FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión January 2, 2009

Contents

V RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA 3

V.1 Introducción 3

V.2 Paradigma previo a la relatividad especial 4

V.2.1 El Principio de Relatividad de Galileo 5

V.2.2 Las Ecuaciones de Maxwell 6

V.3 Diagramas Espacio–Tiempo 9

V.4 Postulados de la Relatividad Especial 12

V.5 Simultaneidad 18

V.5.1 Simultaneidad Absoluta (La velocidad de la luz es infinita) 18

V.5.2 Simultaneidad relativa (La velocidad de la luz es finita) 20

V.6 Transformaciones de Lorentz: Método Analítico. 24

V.6.1 Transformaciones de Lorentz 24

V.7 Geometría de las Transformaciones de Lorentz 29

V.7.1 El Efecto Doppler Relativista 29

V.7.2 El Efecto Doppler 30

V.7.3 Dilatación del Tiempo 35

V.7.4 La contracción del largo de una barra 37

V.7.5 El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein 39

V.7.6 El tiempo transcurrido depende de la trayectoria 43

V.7.7 Las transformaciones de Lorentz. 45

V.8 El retorno de lo absoluto, los invariantes. 47

V.9 Composición de velocidades 48

V.9.1 Velocidades paralelas. 48

Chapter V

RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA

V.1 Introducción

La relatividad especial, de acuerdo a Sir E. Whittaker [1], fue introducida por H. Poincaré, H. A. Lorentz, G. F. FitzGerald, y puesta en su forma final por A. Einstein en 1905.

Las ecuaciones de la relatividad especial, ciertamente fueron introducidas por Lorentz, pero Einstein las reinventó y les dió una interpretación física con el sello de su genialidad que resolvió uno de los dilemas más importantes de esa época. La interpretación propuesta por Lorentz, por otra parte, no encontró respaldo experimental.

La idea de la existencia de un sistema de referencia universal, en reposo absoluto y con un tiempo absoluto, dominaba el pensamiento de esa época. El éter se identificaba con el sistema de referencia en reposo absoluto.

En el libro citado, Whittaker describe el ingenio y los esfuerzos desplegados para determinar el movimiento de la tierra con respecto al éter, el movimiento absoluto. Mencionaremos sólo la idea de Fitzgerald (pág. 29, [1]) de medir el desplazamiento de la tierra con respecto al éter a través de la fuerza entre las dos placas paralelas de un condensador. El experimento, ciertamente, falló, como todos los otros que fueron diseñados para determinar el movimiento absoluto.

Poincaré, ante el fracaso de estos experimentos afirmó en 1899: *Considero como muy probable que los fenómenos ópticos dependen sólo de los movimientos relativos entre los cuerpos materiales....* Al año siguiente proclamaba su creencia en una nueva ley, semejante a la segunda ley de la termodinámica, que estableciera la imposibilidad de medir la velocidad de la tierra con respecto al éter. Finalmente, de acuerdo a Whittaker, en 1904 Poincaré sostenía que las leyes físicas debían ser las mismas para todos los observadores en movimiento relativo uniforme de traslación. Concluía que debería existir una nueva dinámica en la cual la velocidad de la luz es un límite superior.

La genialidad de Einstein consistió en abandonar la idea de un espacio y un tiempo absoluto, independientes y establecer una unidad espacio-tiempo, construido por cada observador inercial en base a un cierto protocolo claramente establecido y válido en cada sistema inercial. El espacio-tiempo constituye una especie de andamiaje que acompaña a cada observador inercial. Las mediciones de longitud de una vara o la duración de un cierto fenómeno son propias y únicas del observador inercial que realiza las mediciones.

Einstein estableció como un principio la velocidad de la luz es la misma para cualquier sistema de referencia inercial. La velocidad de la luz es así una constante universal.

Este principio genera dos consecuencias inmediatas. La simultaneidad de dos eventos[1] es relativa: es válida únicamente para el observador inercial que así lo estableció. Esto marca una primera diferencia con las teorías previas y el sentido común. No es fácil aceptar que dos eventos que ocurren simultáneamente, por ejemplo, para una persona en la estación del metro, no lo sean para un pasajero que viaja en el metro.

Otra consecuencia de este postulado es que relojes idénticos instalados en dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo, no pueden ser sincronizados. Uno de ellos siempre se adelanta con respecto al otro.

Estos resultados están muy lejos del acontecer diario debido a que la velocidad de la luz es muchísimo más rápida que cualquier otra velocidad ($v/c << 1$).

Una breve referencia a la vida de Einstein aparece en el documento escrito por J. A. Wheeler, quien conoció y trabajo con Einstein en sus años en Princeton[2].

V.2 Paradigma previo a la relatividad especial

La experimentación en el campo de la relatividad se dificulta debido a la magnitud de la velocidad de la luz, ≈ 300.000 km/s. Por esta razón, los *experimentos pensados* formaron la base de los ejemplos utilizados para ilustrar las consecuencias de la relatividad especial. El parámetro que caracteriza la relatividad especial es v/c.

Esta teoría se caracteriza por ser muy cuidadosa en explicitar los protocolos de las mediciones, particularmente el largo y los tiempos.

Si la velocidad de la luz se postula como una constante universal, el procedimiento de medición debe utilizar la velocidad de la luz. Por ejemplo, el largo de una barra se puede medir enviando un pulso de luz desde un extremo de forma que rebote en el otro extremo y vuelva al punto original. El tiempo empleado multiplicada por la velocidad de la luz nos da el largo de la barra: $L = \Delta t\, c/2$. Esta expresión y procedimiento es válida en cualquier sistema de referencia inercial.

[1] Un evento es un punto en espacio-tiempo, por ejemplo: el golpe en una mesa, el encendido de una luz, tocarse dos dedos...,etc.

[2] www.escuela de verano/fisica/index.html , ver relatividad especial

Incluimos una sección (ver sección al final de este capítulo) con los instrumentos de medición del tiempo a lo largo de la historia y con su respectiva precisión. Aquí, necesariamente, emerge el GPS (Global Positioning System), como la única instancia en la vida diaria donde se debe utilizar la relatividad especial y también la general para determinar con precisión las coordenadas del objeto.

Las predicciones de la relatividad especial han sido verificadas en todos los experimentos realizados hasta el presente.

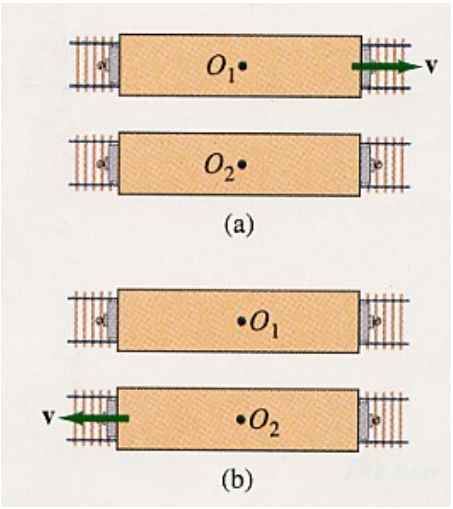


Figure V.1: *Sean (O_1 y O_2) los pasajeros de dos trenes que viajan con velocidad relativa V en sentidos opuestos. Ninguno de estos dos observadores puede decidir, aún realizando un experiento físico, cuál de ellos se encuentra en reposo absoluto y cuál en movimiento.*

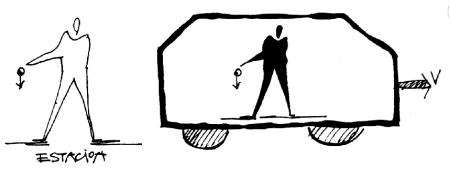
V.2.1 El Principio de Relatividad de Galileo

La mecánica newtoniana supone la existencia de un tiempo y un espacio absoluto, rígido, inamovible y, en consecuencia el mismo para todos los observadores.

La primera ley de Newton es la definición de un sistema inercial. Si un cuerpo permanece en reposo (o en movimiento uniforme) en un sistema de referencia dado, éste constituye un sistema de referencia inercial.

La segunda ley de Newton establece la ecuación del movimiento para una partícula puntual: $\vec{F} = m\,a$. Esta expresión es la misma para todos los sistemas inerciales. Una vez definido en un sistema de referencia, necesitamos un protocolo para relacionar las leyes de Newton desde un sistema inercial a otro, de forma que sean las mismas en ambos. Éste es el *principio de relatividad de Galileo*.

Considere, por ejemplo, la caída libre de un objeto en dos sistemas inerciales: un observador en tierra y otro en un carro en movimiento, como aparece en la Figura V.2.1. Desde el punto de vista de cada uno de ellos, la pelota que soltaron cayó verticalmente en cada uno de sus sistemas de referencia. Cada uno de estos observadores opina que él permanece en reposo absoluto y es el otro observador quien está en movimiento. La prueba es que la pelota describe una parábola en su sistema de referencia. Esto es lo que observa cada uno de ellos acerca del movimiento en el otro.



Consideremos varios observadores viajando en el espacio vacío –sin estrellas o galaxias a su alrededor que sirvan de referencia (ver Fig.V.2)– con una cierta velocidad relativa v. Como ninguno de estos observadores experimentan fuerza alguna, suponen que se encuentran en reposo absoluto

y le adscriben a cada punto del espacio una coordenada.

Totalmente ignorantes del principio de relatividad de Galileo, cada uno de ellos piensa que las coordenadas espaciales de cualquier punto P que ellos selecionan, permanece constante y por tanto *en cada instante es el mismo punto*. Esta es la opinión del observador **A**, por ejemplo. En otra nave, el observador **B**, hace un análisis similar y concluye que es el espacio tridimensional de *su* nave el que permanece quieto y que, obviamente, los puntos del espacio tridimensional del otro sistema de referencia, van cambiando sus coordenadas espaciales (o su ubicación) en el tiempo.(De hecho, la coordenada x' de uno de ellos, cambia de acuerdo a la ley $x' = x - v_0\, t$, como veremos a continuación.

Formalmente, cada punto en el espacio no es el mismo siempre. Debemos añadir una coordenada más que especifique el tiempo en que se determinaron estas coordenadas.

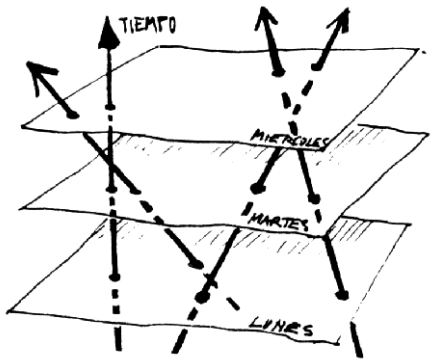


Figure V.2: *Las líneas representan la trayectoria de cuatro observadores inerciales. Cada uno considera que es el otro quien se aleja (o acerca). Las coordenadas de un punto P, fijo a uno de los sistemas, cambia en el tiempo de acuerdo a otro de los observadores.*

En las transformaciones de Galileo el tiempo es absoluto, el mismo para todos los observadores inerciales.

$$\text{Transformación de Galileo} \quad \begin{cases} x' &= x + v_0 \cdot t, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{cases} \tag{V.1}$$

La velocidad de la luz como una constante universal, la misma para todos los sistemas inerciales marca el advenimiento de la relatividad especial y la necesidad de abandonar el tiempo absoluto y universal, el mismo para todos los sistemas inerciales.

V.2.2 Las Ecuaciones de Maxwell

A fines del siglo decinueve existían dos teorías que habían demostrado, a través de numerosos experimentos, constituir un buen modelo de la naturaleza: la teoría de J. C. Maxwell de la electricidad y magnetismo de los cuerpos y la mecánica de Newton.

James Clerk Maxwell (1831 – 1879) unificó as leyes de la electricidad y el magnetismo, estableció un conjunto de ecuaciones que llevan su nombre y que establecen el comportamiento de cargas en reposo y en movimiento en el espacio vacío. La propagación de estos campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$, obedece a una ecuación de onda y ocurre, en vacío, con la velocidad de la luz.

Esta identificación, la luz como una onda electromagnética, fue propuesta por primera vez por Maxwell. Es parte de su tremendo aporte a la física. Su verificación experimental ocurrió en 1888, cuando Maxwell ya había muerto. Heinrich Hertz se comunicó a través del canal de Beagle mediante ondas de radio, usando las ecuaciones establecidas por J. C. Maxwell, evidentemente.

Es curioso que la velocidad de propagación de estos campos, resultó ser el inverso de la raíz cuadrada del producto de dos constantes insertadas previamente e independientes: ϵ_o y μ_o. Éstas provenían del ajuste de unidades entre la definición de la carga y la fuerza. Estas últimas unidades, establecidas previamente [10], son determinadas experimentalmente midiendo la atracción entre dos cargas (ϵ_o) y la fuerza que entre dos conductores con corrientes en sentido opuesto (μ_o).

Incluimos a continuación las ecuaciones de Maxwell en el sistema MKS a modo de información.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad c^2 \nabla \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Este conjunto de ecuaciones se puede resolver en forma general. Las integrales son:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \nabla\phi - \tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

$$\phi(1,t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12/c})}{4\pi\epsilon_0\, r_{12}} dv_2$$

$$A(1,t) = \int \frac{\vec{j}(2, t - r_{12/c})}{4\pi\epsilon_0\, c^2 r_{12}} dv_2$$

Note que aparece un término $t' = t - r_{12}/c$ en el argumento de la densidad de carga y la densidad de corriente. Esta variable t' se denomina el tiempo retardado y señala que el efecto en el instante t y en $\vec{r_2}$ corresponde al efecto de la carga debido a su posición $|\vec{r_{12}}|/c$ segundos antes. esto hace las ecuaciones no-lineales y difíciles de resolver.

Como sabemos, las ecuaciones de Newton toman la misma forma en todos los sistemas inerciales bajo una transformación de Galileo. Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell cambian de forma al aplicar una transformación de coordenadas de la forma (V.1). Si este resultado se verifica en la naturaleza, tenemos al alcance un método para identificar un sistema de referencia en reposo absoluto: aquél donde las ecuaciones de Maxwell toman la forma más simple. Se postuló que

este medio en reposo absoluto existía y se le denominó el éter. Las ondas electromagnéticas se propagarían en este medio.

La influencia histórica de las ondas mecánicas en cuerdas, ondas de sonido en gases y otros ejemplos, hacía pensar que se requería de un medio de transmisión para sostener las ondas electromagnéticas.

Por otra parte, de acuerdo a la composición de velocidades introducida por Galileo, si la velocidad con que viaja un destello de luz en nuestra sala es c, la velocidad de este mismo destello, medida por un observador que se desplaza con una rapidez v con respecto a la sala debería ser: $c' = c \pm v$, dependiendo del sentido de la rapidez del observador.

Asignamos la velocidad c al caso de una onda electromagnética en el sistema en reposo absoluto: al *éter*.

