

:: CONTINUIDAD ::

Función continua

Una *función* f es *continua* en un punto x_0 cuando existe el límite de la función en x_0 y coincide con el valor que toma la función en x_0 .

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Para que una función sea continua en x_0 , se tienen que cumplir tres condiciones:

1. Existir el límite de la función cuando $x \rightarrow x_0$.
2. Estar definida la función en x_0 , es decir, existir $f(x_0)$.
3. Los dos valores anteriores han de coincidir: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Si alguna de las tres condiciones no se cumple, la función es *discontinua* en x_0 .

Se dice que una *función* es *continua en un intervalo* cuando es continua en todos los puntos del intervalo.

Ejercicio: estudio de la discontinuidad de una función

1) Probar que la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 3 \\ -1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

es discontinua en el punto $x_0 = 3$.

Resolución:

Para probar la discontinuidad de la función en $x_0 = 3$ hay que ver cuál de la tres condiciones de continuidad no se cumple.

En este caso es la primera, ya que no existe el límite de la función cuando x tiende a 3; los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$$
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

Por lo tanto, la función es discontinua en $x_0 = 3$.

2) Probar que la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 3 \\ x - 2, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

es discontinua en el punto $x_0 = 3$.

Resolución:

- En este caso existe el límite de la función cuando x tiende a 3, y es 1; los dos límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = 3 - 2 = 1$$

- Sin embargo, la función no está definida en $x_0 = 3$; no existe $f(3)$.

Por tanto, la función es discontinua en $x_0 = 3$.

3) ¿Es la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \neq 2 \\ 5, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ discontinua en el punto $x_0 = 2$?

Resolución:

- Existe el límite de la función cuando x tiende a 2, ya que los dos límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 - 1 = 3$$

- La función está definida para $x = 2$ y vale 5: $f(2) = 5$.

- Sin embargo, el valor del límite de la función cuando $x \rightarrow 2$ no coincide con $f(2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \neq f(2) = 5$$

Por tanto, la función es discontinua en $x_0 = 2$.

OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

Suma

La suma de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Demostración:

Sean f y g dos funciones continuas en un punto x_0 . Esto significa que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Para probar que la función suma $f + g$ es una función continua en x_0 , es necesario demostrar que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$

Aplicando una de las propiedades de los límites de funciones,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$$

La demostración es válida para una suma de n funciones continuas en x_0 .

Resta

La resta de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Esta demostración, como las que siguen, se hacen de forma similar a la anterior, basándose en las propiedades de los límites de funciones.

Producto

El producto de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Producto de una función por un número

El producto de una función continua en un punto, por un número real, es otra función continua en ese punto.

Cociente

El cociente de dos funciones continuas en un punto es otra función continua en ese punto. (Siempre que el denominador no se anule).

Composición de funciones

Si f es una función continua en x_0 y g es otra función continua en $f(x_0)$, la función compuesta $g \circ f$ es continua en el punto x_0 .

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Si una función es continua en un punto x_0 , entonces es convergente en x_0 , es decir, existe el límite de la función cuando x tiende a x_0 .

Si $f(x)$ es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$