

:: LIMITE DE UNA FUNCION ::

Idea intuitiva de límite de una función en un punto

El *límite de una función* $y = f(x)$ en un punto x_0 es el valor al que tiende la función en puntos muy próximos a x_0 .

Idea intuitiva de límite

1. Considérese la función lineal $y = 2x + 1$. ¿A qué valor se aproxima la función, cuando x se aproxima al valor 3?

Resolución:

- Si se quiere estudiar el límite de esta función cuando x tiende a 3, hay que ver los valores que toma la función en puntos muy próximos a 3.

Para ello se puede hacer la siguiente tabla de valores:

- Se observa que al tomar valores de x muy próximos a 3, ya sean mayores o menores que él, sus imágenes se aproximan al valor 7. Cuanto mayor es la proximidad de x a 3, mayor es la proximidad de $f(x)$ a 7.

Esto se expresa diciendo que, cuando x tiende a 3, el límite de la función $y = 2x + 1$ es 7, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$$

LIMITES LATERALES

- El *límite por la izquierda* de una función $y = f(x)$, cuando $x \rightarrow x_0$, es el valor al que tiende la función para puntos muy próximos a x_0 y menores que x_0 .

Para expresar el límite por izquierda se escribe $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

- El *límite por la derecha* de una función $y = f(x)$, cuando $x \rightarrow x_0$, es el valor al que tiende la función para puntos muy próximos a x_0 y mayores que x_0 .

Para expresar el límite por derecha se escribe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Relación entre el límite y los límites laterales de una función

El límite de una función $y = f(x)$ en un punto x_0 existe si y solo si existen los límites laterales y coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Si se verifica esto, y l es un número finito, se dice que la función es *convergente*.

En el ejemplo anterior los límites por la derecha y por la izquierda coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 1) = 7$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE FUNCIONES

Si una función $f(x)$ tiene límite cuando $x \rightarrow x_0$, el límite es único.

Esto se puede escribir también así:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l' \Rightarrow l = l'$$

Ejercicio: cálculo aproximado de límites

Sea la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq 2 \\ 7, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

¿Cuál es su límite cuando x tiende a 2?

Resolución:

Para calcular el límite de la función cuando x tiende a 2, puede hacerse una tabla de valores para puntos de abscisa próximos a 2:

Se observa que cuando x tiende a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, la función tiende al valor 4. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 3 \\ x - 2, & \text{si } x > 3 \end{cases}$ definida en $\mathbb{R} - \{3\}$

¿A qué valor se aproxima la función cuando x se aproxima a 3?

Resolución:

Cuando x se aproxima a 3, tanto por la izquierda como por la derecha, la función se aproxima al valor 1. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$$

Obsérvese cómo se pone de relieve que el valor del límite de una función en un punto es independiente del valor que la función tome en ese punto.

En este ejemplo, el límite de la función en el punto 3 es 1 y sin embargo, la función ni siquiera está definida en él.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1. Se dice que una función $f(x)$ converge, en el punto x_0 , hacia el valor l , o que su límite en x_0 es l , y se escribe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, cuando a valores muy próximos a x_0 corresponden valores de la función muy próximos a l .

La definición anterior se puede concretar más:

2. Una función $f(x)$ converge hacia l en x_0 , o tiene por límite l en x_0 , cuando para todo entorno de l de radio ε , $E(l, \varepsilon) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, hay un entorno de x_0 de radio δ , $E(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tal que para cualquier x de $E(x_0, \delta)$, su imagen $f(x)$ está en $E(l, \varepsilon)$.

O bien:

3. Una función $f(x)$ converge hacia l en x_0 , o tiene por límite l en x_0 , cuando para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Límites infinitos

Una función es *divergente* cuando su límite es $+\infty$ ó $-\infty$.

Se estudiarán los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Caso 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Sea la función $f(x) = 1/x^2$.

Para calcular el límite de esta función en el punto $x_0 = 0$, hay que estudiar los valores que toman las imágenes de puntos próximos a 0. De la observación de la gráfica de la función se deduce que:

Para valores próximos a 0 y menores que 0, la función toma valores cada vez mayores. Esto significa que $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x^2 = +\infty$

Para valores próximos a 0 y mayores que 0, la función toma valores cada vez mayores. Esto significa que $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x^2 = +\infty$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x^2 = +\infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = +\infty$

En el caso de la función $g(x) = -1/x^2$, el límite de la función cuando $x \rightarrow 0$ es $-\infty$.

Para valores próximos a 0 y distintos de 0, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores que toma la función son cada vez menores.

Caso 2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$

Sea la función $y = x/(x-1)$.

Observando la gráfica de la función, se ve como a medida que x toma valores cada vez mayores, la función se aproxima más a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando x tiende a infinito es 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x/(x-1) = 1$$

De la observación de la gráfica se deduce que a medida que x toma valores cada vez menores, la función se aproxima más a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$ es también 1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x/(x-1) = 1$$

Caso 3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Sea la función $f(x) = x + 5$.

Observando la gráfica se ve claramente que cuando x tiende a más infinito, la función también tiende a más infinito. Es decir, a valores cada vez mayores de x , corresponden valores cada vez mayores de la función. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 5) = +\infty$$

Cuando x toma valores cada vez menores, la función también toma valores cada vez menores. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 5) = -\infty$$

Si se estudian los límites en el infinito de $g(x) = -(x + 5)$, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -(x + 5) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -(x + 5) = +\infty$$

Es decir, cuando x toma valores cada vez mayores, $x \rightarrow +\infty$, la función toma valores cada vez menores, $g(x) \rightarrow -\infty$.

Y cuando x toma valores cada vez menores, $x \rightarrow +\infty$, la función toma valores cada vez mayores, $g(x) \rightarrow +\infty$.

OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones tales que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$

Límite de una suma de funciones

El límite de una suma de dos funciones convergentes, es igual a la suma de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A + B$$

Límite de una resta de funciones

El límite de una resta de dos funciones convergentes, es igual a la diferencia de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A - B$$

Límite de un producto de funciones

El límite de un producto de dos funciones convergentes, es igual al producto de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

Límite de un cociente de funciones

El límite de un cociente de dos funciones convergentes es igual al cociente de los límites de cada una de ellas, si el denominador no es nulo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A/B \text{ (siempre que } B \neq 0)$$

Ejercicio: límites de suma, resta, producto y cociente de funciones

Si $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = 1/x$; calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f + g)(x), \lim_{x \rightarrow 3} (f - g)(x), \lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3} (f/g)(x)$$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= 2^2 + 2 = 11 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1/3 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 11 + 1/3 = 34/3 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (f - g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 11 - 1/3 = 32/3 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 11 \cdot (1/3) = 11/3 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (f/g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) / \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 11/(1/3) = 33 \end{aligned}$$