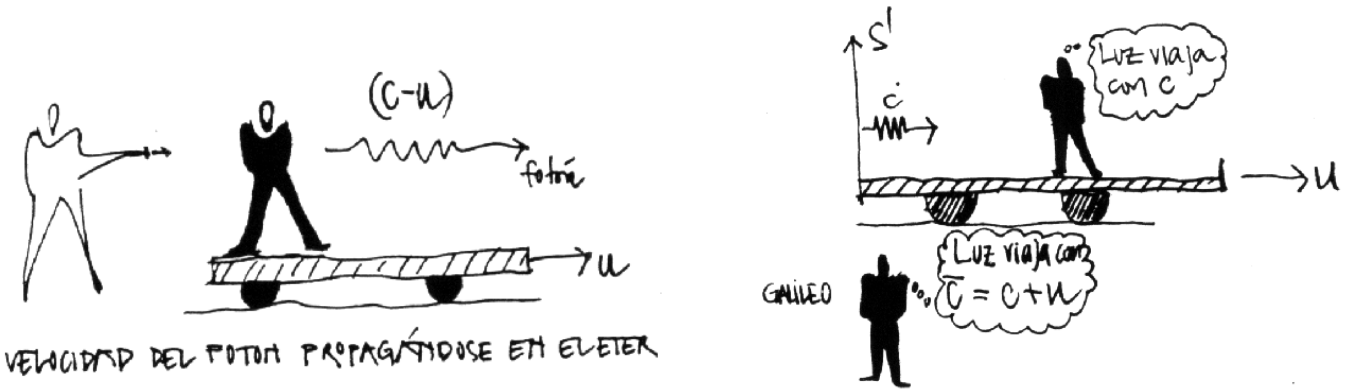


Figure V.3: *De acuerdo a la composición de velocidades establecida por Galileo, un destello (o fotón) lanzado por un observador en reposo en el laboratorio tiene una velocidad igual a c, la velocidad de la luz. Sin embargo, de acuerdo a Galileo, un observador sobre la plataforma mide una velocidad* $(c - u)$ *para este mismo fotón, si la plataforma se desplaza con una velocidad* u*. El postulado más relevante de la relatividad especial establece que ambs observadores miden la misma velocidad* c*.*

Hubo varios experimentos que indicaban que esta composición de velocidades no correspondía a lo observado. Uno de estos experimentos fue el de Michelson-Morley, quien, utilizando un dispositivo óptico, intentó detectar alguna diferencia en el valor de la velocidad de la luz, dependiendo de la dirección y sentido en que viajaban los rayos con respecto a la velocidad orbital de la Tierra. El resultado fue negativo: no se encontró evidencia alguna, dentro de la precisión del instrumento, de una superposición de la velocidad orbital y la la velocidad de la luz. Hasta donde se podía asegurar, la velocidad de la luz mantenía su valor, independiente de la velocidad relativa del sistema de referecia utilizado.

Si la luz no discrimina entre dos sistemas inerciales en movimiento relativo, y la luz es una onda electromagnética, tampoco las ecuaciones de Maxwell deben discriminar entre dos sistemas de referencia inerciales. Surge el problema de encontrar las transformaciones que dejen las ecuaciones

de Maxwell invariantes de forma al ir de un sistema inercial a otro.

Este problema fue resuelto por H.A. Lorentz quien inventó una transformación para ir de un sistema inercial a otro que dejaba a las ecuaciones de Maxwell invariantes, es decir sin cambiar de forma. Estas son las transformaciones de Lorentz, las mismas que A. Einstein re-descubrió más tarde.

¿Por qué Lorentz no es, entonces, el inventor de la relatividad? Pese a la importancia del aporte de Lorentz en el establecimiento de la relatividad especial, no logró encontrar la interpretación correcta. De acuerdo a la interpretación de Lorentz, una barra en movimiento efectivamente se acorta con respecto a una en reposo. Se realizaron varios experimentos, muy ingeniosos, sin ningún resultado. Las barras **no** mostraban ningún acortamiento. ¿Qué fallaba en la interpretación de Lorentz? No se pudo desligar de la idea de tiempo absoluto. Se necesitaba una teoría más revolucionaria. La propuesta por Einstein. La teoría de Einstein desechó la idea de la existencia del éter y estableció como principio físico que la velocidad de la luz en el vacío era una constante universal, la misma en todos los sistemas inerciales.

Las ecuaciones de Newton, sin embargo, necesitan ser modificadas tanto en su forma como en su concepto. Es preciso abandonar la idea de tiempo absoluto, que está incrustado firmemente en las ecuaciones de Newton y en las transformaciones de Galileo.

V.3 Diagramas Espacio–Tiempo

Un punto en el diagrama espacio-tiempo representa un hecho concreto, como el instante en que un objeto puntual al caer toca el suelo, o un martillo golpea a un clavo, o una luz se enciende... etc. Esto se denomina un *evento*.

Como el tiempo jugará un papel fundamental, nos interesan los diagramas espacio-tiempo, donde se incluya el tiempo. Matemáticamente, un evento está definido por un conjunto ordenado de cuatro números que corresponden (por convención) al tiempo, el primero, y a las tres coordenadas espaciales, los consecutivos. Como todas las coordenadas tendrán la misma relevancia en esta teoría, conviene usar $c\,t$ en lugar de t, de modo que todas tengan las misma dimensiones.

Evento : Es un tetrada ordenada de números que describen un hecho puntual. Constituye un primer paso para asignar coordenadas al espacio–tiempo.

Una barra no constituye un evento puesto que no es posible definirla mediante un conjunto de cuatro números, debemos incluir la longitud y la orientación. Y en realatividad especial, también especificar el sistema de referencia asociado a estas medidas.

El instante en que dos barras chocan es un evento, el tiempo asociado es el instante del choque y las coordenadas espaciales de los dos puntos en contacto.

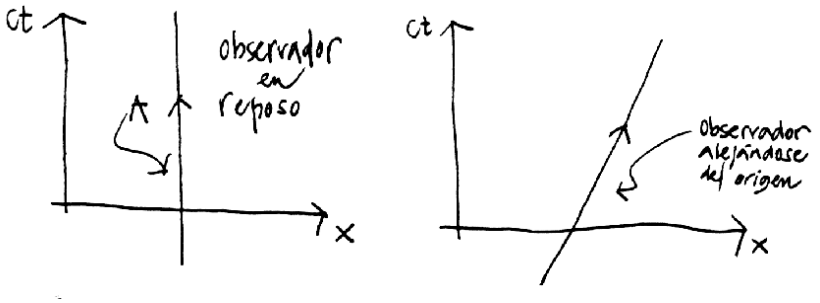


Figure V.4: *La línea A, a la izquierda de esta Figura, representa la trayectoria en el espacio-tiempo de un observador en reposo. En el diagrama de la derecha, se dibuja un observador (puntual) que se aleja del origen con una velocidad V. La recta inclinada representa la línea de universo de este observador.*

Como no es posible representar 4 dimensiones en el papel, dibujaremos sólo una o dos coordenadas espaciales.

Si un objeto cae en una fuente con agua, se genera una onda superficial que se aleja del punto donde cayó la piedra con una velocidad característica. El frente de onda es una circunferencia que se expande alejándose del origen. En el diagrama espacio-tiempo, provisto de una dimensión temporal y dos dimensiones espaciales, la trayectoria de una de las ondas aparece como un cono cuyo vértice descansa en el punto (evento) donde se originó la onda, que en este caso coincide con el origen del sistema de coordenadas. Algo similar es lo que sucede con un destello de luz, éste se propaga como un cascarón esférico en un espacio de tres dimensiones. En los diagramas, esta onda se transforma en un **c**ono de luz. Definimos ct como las dimensiones del eje vertical, de este modo todos los ejes tienen la dimensión de longitud. Esta elección es sólo una convención.

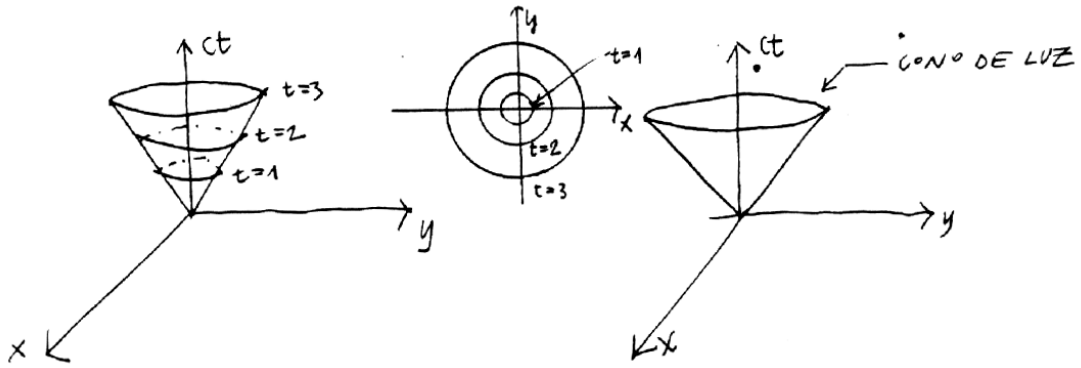


Figure V.5: *Se incluye, a la izquierda, una onda de sonido propagándose en la superficie del agua (dos dimensiones). La onda de la derecha representa un pulso luminoso propagándose en dos dimensiones. Usamos la misma escala de longitud en ambos ejes x y ct.*

También elegimos la escala de las coordenadas de manera que la velocidad de la luz se propague

formando un ángulo de 45^o con las coordenadas espaciales y el tiempo ct. Esto se logra estableciendo la misma unidad de longitud para los ejes espaciales y para el eje vertical ct. De esta forma la trayectoria de un rayo de luz forma un ángulo de 45^o con el eje ct. Note que esta escala establece una nueva unidad de longitud igual a 300.000 km.

Los diagramas con las trayectorias de los rayos de luz se tornan más fáciles de entender con este escalamiento. No contiene ningún cambio conceptual. Refleja el hecho que los rayos de luz son vitales en el desarrollo de la teoría y se utilizan en el protocolo de la mayoría de las mediciones.

Las figuras a continuación representan un observador en 1 y 2 dimensiones espaciales.

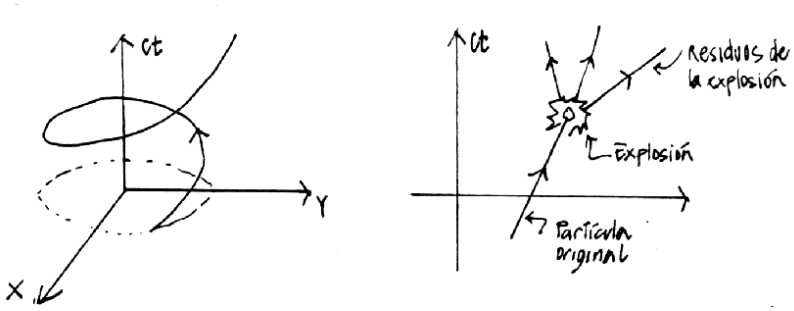


Figure V.6: *Línea de universo de una partícula que rota alrededor del origen describiendo una circunferencia de radio a. A la derecha se incluye una partícula que repentinamente explota en tres pedazos. Note que una de las trayectorias es anómala: ¿Cuál parece propagarse con una velocidad mayor que la velocidad de la luz?*

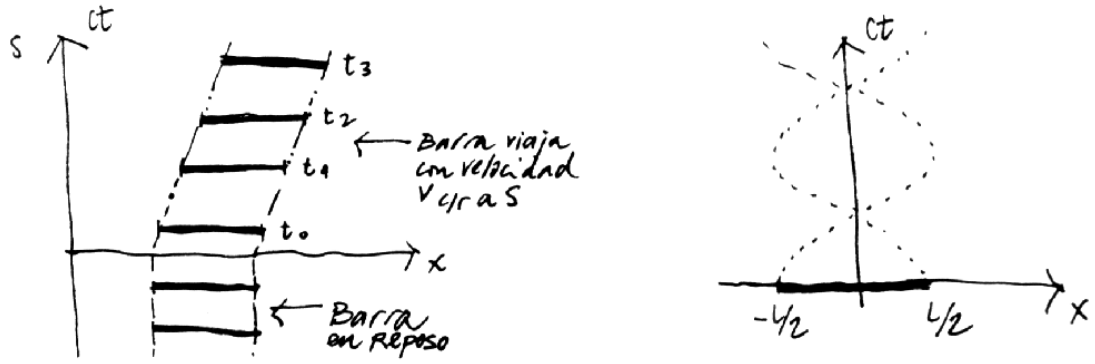
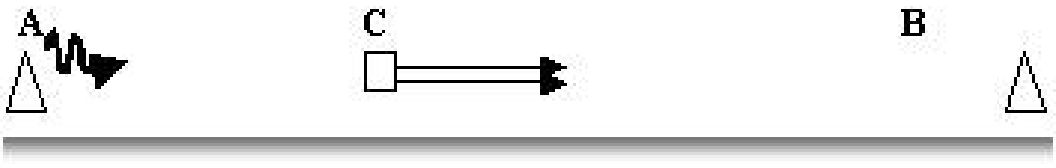


Figure V.7: *Línea de universo de los puntos extremos de una barra rígida que está inicialmente en reposo en $t = 0$, viaja con velocidad v con respecto al sistema S. A la derecha se indica la línea de universo de los extremos de una barra que gira en torno al origen.*

Ejercicio

Desde el punto **A**, en reposo, se envían pulsos cada **T** segundos mediante un rayo láser hacia el punto **B**, que es otro observador situado a una distancia **D** y que permanece en reposo con respecto a **A**. otro observador **C**, representa una nave que viaja desde **A** hacia **B** con rapidez constante $v = 0.6$c con respecto al observador **A**.



a.- Haga un diagrama espacio-tiempo donde aparezca claramente la trayectoria de **A**, **B** y **C** de acuerdo a los datos del problema.

b.- ¿Cuál es el valor de **T'**, el intervalo con que **B** recibe los pulsos enviados por **A**?

c.- ¿Cuál es el intervalo **T"** en que **C**, de acuerdo a su reloj, recibe los pulsos enviados por **A**?

d.- Suponga ahora que **C**, dispara un pulso cada vez que recibe un destello desde **A**: ¿Con qué frecuencia **B** recibe los destellos enviados por **C**?

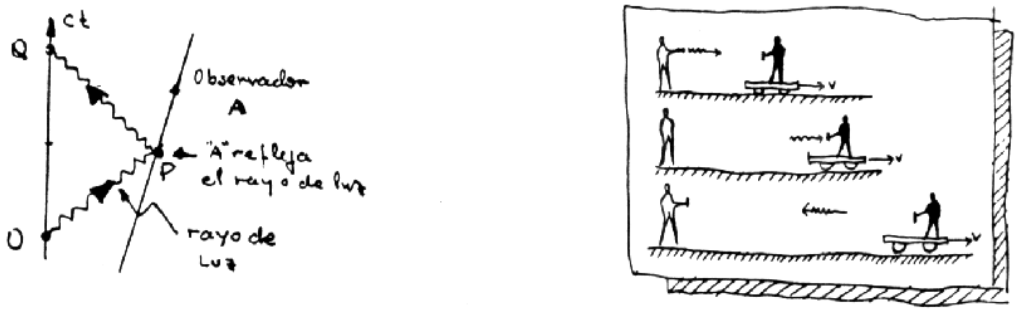


Figure V.8: *El observador A recibe un pulso de luz y lo refleja hacia el Observador O. En un diagramas sin el eje "ct", esta situación está descrita por la figura de la derecha. El observador A es la persona en el carro que se aleja. Note que el eje temporal en la figura de la izquierda progresa hacia arriba y en el de la derecha comienza desde arriba hacia abajo.*

V.4 Postulados de la Relatividad Especial

Esta es una teoría cinemática, se ha eliminado todo tipo de interacción con otras partículas o fuerzas. En esta sección se establecen las bases para el protocolo que cada observador inercial debe establecer en el contexto de la relatividad especial. Su necesidad quedará clara en cuanto avancemos en el establecimiento de la teoría.

