sim q \Rightarrow \sim p$
(b) $r \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim (q \vee r))$

(ii) Sean p, q y r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s))$$

P13.- (a) Sean p, q, r proposiciones. Determinar si la equivalencia $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q$ puede ser verdadera sin que lo sea la implicancia $p \Rightarrow q$.

(b) Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)).$$

(c) Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow \bar{r}).$$

P14.- Los luctuosos hechos acaecidos en la mansión Ω han conducido a la brigada de homicidios a detener a 3 sicarios sospechosos del deleznable crimen. Para no enlodar a las inocentes familias de los susodichos, en lo que sigue nos referiremos a ellos como S_1 , S_2 y S_3 .

Durante el interrogatorio, las declaraciones de los sospechosos fueron las siguientes:

S_1 : “ S_2 es culpable y S_3 es inocente.”

S_2 : “Si S_1 es culpable, entonces S_3 también es culpable.”

S_3 : “Yo soy inocente, pero alguno de los otros dos es culpable.”

Suponiendo que los inocentes dijeron la verdad y los culpables mintieron, determine quienes son los culpables. (Justifique matemáticamente su respuesta).

P15.- Se define el conectivo $*$ de la siguiente manera:

$p * q$ es verdadera si y sólo si ambas p y q son falsas

(a) Pruebe usando tablas de verdad que:

$$p * q \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim (p \wedge q)]$$

(b) Demuestre **sin** tablas de verdad que las siguientes son tautologías:

i) $\sim p \Leftrightarrow p * p$

ii) $p \vee q \Leftrightarrow (p * q) * (p * q)$

P16.- Se tiene un mazo de naipes, los cuales por una cara tienen letras, y por la otra cara, números. Se hace la siguiente afirmación:

P : “Si un naipe tiene un dos por un lado, entonces tiene una B por el otro”

Se colocan cuatro de estos naipes sobre la mesa, de los cuales se ve un sólo lado:

1	2	A	B
---	---	---	---

¿Qué naipe(s) hay que dar vuelta y cuál(es) no es(son) necesario(s) dar vuelta para determinar si P es Verdadera para estos 4 naipes? Fundamente matemáticamente su respuesta.

- P17.-** (i) Sean p, q y r proposiciones lógicas. Demuestre **sin** usar tabla de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

- (ii) Muestre que la siguiente proposición es verdadera

$$(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \Rightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$$

para $p(x)$ y $q(x)$ proposiciones abiertas cualquiera.
Además, dé un caso donde

$$(\forall x)(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$$

es **falsa**.

- P18.-** Una mamá le dice a su querido hijo: “Si te portas bien, te regalo un dulce, **o bien**, si no te portas bien, te regalo un dulce”.

Suponiendo que la mamá le dijo la verdad a su hijo, ¿se puede saber si el hijo recibirá el dulce o no? Justifique. Se espera que resuelva este problema en las dos situaciones distintas siguientes:

- El “o bien” de la frase de la mamá es el “o” usual “ $\vee$ ”.
- El “o bien” es el “o” exclusivo “ $\underline{\vee}$ ”.

- P19.-** (i) Sean p, q, r proposiciones lógicas. Demuestre **sin** usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\sim (q \wedge r) \Rightarrow \sim (p \wedge r)]$$

- (ii) Sean p, q proposiciones abiertas. Se definen las proposiciones lógicas r y s por:

$$\begin{aligned} r &: (\forall x)(\exists y)(p(x, y) \Rightarrow q(y)) \\ s &: ((\forall x)(\forall y)p(x, y)) \Rightarrow ((\exists y)q(y)) \end{aligned}$$

Escriba la negación de la proposición r y de la proposición s .

Observación: Dé su respuesta final de la forma más simplificada posible, esto es, que su expresión final sólo quede en función de los conectivos $\wedge, \vee$ y negaciones. (*No* deben aparecer los conectivos $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ ni $\underline{\vee}$).

- P20.-** Usted es nombrado repartidor de bienes de un testamento pero hay confusión acerca de donde se encuentran las cosas que deben ser repartidas. Los bienes son: un piano, un auto y un retrato.

Las declaraciones de los 3 herederos son:

Andrés: Carlos tiene el piano, Bonifacio el auto pero yo tengo el retrato.

Bonifacio: Si Andrés tiene el retrato, Carlos tiene el piano.

Carlos: Yo no recuerdo bien, pero estoy seguro de que, o Bonifacio tiene el auto y yo el piano, o Andrés tiene el retrato y yo el piano, o Andrés tenía el retrato y Bonifacio el auto.

