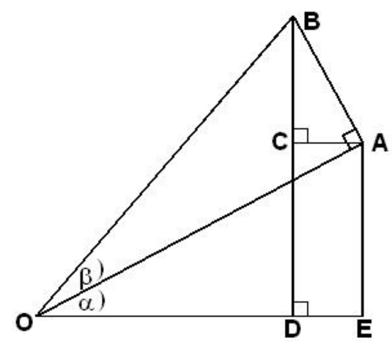
Tarea 2

Fecha de entrega: 07/01/2009

Problema 1



a.- A partir de la siguiente figura muestre que:

sen(α+β) = senα cosβ + cosα senβ

cos(α+β) = cosα cosβ - senα senβ

Los ángulos OAB, ACB, ODB y OEA son rectos.

b.- Demostrar que para n suficientemente grande se cumple que:

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\to\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Hint: Pueden resultarle útiles las identidades encontradas en la parte (a)

Problema 2

a.- El siguiente problema tiene como objetivo introducir la noción de límite de una función. Complete las siguientes tablas con ayuda de una calculadora o del computador (e.g. usando Excel):

x	*sen x*	*(sen x)/x*	*ε = 1 - (sen x)/x*	*ε /x*
1				
10^{-1}				
10^{-2}				
10^{-3}				
10^{-4}				

x	*cos x*	*(cos x)/x*	*ε = (1 - cos x)/x*	*ε /x*
1				
10^{-1}				
10^{-2}				
10^{-3}				
10^{-4}				

Usando los resultados entregue un sentido a las expresiones:

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin\delta}{\delta} &= 1\\ \lim_{\delta\to 0}\frac{1-\cos\delta}{\delta} &= 0.\end{aligned}$$

Demuestre que en general, partiendo de la relación *sen x* $<$ *x*, las siguientes desigualdades son siempre válidas:

$$\begin{aligned}\cos\theta &> 1-\frac{\theta^2}{2}\\ \sin\theta &> \theta-\frac{\theta^3}{4}\end{aligned}$$

Úselas para verificar analíticamente los límites encontrados.

b.- Complete la siguiente tabla con ayuda de un computador de modo de encontrar el límite cuando δ tiende a cero, y compare este resultado con el valor de cos x. Escoja x como 12 grados más el valor de su número en la lista del curso multiplicado por 3 (grados sexagesimales):

δ	$\dfrac{[sen(x+\delta) - sen\ x]}{\delta}$	$\varepsilon = \dfrac{[sen(x+\delta) - sen\ x]}{\delta} - \cos x$
10^{-1}		
10^{-2}		
10^{-3}		
10^{-4}		
10^{-5}		
10^{-6}		

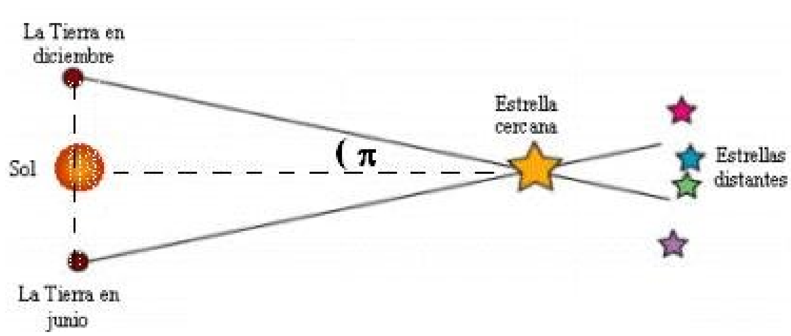
Observando su tabla, a qué tiende el siguiente límite:

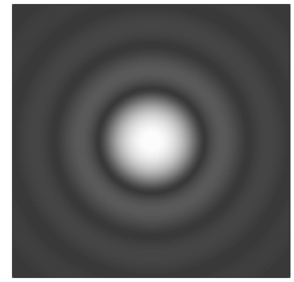
$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{[sen(x+\delta) - sen\ x]}{\delta}$$

Compare sus resultados con los de sus compañeros y úselos para graficar f'(x) en función de x para el δ más pequeño. ¿Qué función obtiene?