Para construir el andamiaje de cada observador inicial sólo permitiremos la emisión y recepción de rayos de luz por parte de estos observadores.

A continuación estableceremos los postulados de la Relatividad Especial.

Postulado 0 *El espacio es homogéneo e isótropo*.

Esta afirmación indica que el resultado del experimento no depende del lugar dónde se realizó (homogeneidad del espacio). Tampoco interesa la dirección donde apuntemos con nuestros ejes coordenados, todas las direcciones son equivalentes (isotropía).

En la superficie de la tierra existe una dirección preferida que está señalada por la atracción gravitacional. Al eliminar la gravitación (haciendo G = 0), el espacio recupera su isotropía. La homogeneidad e isotropía del espacio ha sido verificada con un error menor que $\pm 2 \times 10^{-15}$ [19].

Postulado 1 *Un movimiento no-acelerado o inercial es el único que puede determinarse en forma absoluta, sin referencia a ningún otro observador*.

Un sistema inercial es aquél en el cual una partícula que está en reposo permanece en reposo. Esta es la Primera Ley de Newton.

No existe un sistema inercial, existen sólo buenas aproximaciones. La superficie de la tierra es considerada como un sistema inercial y en la mayoría de los casos se comporta de esa forma. Sin embargo, sabemos que está girando con respecto a un eje diametral y también en torno al Sol.. etc.

Resumiendo: Un *sistema inercial* ocurre cuando cada partícula de prueba que está inicialmente en reposo, permanece en reposo y cada partícula de prueba que está inicialmente en movimiento continúa en movimiento, sin cambio en su rapidez o dirección.

Postulado 2 *Existen infinitos sistemas inerciales. Cada sistema que se desplaza con respecto a uno inercial con velocidad constante, constituye otro sistema inercial.*

Las leyes físicas deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales. Si cambian al ir de un sistema a otro podríamos singularizar uno de ellos y de esta forma definir un sistema maestro con respecto al cual referir toda la física. Esto no se puede llevar a cabo, por tanto, debemos aceptar que los sistemas inerciales son indistinguibles.

Postulado 3 *La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Es una constante universal de la naturaleza.*

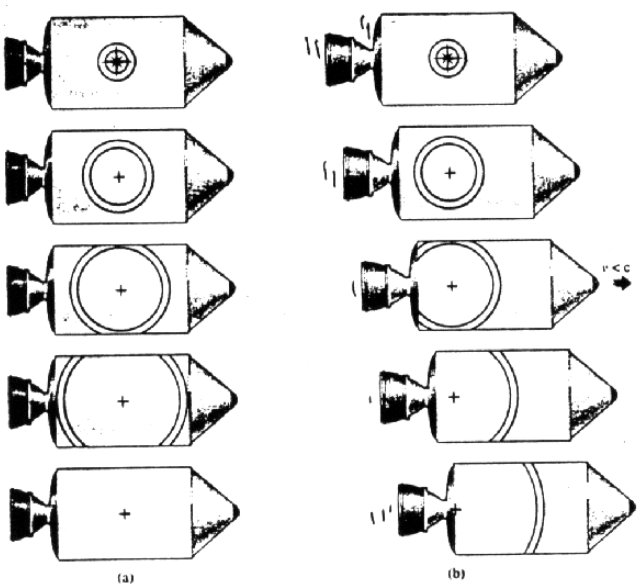


Figure V.9: *La propagación de un pulso de luz visto por un observador en reposo en la nave (izquierda, son los círculos concéntricos) y el pulso visto por un observador en reposo fuera de la nave (figura derecha, el centro del círculo permanece en reposo con respecto al sistema de referencia del observador). Para éste el pulso se propaga con la velocidad c y alcanza la cola de la nave antes que la nariz, a diferencia de lo observado por el piloto de la nave.*

Este postulado va mucho más allá del resultado experimental establecido en el año 1887 por Michelson y Morley, dos físicos norteamericanos que intentaron medir el cambio que debería experimentar la velocidad de la luz al propagarse a favor y en contra del movimiento de la tierra. El resultado del experimento de Michelson–Morley resultó ser *nulo*: no encontraron una diferencia *detectable* entre las velocidades en los distintos sentidos. Afortunadamente, experimentos más recientes, con mayor poder de precisión, han llegado a la misma conclusión [20].

Este experimento no se ajusta a las transformaciones de Galileo (V.1). Si la velocidad de la luz en un sistema de referencia es c, en el sistema que se mueve con una velocidad V con respecto al anterior, de acuerdo a las ecuaciones (V.1), debería ser $c' = c \pm V$, dependiendo del sentido en que se traslade.

Ejemplo

Analicemos el siguiente experimento desde el punto de vista de un observador en tierra (S) y el de otro observador viajando en una nave espacial (S'). En el sistema S' el astronauta envía un

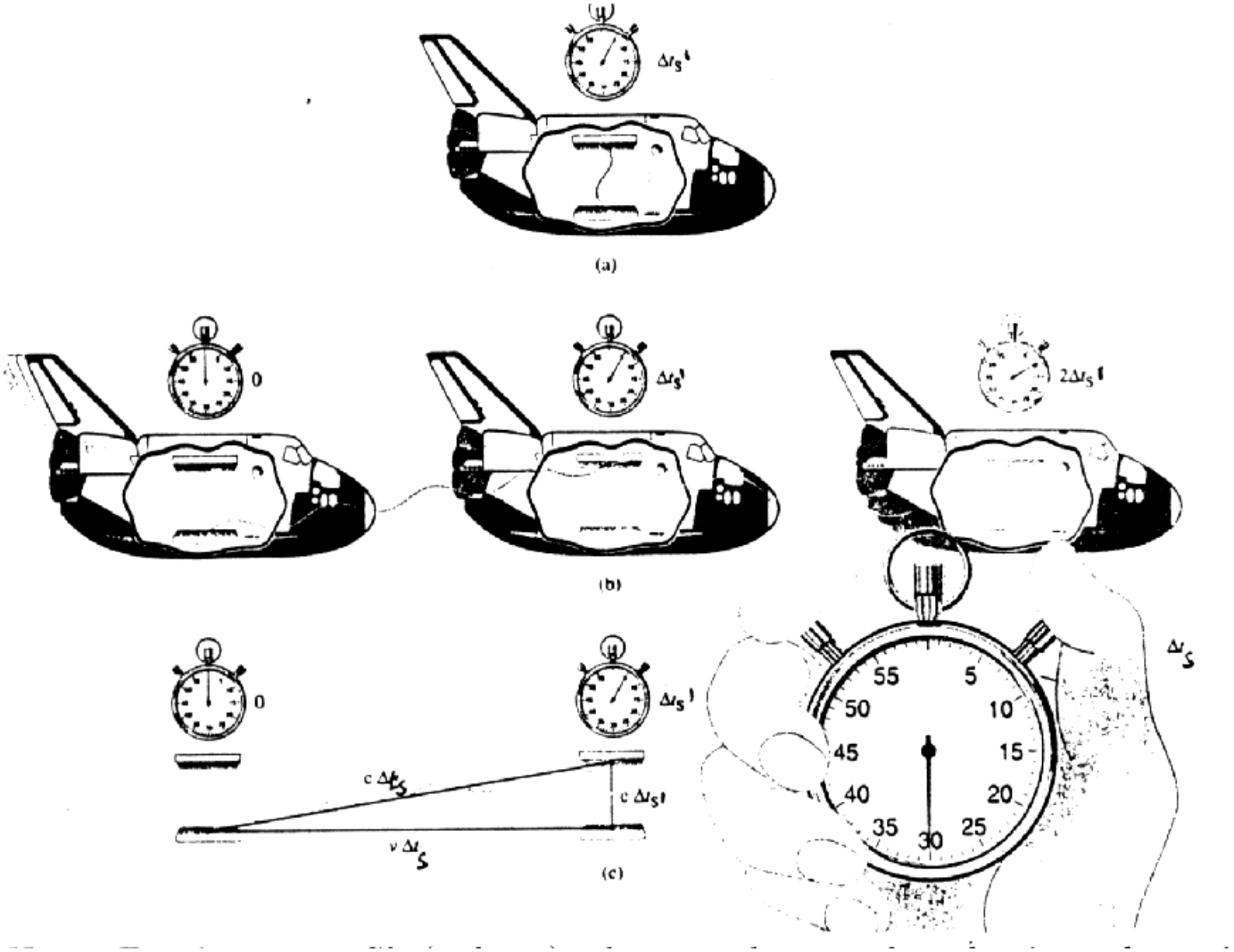


Figure V.10: *En el sistema S', (cohete), el rayo sale y vuelve al origen después de rebotar en el espejo superior. El mismo fenómeno, observado en el sistema de Laboratorio se indica inmediatamente abajo del anterior.*

destello de un rayo laser contra un espejo situado en el eje y', perpendicular a la velocidad relativa de la nave u. La distancia del origen de S', O' al espejo superior es L.

Relacionando las mediciones efectuadas por ambos observadores y suponiendo (ver Postulado 5) que las mediciones en los ejes perpendiculares al movimiento permanecen inalteradas, obtenga la expresión para la dilatación del tiempo.

En el sistema del laboratorio, el destello parte de O', rebota en L y vuelve a O'.

Utilizando el Postulado 5, el largo L medido en ambos sistemas de referencia es el mismo porque

es perpendicular a la dirección de movimiento. Por otra parte, cada uno de los pasos representados en la figura es un evento en el sistema de Laboratorio. Cuando sale el rayo (primera figura a la izquierda), cuando llega al espejo superior (figura del medio) y la posición del origen O' del sistema S', son tres eventos referidos al sistema de Laboratorio. Con ellos podemos dibujar un triángulo rectángulo y aplicar el teorema de Pitágoras:

$$(u\,\Delta\,t_s)^2 + L^2 = (c\,\Delta\,t_s)^2,$$

donde $u\,\Delta\,t_s$ es la distancia que recorre la nave en el intervalo $\Delta\,t_s$, tiempo que tarda el rayo en ir desde la base al espejo superior de la nave medida en S. L es la distancia entre espejos en S' (que es la misma que en S) y $c\,\Delta\,t_s$ es la distancia que recorrió el rayo de luz de acuerdo a S.

Si consultamos al astronauta acerca del tiempo que empleó el rayo en ir desde el espejo inferior (origen O') hasta el espejo superior nos indica que es $\Delta\,t_{s'} = L/c$. Reemplazando este valor en la ecuación anterior y despejando $\Delta\,t_s$ en función de $\Delta\,t_{s'}$, tenemos:

$$\Delta t_{s'} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,\Delta\,t_s, \quad \text{o bien} \quad \Delta t_s = \gamma\,\Delta\,t_{s'}$$

Conclusión : $\Delta t > \Delta t'$. El tiempo en S transcurre más rápido que en S'.

□

Dos observadores, en movimiento relativo, que intercambian información mediante un rayo de luz, lo ven propagarse con la misma velocidad en *ambos* sistemas de referencia.

Este postulado es el origen de todas las paradojas de la relatividad especial. Esta situación se origina en nuestra ignorancia con respecto a —fenómenos que involucran velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

El valor de la velocidad de la luz que usaremos es $c = 300.000\ km/s$. La velocidad de la luz hoy en día es una cantidad que se define, no contiene error.

Postulado 4 *En relatividad especial la distancia espacial queda definida como un número real y positivo asociado a dos eventos simultáneos. Este número es la distancia Euclídeana, medida entre estos dos eventos.*

Finalmente:

Postulado 5 *El largo de una barra que se desplaza en forma perpendicular a la velocidad relativa entre dos sistemas de referencia inerciales, no experimenta cambio alguno. Su longitud es la misma medida en cualquiera de los sistema de referencia.*

Ejemplo

Figure V.11: *Los dos extremos de la barra son fotografiados simultáneamente en el sistema S. El largo de la barra es la distancia euclídea entre ambos eventos.*

A partir de la figura que se acompaña, Los autores J. A. Wheeler y R. Taylor en [2], argumentan que en el contexto de la relatividad especial no puede existir un cambio en las longitudes perpendiculares de una barra que se despalza perpendicular a la velocidad relativa de los sistemas de referencia inerciales. Complete Ud. la explicación.

Solución: Dos observadores inerciales deben alcanzar las mismas conclusiones acerca de un evento. Por ejemplo, si un observador ve que una luz se enciende, otro observador debe percibir el mismo evento. No puede ocurrir que en una ampolleta se encienda en un sistema inercial y no lo haga en otro.

En este ejemplo, consideraremos si el carro de la Figura permanece sobre los rieles, dentro de los rieles o fuera de ellos. En ambos sistemas inerciales se debe alcanzar la misma conclusión.

Esta es una demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que una longitud perpendicular al movimiento relativo se acorta debido al movimiento. Esto indica que si mido un largo L de una barra en mi sistema de referencia, esa misma barra si se desplaza con respecto a mi sistema de referencia, y mido su largo, éste resulta ser menos que el original L.

Apliquemos esto al carro de la Figura. Consideraremos dos sistemas de referencia: uno fijo a los rieles y el otro fijo al carro del tren. Lo que mediremos es el ancho de las ruedas del carro (vistas de frente en la Figura). En reposo las ruedas del carro permanecen sobre los rieles.

Consideremos el acortamiento propuesto en el párrafo anterior. En este caso un sistema de referencia fijo a los rieles ve (por ejemplo) que el ancho de los carros (que normalmente viajan a lo largo de los rieles, es decir entrando o saliendo de la hoja) se acorta. Por tanto este observador afirma que el tren en moviento cae en el interior de los rieles.

Otro observador inercial, fijo al carro observa que los rieles (o mejor los durmientes), viajan y por tanto la distancia entre ellos se acorta y las ruedas del tren caen fuera de los rieles. Para un observador inercial el carro cae dentro de los rieles y para el otro observador inercial el carro cae fuera de los rieles.

Claramente esto es contradictorio. O el carro cae dentro o cae fuera, pero no ambos.

Figure V.12:

La salida a esta contradicción es que NO ocurre nada (ni acortamiento, como se supuso acá, ni alargamiento, alternativa que no se consideró pero que conduce a una contradicción similar).

□

Esta conclusión descansa en la premisa que los sistemas inerciales son indistinguibles el uno del otro.

Este postulado puede entonces considerarse que se desprende de los anteriores.

V.5 Simultaneidad

El concepto de simultaneidad se transparenta con la relatividad especial. Es simplemente tener en cuenta que la velocidad de la luz es finita.

Comenzaremos con la simultaneidad absoluta, que corresponde a considerar al límite en que la velocidad de la luz toma un valor infinito.

En esta sección comenzamos a usar efectivamente los diagramas de espacio-tiempo.