- (i) Si Carlos no miente y además usted cree que los otros sí lo hacen ¿qué se puede decir de quién tiene los objetos?
- (ii) Si usted sabe que sólo uno miente ¿quién se queda con el piano? ¿Quién miente?

P21.- Sean A, B, C conjuntos. Emplear los teoremas del álgebra de conjuntos para probar que:

- (i) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
- (ii) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$
- (iii) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
- (iv) $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$
- (v) $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Leftrightarrow A = \emptyset$
- (vi) $(A \cap B \cap C = \emptyset) \Rightarrow [(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup B \cup C]$
- (vii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
- (viii) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$
- (ix) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$
- (x) $(A \cup B = A \cap C) \Rightarrow (B \subseteq A \wedge A \subseteq C)$
- (xi) $(A \cap C = \emptyset) \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
- (xii) $A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$
- (xiii) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \cup (A \Delta C)$

P22.- Sea A un subconjunto fijo del conjunto U . Probar que para todo par de subconjuntos X, Y de U se tiene,

$$X = Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A \wedge X \cap A = Y \cap A.$$

P23.- Sea B un subconjunto del conjunto U . Pruebe que,

$$[(\forall A \subseteq U)(A \cup B = A)] \Rightarrow B = \emptyset.$$

P24.- Sean $A \subset U$ dos conjuntos. Colocar el signo de inclusión, igualdad o ninguno de ellos según corresponda entre los conjuntos siguientes:

- (i) $\mathcal{P}(A \cup B)$ y $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

- (ii) $\mathcal{P}(A \cap B)$ y $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- (iii) $\mathcal{P}(U \setminus A)$ y $\mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{P}(A)$

P25.- Dar los elementos del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

P26.- Sean A, B, C conjuntos.

- (i) Suponga que las siguientes proposiciones son verdaderas:

$$\begin{aligned}(x \in A \wedge y \in B) &\Rightarrow y \in A \\ (x \notin A \vee y \in A) &\Rightarrow y \notin B.\end{aligned}$$

Probar que $y \notin B$ es verdadera.

- (ii) Probar que $C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap C = C \setminus B$.
- (ii) Probar que $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$.

P27.- Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea $M = \{X \in \mathcal{P}(E) / A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:

- (i) $\emptyset \in M$ y $E \setminus A \in M$.
- (ii) $A \in M \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow M = \mathcal{P}(E)$.
- (iii) $(\forall X \in M)(\forall Y \in \mathcal{P}(E)) X \cap Y \in M$.
- (iv) $[(X \in M) \wedge (Y \in M)] \Rightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$.

P28.- Un conjunto $M \subseteq \mathcal{P}(E)$ se llama *Álgebra* de las partes de E si verifica las siguientes propiedades:

- (i) $E \in M$
- (ii) $(\forall A, B \in M) A \cup B \in M$
- (ii) $(\forall A \in M) A^c \in M$

Se pide:

- (a) Demostrar que $\emptyset \in M$
- (b) Demostrar que $(\forall A, B \in M) A \cap B \in M$
- (c) Demostrar que $(\forall A, B \in M) A \Delta B \in M$
- (d) Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, determinar si

$$M = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$$

es un *Álgebra*. Si no lo es, agregar el menor número de conjuntos para que lo sea.

P29.- Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$. Demuestre que:

$$a) (A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

$$b) (A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$$

Dé un ejemplo que muestre que la otra inclusión no es siempre verdadera.

$$c) (E \times F) \setminus (A \times C) = ((E \setminus A) \times F) \cup (E \times (F \setminus C))$$

P30.- (i) Sean A, B, C, X subconjuntos de U (conjunto universo), tales que cumplen:

$$A \cup X = B$$

$$A \cap X = C.$$

Encuentre X en términos de A, B y C .

(ii) Sean A, B y C subconjuntos de U (conjunto universo), Pruebe que:

$$A \Delta [(B \setminus C) \cup (C \setminus A)] = C \cup (A \Delta B)$$

P31.- Sean A, B, C subconjuntos de U (conjunto universo). Demuestre que:

$$(i) A \Delta A = \emptyset$$

$$(ii) A \Delta \emptyset = A$$

(iii) Utilizando lo anterior, demuestre que:

$$A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$$

Indicación: Recuerde que Δ cumple las propiedades de conmutatividad y asociatividad.

P32.- Sean A, B en el universo U . Demuestre que:

$$i) (A \cup B \subseteq A \cap B) \Rightarrow A = B$$

$$ii) A \subseteq A^c \Leftrightarrow A = \phi$$