Problema 3

Un grupo de astrónomos desea medir la distancia a otras estrellas utilizando la técnica del paralaje. El paralaje es la desviación angular de la posición aparente de un objeto con respecto de un fondo distante al ser observado desde distintos puntos. Para esto se observa la posición de la estrella (de la que se busca determinar la distancia) con respecto al fondo de estrellas lejanas (fondo de estrellas fijas) en dos instantes con una separación de seis meses.
Los astrónomos desean saber cuál es la máxima distancia que puede determinarse dada la resolución angular de sus telescopios y conociendo el tamaño de la órbita de la Tierra.





Este límite a la resolución angular se debe a que una estrella, pese a que puede considerarse como un objeto puntual, al pasar su luz por el sistema óptico, crea un patrón anular característico llamado “Disco de Airy”. Si dos estrellas poseen una separación angular demasiado pequeña, sus discos de Airy pueden superponerse haciendo imposible determinar si se trata de una o de dos estrellas, es decir, la imagen no se puede resolver.

Para determinar la resolución angular θ (el mínimo ángulo detectable), los astrónomos disponen de la fórmula del límite de difracción de Rayleigh:

$$\sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

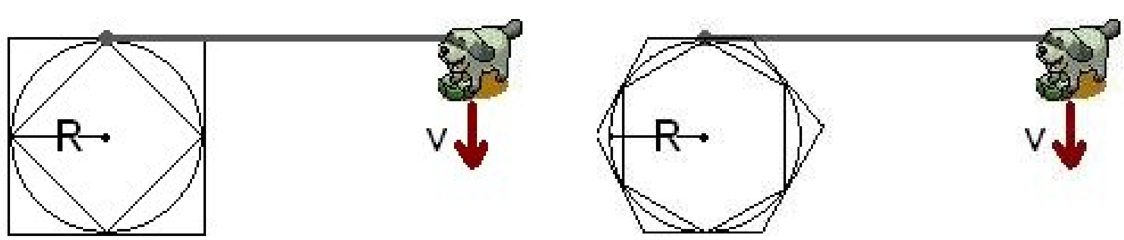
que proviene de un cálculo de la posición del primer anillo de oscuridad que rodea al disco de Airy central. En la fórmula λ es la longitud de onda y D el diámetro del sistema óptico.

a.- Averigüe la longitud de onda típica de la luz visible (λ) y el diámetro de la pupila humana y el diámetro del telescopio más grande que existe hasta el momento (D). Use esto en la fórmula de Rayleigh y encuentre la resolución angular en cada caso.

b.- Encuentre una expresión para encontrar la distancia *d* a una estrella a través del paralaje. Con los datos averiguados en la parte (a) encuentre la distancia máxima que puede detectarse por paralaje a ojo desnudo y con el mejor telescopio del que se puede disponer en este momento.

Problema 4

Una familia deja amarrado a su inquieto perrito a un árbol de tronco circular de radio R con una cuerda de largo L. El perrito comienza a correr con rapidez constante v, manteniendo siempre la cuerda tensa, la que se enrolla al tronco del árbol. ¿Cuánto tardará el perrito en chocar contra el árbol?
Dada la complejidad del problema, se le pide que encuentre una solución aproximada, modelando el tronco circular por polígonos regulares inscritos y circunscritos.
Resuelva para cuadrados, hexágonos y para algún polígono regular que usted elija. Por simplicidad considere la cuerda de modo que alcanza a enrollarse en un ángulo π en tormo al árbol.



¿Qué pasará si los lados del polígono son muchos, digamos n lados, con n tendiendo a infinito? ¿qué esperaría que pase? . Compare con los resultados que obtuvo.

-oOo-