V.5.1 Simultaneidad Absoluta (La velocidad de la luz es infinita)

.

Para todos los efectos de la vida diaria, la luz se propaga con *velocidad infinita*. De esta forma no hay retardo en recibir la información entre dos eventos separados una distancia arbitraria. Cuando recibo el fotón indica que el evento que lo originó tomo lugar en el preciso instante en que lo recibí.

En el diagrama espacio–tiempo, esta situación se representa como dos eventos ubicados en un plano ortogonal al eje del tiempo. Esta es nuestra definición de *eventos simultáneos*.

El fotón que arranca de la máquina fotográfica se refleja instantáneamente en B y vuelve a A, donde graba la imagen de B(ver Figura V.13). A y B son simultáneos.

Lo mismo sucede con el evento C, el rayo con velocidad infinita recorre en ida y vuelta el camino $A\,C$, sin demora, de esta forma A y C son simultáneos. Análogamente, y por las mismas razones A, B y C son simultáneos. Prosiguiendo con este método podemos formar líneas de simultaneidad absoluta. Estas son perpendiculares al eje $c\,t$.

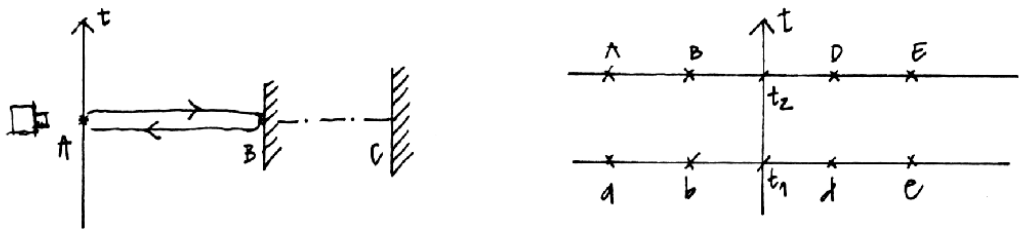


Figure V.13: *Un destello de luz viajando con velocidad infinita. Llega a todos los lugares simultáneamente.*

Los eventos a, b, c, d y e son simultáneos y ocurren en el instante t_1.

Los eventos A, B, C, D y E son también simultáneos, pero ocurren en el instante t_2 con posterioridad a t_1.

Supongamos a continuación un observador que viaja con velocidad v con respecto al anterior, nos preguntamos: ¿cuál es la línea de simultaneidad que le debemos asociar?(Ver Fig. V.14)

La respuesta es la misma que le asociamos al observador en reposo. La razón es que siendo la velocidad de la luz infinita, no importa la velocidad con que se desplace este nuevo observador, los eventos A y B, le parecerán simultáneos debido a que la luz no demora en recorrer una cierta distancia, por larga que ella sea.

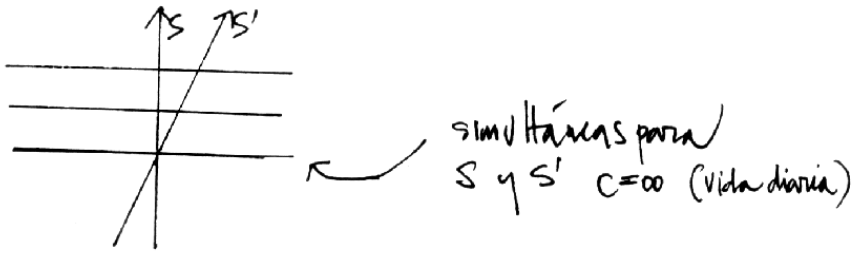


Figure V.14: *Los planos de simultaneidad son las líneas horizontales. Son los mismos para todos los observadores inerciales. Si la velocidad de la luz es infinita, nos lleva a la existencia de la simultaneidad absoluta.*

V.5.2 Simultaneidad relativa (La velocidad de la luz es finita)

Usando el hecho que la velocidad de la luz es finita y tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales, podemos definir en forma única la simultaneidad.

La clave es el protocolo utilizado para sincronizar relojes. En forma indirecta obtenemos la distancia espacial que separa los distintos eventos considerados.

Se denomina simultaneidad relativa porque está asociada a un sistema de referencia particular (relativo a dicho sistema y no a otro). Dos eventos simultáneos, lo son sólo en el sistema de referencia en el cual así se determinó. Esto se debe a que la velocidad de la luz toma el mismo valor en todos los sistemas inerciales.

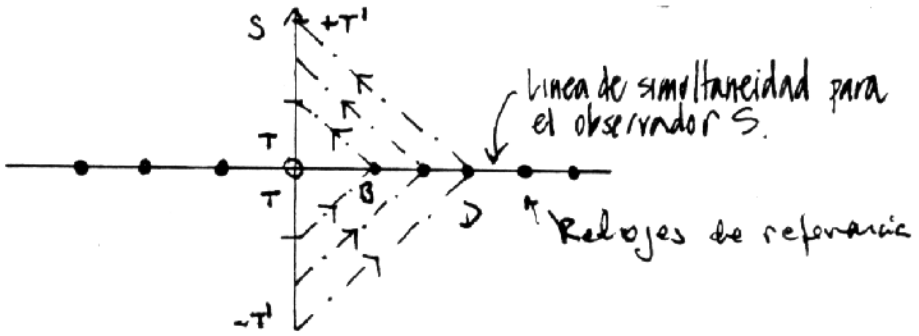


Figure V.15: *La simultaneidad se determina mediante el uso de rayos de luz. La luz viaja desde el origen hasta el punto B, rebota y vuelve al origen. Demora T segundos en ir y T segundos en volver. El punto medio lo definimos como el simultáneo de B. También su distancia queda definida como cT.*

Definimos simultaneidad en forma análoga al caso de la simultaneidad absoluta: se envía un rayo de luz que rebota en el objeto y retorna a la fuente. Con esta estrategia podemos sincronizar los relojes en el sistema S. El método formal sería el siguiente. Al llegar al pulso a un punto del espacio (B o D en la figura anterior), activa el reloj que allí se ubica y al reflejarse y volver al punto de partida se calcula la distancia a que se encuentra el reloj y posteriormente se le comunica que su coordenada espacial es $d = T\,c$ y que debe adelantar su tiempo en d/c segundos para sincronizarlo con el reloj que permance en el origen (el reloj maestro).

De esta forma la simultaneidad con respecto a un evento en el eje ct está definida de la misma forma que en el caso anterior (con $c = \infty$). La ventaja de adoptar esta definición es que en límite de bajas velocidades se aproxima al método establecido anteriormente.

De esta forma hemos definido la simultaneidad relativa al sistema S. Está formado, para el caso unidimensional, por una serie de líneas todas perpendiculares al eje vertical ct que representa al tiempo que marca el reloj asignado al observador ubicado en el origen.

Podemos imaginar que distribuimos una infinidad de relojes en todo el espacio y mediante una

serie de señales como la indicada, sincronizar cada uno de ellos con el reloj principal y, al mismo tiempo, asignarle una coordenada de la forma ya explicada.

Resumiendo: a la nube de eventos que cubren el espacio-tiempo, le hemos asignado un tiempo y una coordenada espacial usando un protocolo bien establecido. Este método, es aplicable a cualquier sistema de referencia inercial. Mostraremos que las líneas de simultaneidad en dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo, no coinciden. Con esto abandonamos la existencia de un espacio rígido y un tiempo único y absoluto, que conformaba el esquema Newtoniano

La velocidad de la luz es finita y toma el mismo
valor en todos los sistemas inerciales
$\Downarrow$
Dos eventos simultáneos en un sistema de referencia inercial,
no lo son en ningún otro sistema en movimiento relativo.

A continuación usaremos esta definición para asignar las coordenadas espacio temporales a un observador que designamos como S', y que aleja con velocidad V constante, del observador en el sistema S. Como S' constituye también un sistema inercial, debemos aplicar el mismo método para definir las superficies de simultaneidad: el rebote de los rayos de luz. De la Figura se aprecia que debido a la asimetría del eje ct', las líneas de simultaneidad no van a coincidir con aquellas de S, como era el caso en la simultaneidad absoluta.

Después de determinar dos puntos simultáneos, definidos como el punto de rebote del rayo y el punto medio del tramo comprendido entre la partida y el regreso del destello de luz, es evidente de la Figura (V.19) que las líneas de simultaneidad están inclinadas con respecto a las anteriores.

Si, al igual que el caso anterior, repetimos el proceso con otros puntos, desarrollamos una familia de líneas de simultaneidad asociadas al observador S'.

En la Figura siguiente, se aprecia que los puntos (eventos) A y B, son simultáneos para el observador S (y también para todo su equipo de relojes sincronizados), pero *no* lo son para el observador designado por S'. De hecho, en el sistema S', A sucede antes que B. La simultaneidad es *relativa*, está asociada a un sistema de referencia específico.

Ejemplo de la simultaneidad relativa

En la parte izquierda de la Figura V.20, los rayos provenientes de los extremos de la estación (nave superior)llegan simultáneamente al centro donde se ubica el director de la estación. Para él no

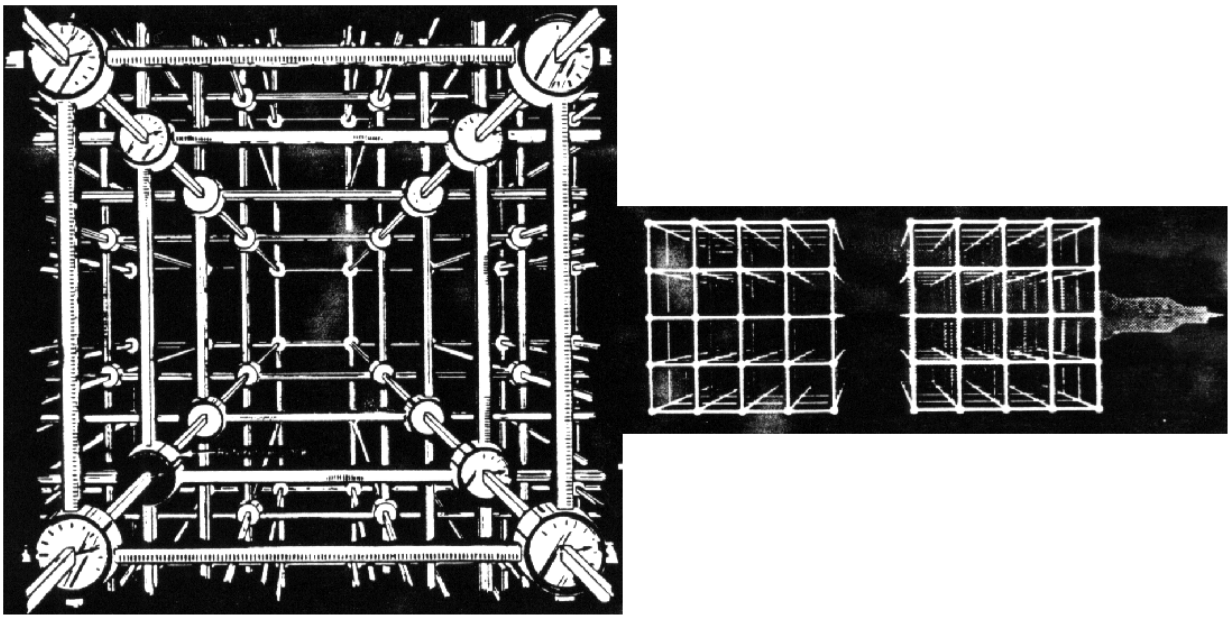


Figure V.16: *El observador en el Laboratorio (Andamiaje de la izquierda) y el Astronauta en su nave (a la derecha de la Figura, y que se desplaza con una velocidad relativa v), cada uno construye, en forma independiente, su enrejado espacio-tiempo. Cada uno de ellos lo construye rectangular (como el que aparece a la izquierda en la Figura). La dificultad se traslada entonces al proceso de relacionar un sistema con el otro.*

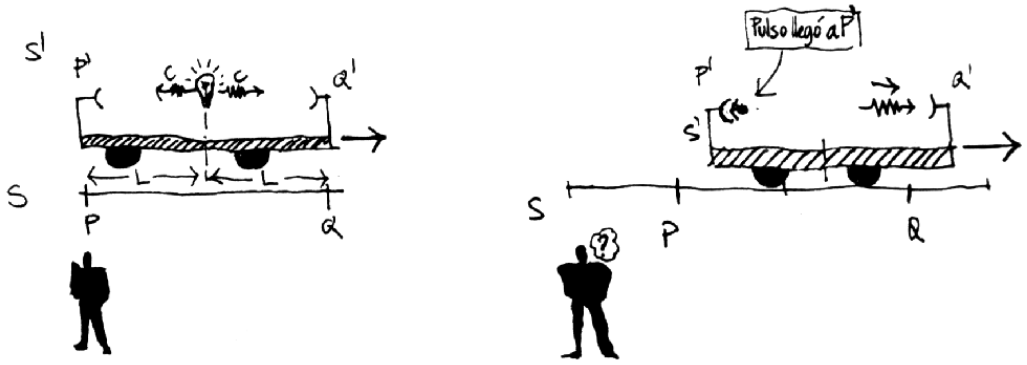


Figure V.17: *Los dos destellos de luz salen simultáneamente desde el punto medio del carro alcanzan simultáneamente los dos extremos del carro (figura de la izquierda). Para un observador externo no existe esa simultaneidad de los dos eventos separados. Para él, debido a que la velocidad de la luz es c, el destello alcanza primero el extremo izquierdo y después el extremo del derecho (figura de la derecha).*

hay problema, ambos rayos salieron simultáneamente y llegaron simultáneamente al centro de la estación. Es lo que se describe en la columna izquierda.

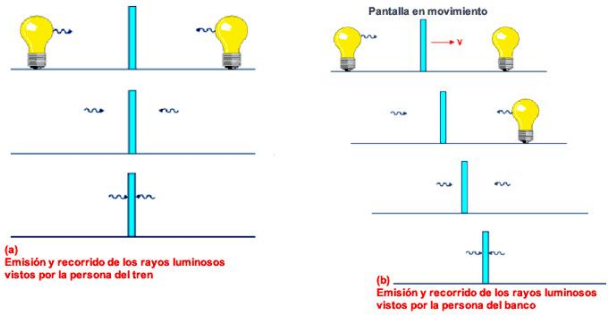


Figure V.18: *Los dos destellos de luz salen simultáneamente desde los dos extremos del carro. Ambos llegan simultáneamente al centro del carro(figura de la izquierda). Para un observador externo no existe esa simultaneidad. Para él, el rayo de la izquierda salió primero y de esa forma, dada la velocidad del carro, ambos logran llegar simultáneamente al centro del carro (figura de la derecha).*

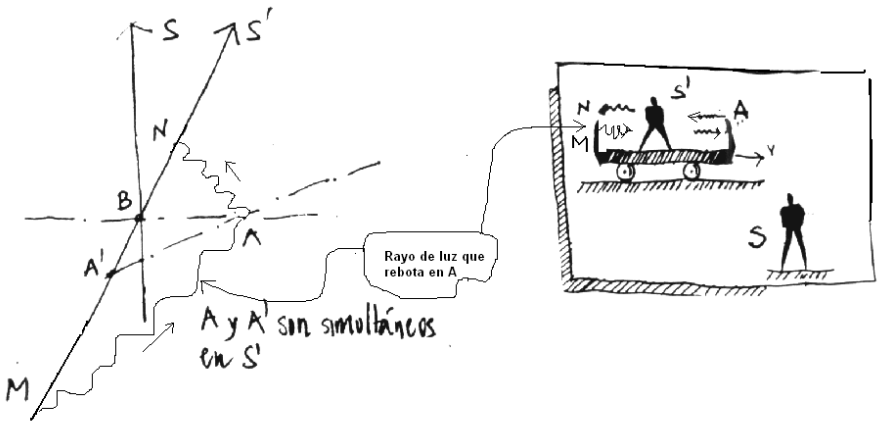


Figure V.19: Los eventos A y B son simultáneos para el observador en el sistema S. Para S' los puntos A y A' son simultáneos. A' se ubica en el punto medio del intervalo MN, por tanto, de acuerdo al protocolo establecido, es el evento simultáneo al evento A donde rebotó el destello de luz. El rayo de luz parte de M.

En cambio para el astronauta viajando en la nave espacial -que sabe que ambos rayos salieron del extremo de su nave (ver Fig. V.20) debido a que existe evidencia fotográfica ve otra cosa.

Lo que sucede es lo siguiente: lo que es simultáneo para la estación espacial (nave superior) no lo es para el astronauta de la nave espacial (nave inferior). Para este último, se dispara primero el destello en la izquierda de la Figura, cuando ambos extremos izquierdos coinciden. La estación espacial avanza hacia la derecha. Posteriormente cuando ambos extremos derechos coinciden, aparece el otro destello.

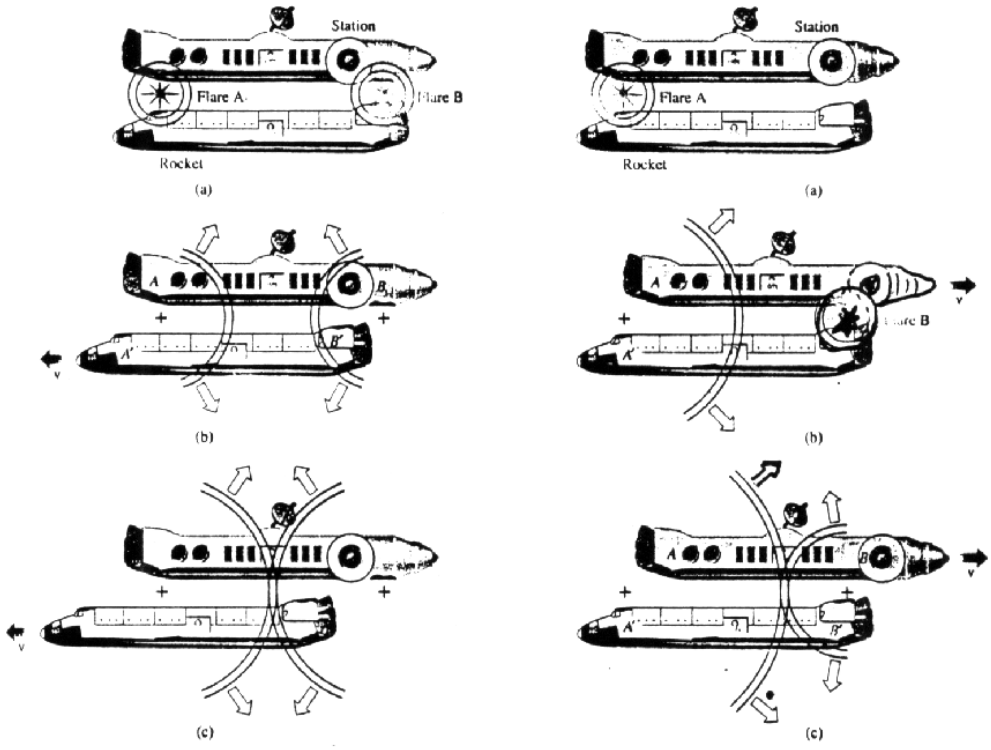


Figure V.20: *El observador en la estación espacial (nave superior) se considera en reposo y observa como el astronauta en la nave espacial (nave inferior) se aleja de la estación con velocidad constante. Los círculos indican la propagación del destello de luz visto por el observador en la estación espacial (columna izquierda). Lo que ve el astronauta de la nave espacial se indica en la columna derecha.*

Implícitamente estamos afirmando que los largos de ambas naves no coinciden. Veremos esto cuando tratemos la contracción del largo.

V.6 Transformaciones de Lorentz: Método Analítico.

V.6.1 Transformaciones de Lorentz

Consideremos dos sistemas inerciales de referencia: **S**, en el cual nos ubicamos y **S'**, que se desplaza con rapidez v **constante** con respecto a nosotros (sistema **S**). El vector velocidad $\vec{v}$, quiebra la isotropía del espacio. Para evitar complicaciones algebraicas, seleccionamos el eje x de nuestro sistema de referencia en la misma dirección y sentido en que apunta la velocidad $\vec{v}$.

Siempre uno elige como la primera opción para enfrentar un problema aquella que sea la más simple. Si funciona, se examina en mayor detalle, si no, se busca la siguiente opción.

En la relatividad especial funciona la opción más simple. Eso veremos ahora.

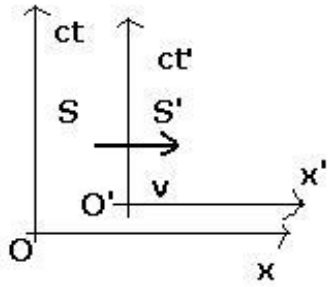


Figure V.21: *Diagrama que representa dos sistemas de referencia en movimiento relativo con velocidad $\vec{v}$.*

Supondremos que la relación entre las coordenadas de un evento visto desde el sistema **S** y desde **S'**, es lineal en las coordenadas. Supondremos también que los orígenes de coordenadas de ambos sistemas de referencia coinciden $x = x' = 0$ en $t = t' = 0$, los relojes de ambos sistemas parten cuando se enfrentan los relojes ubicados en el origen de cada uno de los sistemas de referencia (**O**) y (**O'**). Analicemos sólo la coordenada x' por ahora. De acuerdo a la definición de linealidad, tenemos

$$x' = a\,x + b\,t, \tag{V.2}$$

donde a y b son funciones de la velocidad, $a = a(v)$ y $b = b(v)$.

Considere una partícula ubicada en el origen de coordenadas del sistema S', por definición: $x' = 0$. De manera que la ecuación anterior nos da

$$0 = a\,x + b\,t. \tag{V.3}$$

donde x representa la posición del origen de cooordenas de S' en el instante t.

De aquí obtenemos $0 = a\,x + b\,t$, de modo que

$$\frac{x}{t} \equiv \frac{dx}{dt} = v = -\frac{b}{a}.$$

Las funciones $a(v)$ y $b(v)$ están relacionadas. La transformación general de coordenadas toma la siguiente forma:

$$x' = a(v)\,(x - v\,t). \tag{V.4}$$

Utilizando el Postulado que afirma que todos los sistemas inerciales son indistinguibles entre sí deducimos que esta misma relación debe ser válida para el sistema S' cuando evalúa la posición de una partícula ubicada en **S**:

$$x = a(-v)\,[x' + v\,t], \tag{V.5}$$

donde hemos puesto $a(-v)$ para señalar que ahora la partícula en en,bfS viaja hacia la izquierda de **S'**. El factor $a(-v)$ no depende del signo de la velocidad relativa, pero eso lo mostraremos

cuano analicemos estas ecuaciones en forma geométrica.

Consideremos ahora la constancia de la velocidad de la luz. Si en el instante $t = 0 = t'$, cuando ambos sistemas de referencia coinciden **O = O'** (ver Fig**??**), enviamos un pulso de luz en el sentido positivo del eje x. De acuerdo al postulado de la constancia universal de la velocidad de la luz, cada uno de los dos observadores debe comprobar que

$$x' = c\,t' \quad \text{pulso con velocidad de la luz en } S'$$

$$x = c\,t \quad \text{pulso con velocidad de la luz en } S.$$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones en V.4 y V.5 obtendremos una expresión para la función $a(v)$, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} c\,t' &= a(v)(x - v\,t) = a(v)\,(c\,t - v\,t) \\ \Rightarrow\ t' &= a(v)\,(1 - \tfrac{v}{c})\,t \\ c\,t &= a(-v)\,(x' + v\,t') = a(-v)\,(c\,t' + v\,t') \\ t &= a(-v)\,(1 + \tfrac{v}{c})\,t' \end{aligned}$$

Reemplazando la expresión de t en la última ecuación de t',podemos obtener el producto de $a(v)\,a(-v) = [1 - \frac{v}{c}^2]^{-1}$.

Suponemos que $a(v)$ es una función de v^2, de forma que $a(v) = a(-v)$. Podemos despejar la expresión para $a(v)$ y obtenemos

$$\boxed{a(v) \equiv \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.} \qquad \text{(V.6)}$$

donde hemos definido $a(v) \equiv \gamma$, que es la letra usada para esta expresión.

En definitiva la transformación V.4, se escribe:

$$\boxed{\text{x'} \;=\; \gamma(v)\;(x - v\,t).} \tag{V.7}$$

Para obtener la transformación del tiempo operamos algebraicamente con las mismas transformaciones anteriores:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + v\,t') \\ x &= \gamma[\gamma(x - v\,t)] + \gamma\,v\,t' \end{aligned}$$

Si despejamos t' de la ecuación anterior, obtenemos:

$$t' \;=\; \gamma\,t + \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma\,v}\right)\,x.$$

Re-escribimos esta última ecuación, utilizando las siguientes igualdades:

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{-\beta^2}{1-\beta^2} = -\beta^2\gamma^2,$$

con $\beta \equiv v/c$. Finalmente la expresión para t' es:

$$\boxed{\text{t'} \;=\; \gamma\{t - \tfrac{v}{c^2}\,x\}.} \tag{V.8}$$

Las ecuaciones V.4 y V.5, son las transformaciones de Lorentz. Dadas las coordenadas de un evento en un sistema S, podemos obtener las coordenadas en el sistema S' a través de estas ecuaciones.

Las coordenadas perpendiculares a la velocidad y y z, se transforman igual que en las tranformaciones de Galileo.

Note que para $v << c$ se recuperan las transformaciones de coordenadas de Galileo.

Las líneas de simultaneidad en el sistema S'

A continuación encontraremos analíticamente la ecuación para la familia de líneas de simultaneidad, es decir tiempo constante, en el sistema S'.

El ángulo que forma la línea de universo del observador S' con la vertical que corresponde al observador en reposo (S) es

$$\text{tan}\phi = \frac{\bar{EG}}{\bar{AE}} = \frac{x_G}{ct_E} = \frac{v\,t_G}{c\,t_E} = \frac{v}{c}$$

La relación entre los tiempos de S' y S está dada por la transformación de Lorentz

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c}\,x)$$

La ecuación de las líneas con t' constante en S' es

$$t' \equiv t'_0 = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x),$$

estas son la la línea de simultaneidad en S'. Ordenando la expresión, tenemos

$$c\,t'_0 = \gamma\,c\,t - \frac{\gamma\cdot v}{c}\,x$$

$$c\,t = \frac{v}{c}\,x + \frac{c\,t'_0}{\gamma}. \tag{V.9}$$

las líneas con $t' =$ constante corresponde a la familia de rectas indicadas en la figura. Estas rectas tienen una pendiente dada por

$$\text{tan}\phi = \frac{v}{c}$$

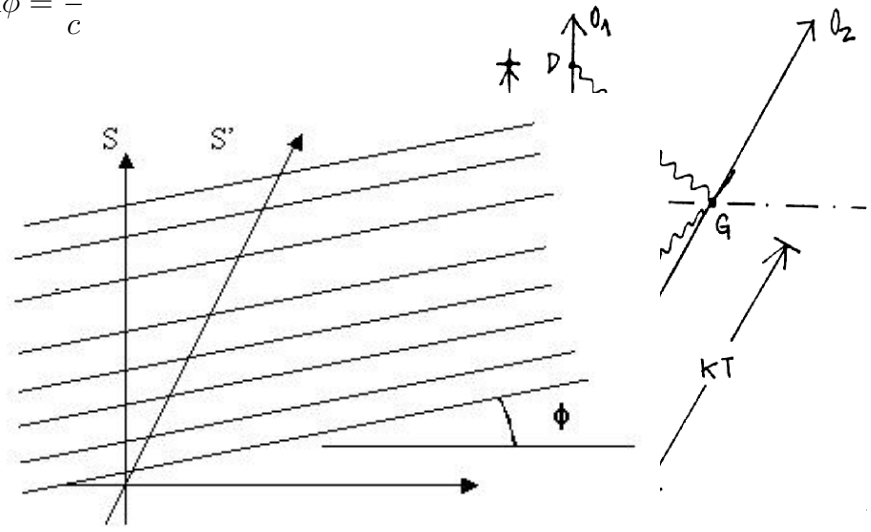


Figure V.22: *Las líneas corresponden a relojes que marcan el mismo tiempo t' en el sistema S'. Son la líneas de simultaneidad para el observador en movimiento relativo. las líneas horizontales marcan las líneas de simultaneidad del observador S.*

Líneas de úniverso de observadores en reposo

Las líneas con $x' =$ constante son $x'_o = \gamma\,(x - vt)$. Estos son los observadores que permanecen en reposo en el sistema S'. El objetivo final de estos dos cálculos es mostrar que el sistema de referencia de S' aparece deformado visto por el observador S. Este asimetría entre S y S' proviene de haber considerado que el observador S está efectivamente en reposo. Operando con la expresión para x'_o tenemos

$$\frac{v}{c}(ct) = x - \frac{x'_o}{\gamma}$$

$$c\,t = \frac{1}{(v/c)}\,x - \frac{x'_o\,c}{v\,\gamma}. \tag{V.10}$$

La pendiente de la familia de rectas con $x' =$ constante es $\tan\phi' = \frac{1}{(v/c)}$

$$\tan\phi' = \frac{1}{\tan\phi} = \cot\phi.$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \phi) = \frac{\text{sen}\pi/2\,\cos\,\phi + \cos\pi/2\,\text{sen}\phi}{\cos\,\pi/2\,\cos\,\phi + \text{sen}\pi/2\,\text{sen}\phi}$$

$$= \frac{\cos\,\phi}{\text{sen}\phi} = \frac{1}{\tan\phi}$$

$$\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi$$

V.7 Geometría de las Transformaciones de Lorentz

V.7.1 El Efecto Doppler Relativista

Utilizaremos un método analítico y geométrico para determinar la corrección debida al efecto Doppler. El método se debe a H. Bondi, un físico inglés quien lo introdujo. El factor que representa el efecto Doppler lo denominaremos k. Con este factor mostraremos que se pueden re-obtener las transformaciones de Lorentz, las transformaciones de la velocidad..., en resumen todo lo conocido de relatividad especial.

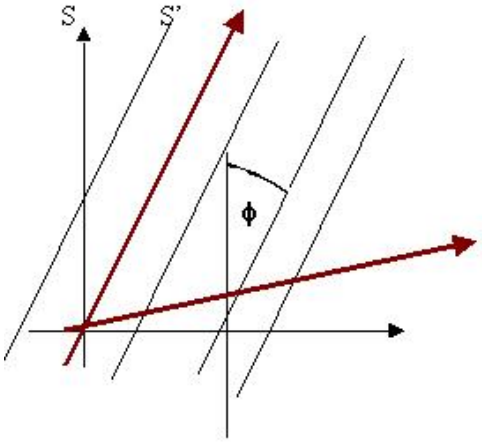


Figure V.23: *Las líneas corresponden a la trayectorie de observadores en reposo en* S' .

V.7.2 El Efecto Doppler

Desde los años 1920 sabemos que las galaxias están alejándose entre ellas a una velocidad promedio proporcional a la distancia que las separa. La identificación del emisor y la frecuencia $\nu \equiv 1/T$ de la radiación que proviene de estas galaxias, revela que nos llegan con un cierto corrimiento en el valor de la frecuencia $\nu' = \nu + \Delta\nu$. Esta diferencia, más algunos resultados básicos de cosmología, nos permite estimar la velocidad con que se están alejando. Este fenómeno se denomina *corrimiento al rojo*, que resalta el hecho que las galaxias se alejan. Si las galaxias estuviesen acercándose, el corrimiento cambiaría de signo y se denominaría *corrimiento al azul* (la frecuencia aumenta).

Una explicación cualitativa de lo que aquí sucede es la siguiente: suponga que enviamos una señal a un habitante de dicha galaxia, ésta consiste en dos destellos de luz separados por un intervalo T. Como, desde nuestro punto de vista, la otra galaxia se aleja, el segundo destello debe recorrer un trayecto más largo que el primero y por lo tanto demora más en alcanzar la galaxia y en ser detectado por uno de sus habitantes. Este retraso depende linealmente del lapso que media entre ambas señales T y de la velocidad relativa entre ambos medios. Si designamos como $k\,T$, el intervalo con que se recibe la señal, donde $k = k(v)$ es una función que sólo depende de la velocidad de separación de estos dos objetos.

Utilizaremos esta función $k(v)$ para desarrollar las ecuaciones que caracterizan al relatividad especial. Toda la relatividad especial es comparar las mediciones de un sistema inercial con las de otro que se desplaza con velocidad relativa.

Esta función k tiene una interpretación física bien concreta: es el efecto Doppler relativista, de esta manera, cuando en la siguiente sección calculemos el valor de k, habremos encontrado el valor que debemos utilizar para determinar el corrimiento de la frecuencia de un objeto que se aleja (o acerca) en forma relativista.

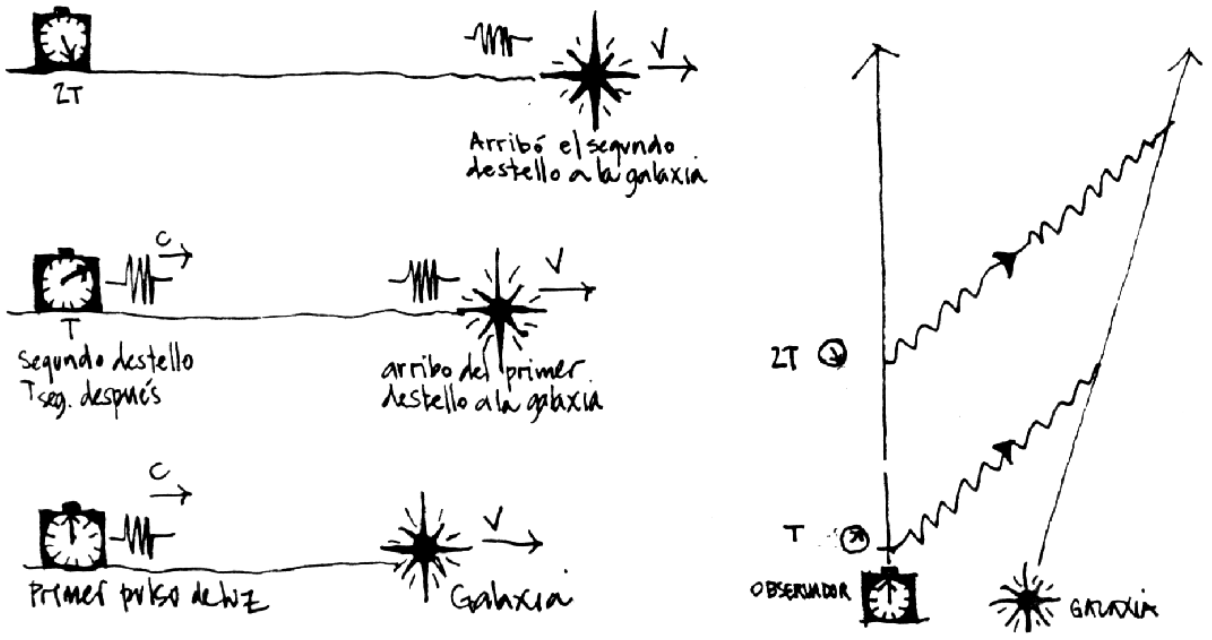


Figure V.24: En la figura de la izquierda se ilustra cómo un fotón alcanza una fuente en movimiento. A la derecha se incluye el diagrama de Bondi para este mismo caso.

La función k: el factor Doppler

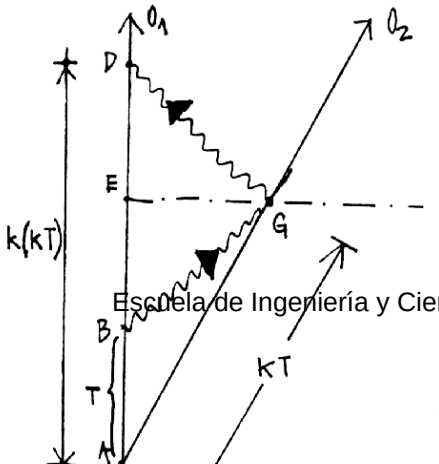
El desarrollo adoptado aquí es una versión más detallada de lo expuesto por R. Wald [13] en su libro.

A continuación calcularemos analíticamente la relación entre las mediciones hechas en distintos sistemas de referencia. Usaremos el método gráfico. Primero calcularemos el efecto Doppler relativista, cuyo nombre se refiere al cambio de color (o longitud de onda) que detecta un observador en reposo cuando un rayo de luz (o un sonido) es emitido desde una fuente en movimiento, o viceversa, el observador está en movimiento y la fuente emisora en reposo. Para que este fenómeno ocurra debe existir una velocidad relativa V entre la fuente y el observador.

Cálculo analítico del factor k

Consideremos los eventos indicadoe en la figura **??** y escribamos las transformaciones de Lorentz que las caracterizan.

$$t'_G = \gamma(t_G - \frac{vx_G}{c^2})$$



De la figura **??** se desprende que la coordenada del punto G es

$$x_G = v \cdot t_E$$

puesto que $t_G = t_E$ son eventos simultáneos en el sistema S. Reemplazando este resultado tenemos

$$t'_G = \gamma(t_E - \frac{v^2}{c^2}\, t_E) = \frac{t_E}{\gamma} \qquad \text{(V.11)}$$

Por otra parte $t_E = T + t_{BE}$, pero t_{BE} es lo que demora la luz en ir desde $x = 0$ hasta x_G, luego

$$t_{BE} = (x_G - 0)/c = (x_B - 0)/c, \quad \Rightarrow \quad t_{BE} = \frac{x_G}{c} = \frac{v}{c}\, t_E$$

De aquí $t_E = T + (v/c)\, t_E$, y ordenando tenemos

$$(1 - \frac{v}{c})t_E = T$$

Reemplazando t_E en la expresión previa V.7.2, obtenemos

$$t'_G = \frac{T}{\gamma\,(1 - v/c)} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}\, T = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\, T. \qquad \text{(V.12)}$$

De acuerdo a la definición del efecto Doppler y su correspondencia con los tramos señalados en la Figura **??** , la expresión para el factor k es

$$t'_G = k\, T, \text{ con } k = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \qquad \text{(V.13)}$$

Ejemplo

A parti de esta última ecuación, recupere la transformación de Lorentz que relaciona t'_G con t_G y x_G.

$$
\begin{aligned}
t'_G &= \sqrt{\tfrac{1+v/c}{1-1/2}}\,T = \\
&= \sqrt{\tfrac{1+v/c}{1-v/c}}\,(t_G - \tfrac{x_G}{c}) \\
&= \sqrt{\tfrac{1+v/c}{1-v/c}}\,(t_G - \tfrac{x_G}{c}) \\
&= (1+v/c)\gamma(t_G - \tfrac{x_G}{c}) \\
&= \gamma\, t_G - \gamma\tfrac{v}{c^2}\, x_G + \tfrac{v}{c}\,\gamma\, t_G - \tfrac{x_G}{c}\,\gamma \\
&= \gamma(t_G - \tfrac{v x_G}{c^2}) + \gamma(\tfrac{v}{c}\, t_G - \tfrac{x_G}{c}) \\
&\quad +\gamma(\tfrac{v}{c}\, t_G - \tfrac{v t_G}{c} \\
t'_G &= \gamma(t_G - \tfrac{v}{c^2}\, x_G >
\end{aligned}
$$

□

Método Geométrico

En A dos observadores (puntos) inerciales O_1 y O_2, se cruzan y sincronizan sus relojes. De acuerdo al reloj de O_1, T segundos más tarde, éste envía un rayo de luz a O_2. Este lo recibe en el instante que definimos como $k\,T$. Postulamos aquí que cualquier diferencia en los intervalos puede ser explicada en base a esta función $k(v)$. La función k sólo puede depender de la velocidad relativa v, puesto que es el único parámetro del problema: $k = k(v) \geq 0$. Además, si $v \to 0$, $k \to 1$, puesto que no hay velocidad relativa en este caso.

Si a su vez O_2, al recibir la señal la responde inmediatamente, entonces O_1 la recibirá en el instante $k(kT)$.

El último argumento se apoya en el postulado # 3, que señala que ambos sistemas son equivalentes, de forma que si al ir de O_1 hasta O_2 el intervalo de tiempo aparece multiplicado por un factor k, lo mismo debe suceder al viajar de O_2 hacia O_1. Ambos son sistemas inerciales, indistinguibles y sin-

cronizaron sus relojes en A. Cada vez que un observador (S) detecte que otro sistema de referencia (S') se está alejando, los intervalos de tiempo se relacionarán con la función $k(v)$ como se ha especificado aquí.

La distancia espacial $\overline{EG}$ que aparece en el gráfico se puede calcular de dos formas:

Primer Método: podemos calcular cuánto se demoró el rayo de luz en llegar al punto G que, como es simultáneo con E en el sistema S, es equivalente a calcular el tiempo que marca el reloj del observador en E. Este valor es:

$$\overline{EG} = c{\cdot}\frac{DB}{2} = c{\cdot}[k^2{-}1]\,\frac{T}{2}. \qquad \text{c} \equiv \text{velocidad de la luz.} \tag{V.14}$$

Recuerde que la simultaneidad es un concepto relativo en esta teoría, por lo tanto cuando decidimos comparar dos eventos simultáneos para el observador O_1, hemos quebrado la simetría entre los dos sistemas inerciales O_1 y O_2. Los resultados son válidos sólo para el sistema de referencia O_1.

Volviendo a nuestro cálculo, sabemos que la distancia que se alejó O_2 a partir del punto en que ambos coincidían, (A) es:

$$\overline{EG} = v \cdot \overline{AE} = v \cdot (k^2 + 1)\,\frac{T}{2}. \tag{V.15}$$

Igualando estas dos expresiones, obtenemos:

$$v \cdot [k^2 + 1]\,\frac{T}{2} \quad = \quad c(k^2 - 1)\frac{T}{2}, \qquad \text{despejando (v/c), se obtiene:}$$

$$\beta \equiv \left(\frac{v}{c}\right) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \qquad k^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Notemos que, si $k = 1$, entonces $\beta \to 0$ lo cual equivale a que la velocidad de la luz c, sea infinita. Este es el límite Newtoniano: en este caso las

transformaciones de Lorentz, que deduciremos más adelante, toman la forma de las transformaciones de Galileo (V.1).

Ya hemos encontrado k como función de la velocidad. Podemos explicar brevemente como podemos detectar la velocidad de un objeto mediante pulsos enviados con un intervalo de tiempo T. Estos al rebotar en el objeto que se aleja con velocidad v_o vuelven en un intervalo $(k^2-1)\cdot T$. Al medir este intervalo y conociendo T y la expresión –ya obtenida– de k^2 podemos conocer la velocidad. Este es el principio físico que regula el funcionamiento de los radares de velocidad de la policía.

Para dos sistemas alejándose: $$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Para dos sistemas acercándose: $$\overline{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Ejercicio

Demuestre que:

$k+\frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2\,\gamma,$ donde hemos definido $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

V.7.3 Dilatación del Tiempo

Usando la definición del factor $k(v)$, podemos demostrar que el tiempo transcurre más lentamente para un

observador que se aleja de nosotros con velocidad constante. En este caso haremos las comparaciones entre dos eventos que son simultáneos con respecto a nosotros, el sistema de referencia en *reposo*. De esta forma nuestros resultados no son universales, son sólo válidos en nuestro sistema de referencia. La razón: la simultaneidad es *relativa*.

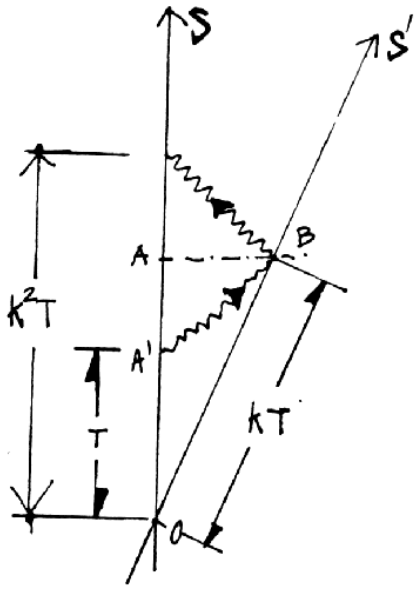
De la Figura, los eventos A y B, son simultáneos en el sistema S. Si definimos como $\Delta\, t|_S = OA,$ los segundos que marca el reloj del observador en reposo con respecto a S, debemos evaluar la cantidad $\Delta\, t' \equiv \Delta\, t|_{S'} = OB$: es decir ¿qué tiempo indica el reloj que se mueve con el observador S'?

De la geometría de la Figura obtenemos que:

$$OA = \frac{k^2-1}{2}\, T + T = \frac{k^2+1}{2}\, T.$$

El reloj del observador S', que se aleja de A, al pasar frente a B marca (de acuerdo a la definición de k)

$$OB = k\, T.$$



Si comparamos los tiempos:

$$OA \equiv \Delta t\, |_S = \frac{k^2+1}{2}\, T,$$

$$\text{con} \quad OB \equiv \Delta t'\, |_{S'} = k\, T,$$

despejando T de las ecuaciones anteriores, obtengo

$$\Delta t\, |_S = \frac{\Delta t'\, |_{S'}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad \text{(V.16)}$$

Esta es la dilatación del tiempo de acuerdo al observador en reposo en S. Si $\Delta t' = 1,$ entonces $\Delta t > 1,$ el tiempo transcurre más lentamente en el sistema S'. □

El hecho que el tiempo transcurre más lentamente en el sistema que está en movimiento, *no* determina si un sistema se encuentra en reposo absoluto con respecto a otro. La razón es la siguiente: al comparar los tiempos $\Delta t\, |_S$ y $\Delta t'\, |_{S'}$ para dos eventos *simultáneos en* S, estamos quebrando la simetría entre los sistemas S y S', y de esta forma obtenemos el resultado asimétrico ya señalado.

A continuación se demuestra que la expresión para la dilatación del tiempo es simétrica: el observador en reposo en S', midiendo dos eventos simultáneos en su sistema de referencia encuentra que el tiempo transcurre más lentamente en S.

Ejercicio

Repetir el mismo procedimiento para comparar lo que marcan los relojes, *pero ahora midiendo eventos simultáneos en* S'. Obtenga:

$$\Delta t \mid_S = \frac{\Delta t' \mid_{S'}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \square$$

¿Realmente se atrasa el tiempo para un observador en movimiento?

La palabra *realmente* utilizada en la pregunta parece esperar una respuesta que traiga a escena el tiempo absoluto. Al formularla no se hace mención al sistema de referencia que se considera.

La respuesta es que este resultado sólo señala que el sistema de relojes sincronizados por S' se atrasan con respecto a aquellos sincronizados por S. Pero este resultado, de acuerdo a S' no permite concluir nada puesto que, en su opinión, los relojes de S no están sincronizados. Para ilustrar esto, podemos ubicarnos en el sistema de S' y considerar que S está retrocediendo con respecto a nosotros y repetir el mismo cálculo. Lo que obtenemos es que ahora el reloj de S se atrasa con respecto al de S'.

De aquí se desprende que este experimento no permite concluir que el tiempo transcurre diferente en ambos observadores.

Para lograr una respuesta definitiva con respecto a la evolución del tiempo en dos sistemas de referencia en movimiento relativo, debemos comparar *los mismos relojes dos veces*. Con esta consideración, ya no es posible refutar un resultado debido a la imposibilidad de sincronizar los relojes de los dos sistemas de referencia. En la siguiente sección daremos una respuesta concluyente a este problema.

V.7.4 La contracción del largo de una barra

Definición de longitud

Para medir la *longitud de una barra* un observador en reposo con respecto a ella, se ubica en el medio de la barra y mide el tiempo que demora un rayo de luz en viajar hacia un extremo y volver al punto de partida.

¿Cómo sabemos que estamos en el centro de la barra?

Antes de proceder a medir la longitud de la barra el observador envía en forma simultánea dos rayos de luz hacia ambos extremos de la barra donde serán reflejados. Si recibe de vuelta ambos simultáneamente entonces está justo en el punto medio de la barra. De otra forma deberá desplazarse hasta lograrlo.

¿Por qué medir longitudes con un rayo de luz y no con un metro patrón?

Porque la velocidad de la luz es una constante universal. De esta forma los resultados obtenidos utilizando la luz son válidos en cualquier sistema de referencia inercial.

Contracción del largo

La inclusión del postulado # 3, indica que sólo está definida la distancia espacial –o el largo entre los extremos de una regla– entre dos eventos que ocurren simultáneamente en un sistema de referencia.

Estudiaremos la contracción del largo usando el álgebra de los k.

Por definición la longitud es la distancia *espacial* entre dos eventos simultáneos. Aquí vamos a comparar el largo L' de un barra en reposo en un sistema S', con el largo de esta misma barra, pero medido en el sistema S, que lo denominamos L. La configuración se indica en la Figura adyacente.

El método que usaremos nos permitirá manipular coordenadas en distintos sistemas de referencia.

Calculemos las coordenadas del evento N en el sistema S. De la Figura se desprende que

$$c\,\Delta t_+ = (L + v\,\Delta t_+), \quad \text{y que}$$

$$c\,\Delta t_- = (L - v\,\Delta t_-).$$

Este resultado se obtiene siguiendo la trayectoria del punto M en la Figura. En $t = 0$ su coordenada espacial es L, en Δt_+ es $[L + v\,\Delta t_+]$, puesto que se está alejando de S.

En Δt_+, la barra está representada por NN' según el observador S. En ese instante se envía un rayo de luz hacia el origen de la barra. Lo alcanza en Δt_- segundos más tarde y la distancia que debe

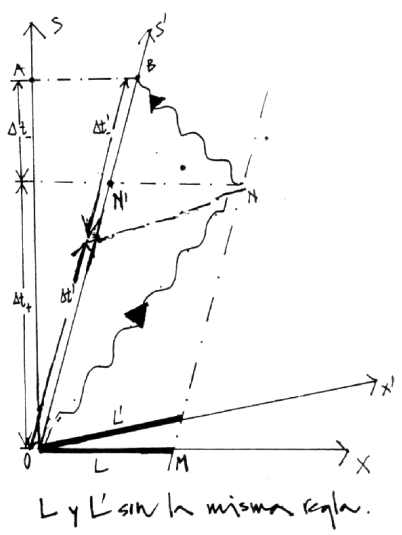


Figure V.25: *Qué mide el observador S y qué mide el observador S'. Líneas de simultaneidad en cada sistema de referencia.*

recorrer es el largo de la barra menos lo que ésta se acerca, en el intervalo de tiempo Δt_-, una distancia $L - v\,\Delta\,t_-$. Despejando $(\Delta\,t_+ + \Delta\,t_-)$ de estas dos expresiones obtenemos:

$$\Delta\,t_+ + \Delta\,t_- = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2c\,L}{c^2 - v^2}. \quad [i)]$$

Como los eventos marcados por A y B son simultáneos, utilizando los resultados del último ejercicio, tenemos:

$$\Delta\,t_+ + \Delta\,t_- = \frac{\Delta\,t'_+ + \Delta\,t'_-}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad [ii)]$$

Finalmente, como en el sistema S', el rayo de luz parte del origen de la barra en $t_0 = 0$ y vuelve a S' en B, despúes de rebotar en el otro extremo de la barra, entonces tenemos:

$$c\,[\Delta\,t'_+ + \Delta\,t'_-] = 2\,L' \quad [iii)]$$

Despejando $(\Delta\,t_+ + \Delta\,t_-)$ de las ecuaciones [i)] y [ii)], e incluyendo el valor de $(\Delta\,t'_+ + \Delta\,t'_-)$ obtenido en [iii)], tenemos la relación deseada entre L y L':

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Comprobamos que $L < L'$, al medir el largo de una barra en movimiento, medimos un largo menor. Como hemos señalado, este hecho es consecuencia de que la simultaneidad es relativa. A la barra no le pasa absolutamente nada, no se comprime.

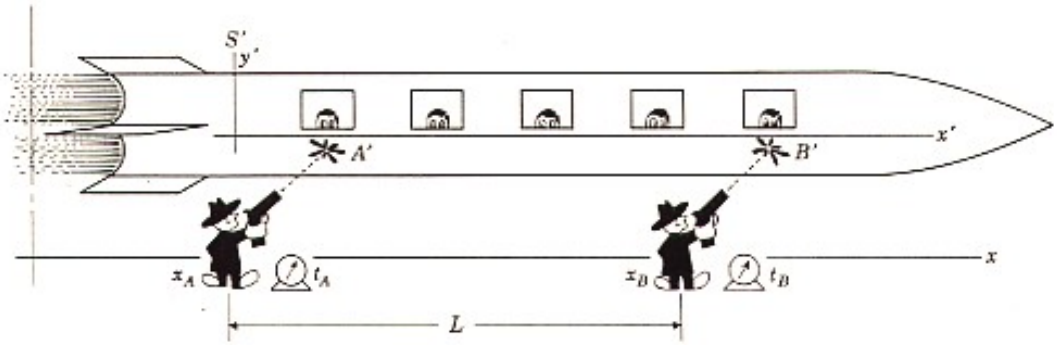
V.7.5 El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein

Definimos VER cuando todos los fotones emitidos desde el objeto que nos interesa llegan simultáneamente a nuestro ojo. Es claro que los puntos más alejados del ojo deben emitir antes los pulsos de luz para llegar al mismo tiempo que aquellos ubicados en una posición más favorable.

Medir es una operación que involucra los siguientes elementos: un sistema de referencia inercial determinado, una red de relojes sincronizados en dicho sistema de referencia, cada uno con una cámara que señale un evento, el tiempo y sus coordenada. El observador en este sistema recopila los datos y compara. Por ejemplo si quiere medir el largo de una barra en movimiento con respecto a su sistema de referencia, debe ubicar dos fotos, una en que aparezca el comienzo de la barra y otra con el otro extremo de la misma barra. Ambas deben indicar el mismo tiempo (simultáneidad). La diferencia entre las coordenadas permite conocer el largo de la barra.

Ejemplo

Un tren S' se mueve con velocidad $v = 0.6\,c$ en la dirección $+x$ con respecto a un observador en reposo en el sistema S. Dos rufianes con sendos atomizadores, se ubican a $L = 5m$ de distancia en el sistema S. Ambos rufianes disparan simultáneamente de acuerdo a relojes sincronizados en el sistema S . Al gatillar el atomizador aparecen 2 manchas A' y B' en el tren. Los rufianes aseguran que la distancia entre las manchas es $L = 5m$ (La distancia que separa los atomizadores del tren es *despreciable*).



a) Los pasajeros del tren llevan sus relojes sincronizados. De acuerdo a los pasajeros del tren ¿quién disparó primero?

b) ¿Cuál es la distancia entre las dos manchas medidas por un observador en *reposo con respecto al tren*?

c) ¿Cuál es la distancia entre los dos rufianes, de acuerdo a los pasajeros en *reposo con respecto al tren*?

Respuesta

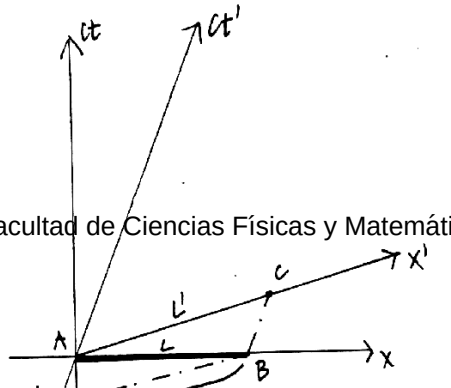
Del gráfico se desprende que B sucede antes que A, según un observador en la nave. Calculemos la diferencia de tiempo. Debemos comparar los eventos A y B en los dos sistemas de referencia. En el sistema fijo a la tierra los eventos A y B son simultáneos y ocurren a una distancia L:

$\Delta x = L$, y $\Delta t = 0$.

En el tren, las coordenadas son

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}) = -\gamma\,\frac{v\,L}{c^2}.$$

Donde $\Delta t' \equiv [t'_B - t'_A] = -\gamma\frac{L\,v}{c^2}$.



$$c\,t'_B = 0 - 5\,\frac{3}{5}\,\frac{5}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$t'_B = 1,25 \times 10^{-8}.$$

Las dos manchas una vez en el tren se propagan rígidamente con él, es decir su línea de universo nace en A y B *pero* a partir de entonces se propaga paralela a la línea t'. La distancia entre las manchas, medida con un metro por un observador en la tren es AC, que definimos como L'.

¿Cuánto vale L'?

i) *Primer método.*

De acuerdo a las transformaciones de Lorentz, la coordenada del punto C en función de las coordenadas del mismo evento en tierra, son:

$$x'_c = \gamma\,[x_c - v(t_c - t_A)]\,,$$

pero x_c es la posición en el sistema S del extremo de la barra después que ha transcurrido un intervalo $(t_c - t_B) \equiv (t_c - t_A)$, su valor es:

$$x_c = x_B + v\,(t_c - t_A)\,,\ \text{además}\ x_B \equiv L\,,$$
$$x_c = L + v\,(t_c - t_A),$$

de modo que:

$$x'_c = \gamma\,[L + v(t_c - t_A) - v(t_c - t_A)] = \gamma L\,.$$

$$L' = \gamma\,L.$$

ii) *Segundo método.*

C es la proyección de la coordenada x' de B. Eso es precisamente lo que representan las Transformaciones de Lorentz: una proyección del vector (AB en este caso, del sistema (x,t) al sistema (x',t'). La proyección de B en x' es simplemente $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma\,L$, ($\Delta t = 0$, puesto que AB es simultáneo S). Además $x'_B = x'_C$ puesto que

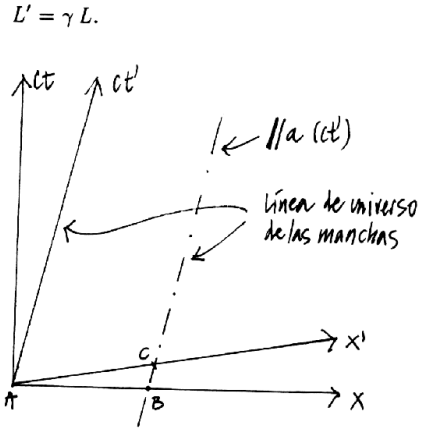


Figure V.27: Distancia entre manchas.

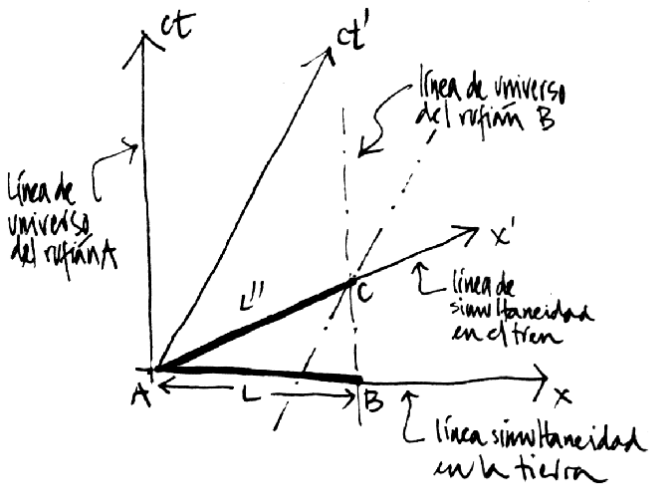
B y C están en la línea de universo de un observador en reposo en S'. $L' = 1.25L = 6m$. Note que $AC > AB$ $AC_1 > A_1B$.

c) La línea de universo de los dos rufianes son rectas verticales en el diagrama de espacio-tiempo fijo en la tierra (S) .

A y B señalan la posición de los rufianes. Esta distancia según un observador en el tren es la intersección entre la línea de universo de B y la línea de simultaneidad de un observador en el tren (por ejemplo : el punto C. La coordenada de C en el sistema (t', x') :

$$
\begin{aligned}
x'_c = &\quad \gamma\left[x_c - (t_c - t_B)v\right], \\
x_c = &\quad x_B = x_B - 0 = x_B - x_A = L, \\
x'_c = &\quad x'_c - x'_A = L'', \\
L'' = &\quad \gamma\left[L - v(t_c - t_B)\right] \\
\text{pero} &\quad t'_c - t'_A = \gamma\left[(t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_c - x_A)\right]
\end{aligned}
$$

A y C son simultáneos en S', luego: $\gamma\left[(t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}L\right]$



$$
\begin{aligned}
t_B &\equiv t_A \quad (\text{simultáneo en } S) \\
x_c &\equiv x_B \quad \text{en } S
\end{aligned}
$$

$$L'' = \gamma \left[L - \frac{v^2}{c^2} L \right] = \frac{1}{\gamma} L \,. \square$$

Ejemplo

Sean S y S', dos sistemas inerciales que coinciden en un instante. S' se mueve con respecto a S en la dirección $(x+)$, con una velocidad v = constante. En el origen de S' existe una pantalla de cine que proyecta una película de t' minutos, la cual es vista por un observador que se encuentra en el origen de S. ¿ Cuánto tiempo dura la película para el observador en S? Suponer $v = 0,6$ c.

Utilizando las transformaciones de Lorentz, se obtiene:

$$\text{Para S':} \qquad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x),$$

$$\text{Para S:} \qquad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x').$$

Sabemos lo que dura la película en S'$\Rightarrow$ $\Delta t'$ es conocido (con respecto a las mediciones que hace un observador en S'). Además $\Delta x' = 0$ (la pantalla permanece fija en S'). Luego $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Sin embargo, debemos calcular el tiempo que demora en llegar a S el último fotón de la pantalla.

i.e. $\Delta t^* = \dfrac{\Delta x}{c}$ ya que cuando en S' terminó la película, ésta aún no ha finalizado en S.

Por otra parte $\Delta\, x = \gamma(\Delta\, x' + v\, \Delta t') = \gamma v\, \Delta t'$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \gamma\, \Delta t' + \Delta t^* = \gamma\, \Delta t' \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 2\, \Delta t'$$

V.7.6 El tiempo transcurrido depende de la trayectoria

A continuación demostraremos que el tiempo no es absoluto y por lo tanto transcurre de forma diferente para distintos observadores en movimiento relativo.

Este problema tradicionalmente se conoce como la paradoja de los gemelos. Consiste lo siguiente: uno de los gemelos permanece en Tierra mientras el otro emprende un viaje interestelar y posteriormente, al volver, se compara con su hermano.

La dificultad técnica que plantea este problema es la aceleración que experimenta el gemelo interestelar en el momento de invertir el sentido en la dirección de su viaje con el objeto de retornar. Las expresiones que hemos usado no se pueden aplicar de acuerdo a los postulados, que excluyen los sistemas acelerados. Para eliminar este problema usaremos tres sistemas inerciales sincronizados y concluiremos que el tiempo, efectivamente transcurre más lentamente en uno de los sistemas de referencia.

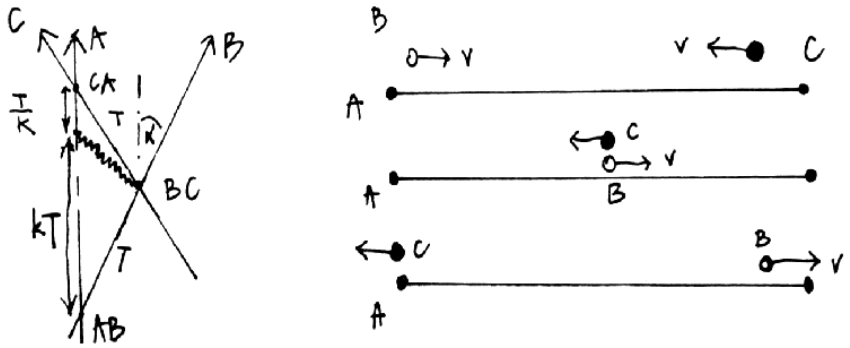


Figure V.28: *Nos ubicamos en A, sistema en reposo. B se aleja de A con una velocidad relativa V y C se aproxima hacia A con una velocidad V (según A). A la izquierda se indica el gráfico ct versus x y a la derecha el esquema habitual con la coordenada x en el eje horizontal.*

Antes de plantear este problema hagamos un ejercicio cuyo resultado será de utilidad más tarde.

Encontramos la expresión de k en función de v en las páginas anteriores. Note que $k(-v) = 1/k(v)$, es decir que cuando dos observadores se **a**proximan debemos usar $(1/k)$ en lugar de k para relacionar los intervalos correspondientes de tiempo. Para demostrar que el tiempo **n**o es absoluto y depende del camino recorrido necesito 3 observadores (o relojes) A, B y C.

En el desarrollo del problema distinguimos 3 eventos:

$\rightarrow$ A coincide con B definido como: AB

$\rightarrow$ B coincide con C definido como: BC

$\rightarrow$ C coincide con A definido como: CA

Denominamos T al tiempo indicado por **e**l reloj de B que transcurre entre el evento: [A coincide con B] y el otro evento [B coincide con C]. El intervalo que transcurre entre el evento: [B coincide con C] y el evento [C coincide con A] es también T, según **e**l reloj de C. Esto se puede notar en la Figura, las líneas de universo de C y B son simétricas con respecto a la vertical, porque los trazos que van desde [AB], hasta [BC] y desde [BC] hasta [CA], son idénticos y por lo tanto ambos toman el valor T.

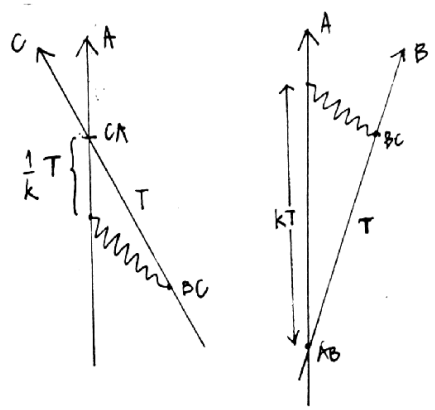


Figure V.29: El factor k y 1/k aparecen cuando los observadores se alejan y cuando se están acercando, respectivamente.

De acuerdo al álgebra de los k el tramo entre los eventos $[AB]$ y $[AC]$ es $[k\,T + T/k]$.

Por otra parte, si en $[BC]$, el observador B accionó el reloj de C y lo dejó marcando T segundos, cuando C llegue al encuentro con A marcará un tiempo $2\,T$. Comparando ambas cantidades, podemos concluir:

$$(k + \frac{1}{k})\, T \geq 2\, T$$

Estas expresiones son iguales sólo si $k = 1 \Rightarrow v_0 = 0$, ó $c = \infty$.

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 2.$$

De esta forma el tiempo que marca el reloj C es menor que el indicado por A. El tiempo no es absoluto, no transcurre igual para todos los observadores.

En el caso de los gemelos la respuesta es similar a la obtenida aquí. El gemelo de viaje llega más joven al encuentro con su hermano. La diferencia de edad no es la que obtuvimos, puesto que es necesario considerar la aceleración que experimenta durante parte del viaje. En este caso no tiene sentido intentar utilizar el argumento de la simetría de los sistemas inerciales para invalidar el resultado. El gemelo que estuvo de viaja sabe perfectamente que su sistema de referencia, al menos por unos segundos, no fue inercial.

También se puede objetar que en el caso propuesto no se comparan los mismos relojes en A, pero lo esencial aquí es que el reloj C al compararlo con el de A, traía información acerca del tiempo empleado por un reloj B al recorrer el trayecto que le correspondía. Se demostró entonces que el tiempo contabilizado a lo largo del camino AB $\rightarrow$ BC $\rightarrow$ y CA, es más corto que el tiempo contabilizado por S entre AB y CA.

V.7.7 Las transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz son las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un evento P = $(t_p,\, x_p)$, en un sistema inercial S, con las coordenadas que describen el mismo evento P, en otro sistema S': P = $(t'_p,\, x'_p)$.

Constituyen el equivalente a las transformaciones de Galileo para ir de un sistema inercial a otro con velocidad v_0.

El punto P es lo que hemos denominado un evento en el espacio–tiempo. Con respecto al observador A, el punto P tiene coordenadas $P(t, x)$ puesto que consideramos sólo dos coordenadas una espacial y otra temporal, para mantener la simplicidad. En la figura, el origen del tiempo se ubica arbitrariamente en cualquier punto de la línea de universo de A.

El sistema de coordenadas se ubica con el observador A, éste tiene coordenadas $(t, 0)$. El punto Q es simultáneo con P y por lo tanto ambos tienen la misma coordenada temporal en el sistema A.

$$Q = Q(t, 0), \qquad P = P(t, x).$$

Para enviar un rayo de luz desde A hasta P, debo gatillar el haz de luz en el instante $(t - x/c)$. Dicho rayo rebota en P y alcanza A en el instante $(t + x/c)$.

La cantidad (x/c) tiene dimensiones de tiempo.

Supongamos que existe otro observador inercial B, que asigna al evento P, las coordenadas (t', x'). La relación entre (t, x) y (t', x'), que respeta los postulados de la relatividad especial, se denominan las transformaciones de Lorentz. Ubicamos el origen del tiempo en la intersección de las líneas de universo de A y B. Al enviar un rayo de luz desde A, este cruza la línea de universo de B en $(ct' - x')$ y posteriormente alcanza el punto P. De vuelta toca la línea de universo de B en $(ct' + x')$ y A en $(ct + x)$.

Usando el método de la función k, podemos relacionar ambos sistemas de referencia.

$$ct' - x' = k\,(ct - x),$$

Este caso corresponde a la relación que existe entre el tiempo que transcurrió entre el origen del tiempo (intersección de las líneas de universo de A y B) y el instante en que se envía el primer rayo desde A y el tiempo que tarda B en recibirlo: $T' = k\,T$.

El siguiente caso, corresponde al rayo de luz reflejado desde el punto P y relaciona el tiempo que ha transcurrido según el reloj de B cuando recibe el rayo de luz, con el tiempo que ha transcurrido para A cuando recibe de regreso el mismo rayo de luz:

$$(ct + x) = k\,(ct' + x')$$

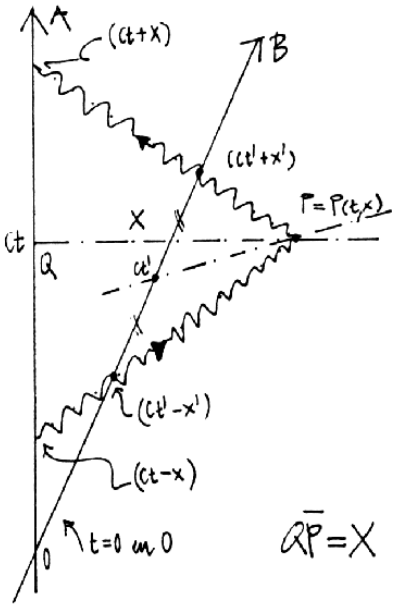


Figure V.30: Un rayo de luz cruza a los dos observadores.

De estas dos ecuaciones se puede despejar x' y t' como funciones de x y t.

$$2\,c\,t' = k(ct - x) + \frac{1}{k}\,(ct + x),$$

$$2\,x' = -k\,(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

pero recordando que:

$$\frac{1}{2}(k \pm \frac{1}{k}) = \begin{cases} \gamma \\ \\ \beta\,\gamma \end{cases} \qquad \text{con} \qquad k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Donde hemos definido $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/[\sqrt{1-\beta^2}]$.

Despejando x' y t' de las ecuaciones anteriores obtenemos:

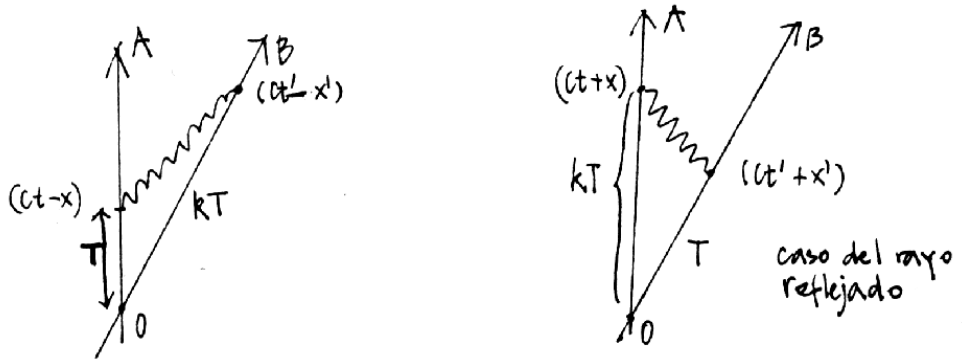


Figure V.31: *En la figura de la izquierda debemos identificar T con (ct - x) y kT con (ct'-x').*

$$\boxed{\begin{aligned} \text{x'} &= \gamma\{x - v\,t\}, \\ \text{t'} &= \gamma\{t - \tfrac{v}{c^2}\,x\}. \end{aligned}} \qquad \text{(V.17)}$$

V.8 El retorno de lo absoluto, los invariantes.

Se puede verificar, a través de las transformaciones de Lorentz, que la combinación

$$(ct')^2 - x'^2 = ct^2 - x^2$$

es un *invariante*: posee el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Esta *distancia* la denominamos $(\Delta s)^2$. Aquí hemos encontrado una cantidad que tiene un valor independiente del sistema de referencia, es el equivalente al tiempo absoluto en la teoría de Galileo y Newton.

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Sabemos por experiencia lo importante que son las cantidades conservadas en mecánica, electricidad...etc.. El equivalente en relatividad especial son los *invariantes*.

Como ejercicio, podemos reobtener la dilatación del tiempo (que el reloj en B funciona más lento que un reloj, idéntico, en A). O_1Q y O_2P son líneas (o planos en tres dimensiones) de simultaneidad con respecto al observador A. Llamemos $\Delta s = \overline{PQ}$.

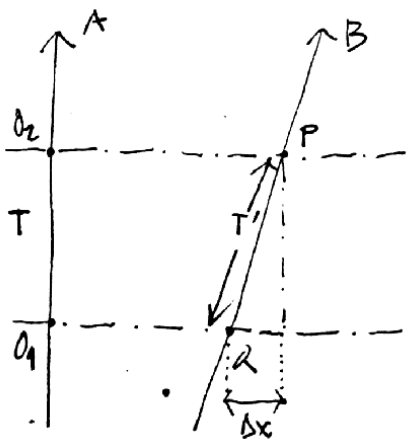


Figure V.32: .

$\Delta s^2 = c^2\, T'^2$, puesto que P y Q se ubican en la línea de universo de B y por lo tanto $x'_P = x'_Q$.

$$\Delta s^2 = \overline{PQ}^2 = c^2(t_P - t_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = c^2\, T^2 - (\Delta x)^2.$$

Hemos definido $\Delta x = x_P - x_Q$.

Como $(\Delta s)^2$ es un **i**nvariante,

$$\Delta s^2 = c^2\, T'^2 = \; c^2\, T^2 - (\Delta x)^2$$

$$cT' = \; cT\left[1 - (\frac{\Delta x}{cT})^2\right]^{1/2},$$

pero $\Delta x/T = V_o$, velocidad con que B se aleja de A.

$T' = T\sqrt{1-\beta^2} \;\Rightarrow\; T = T'/\sqrt{1-\beta^2}$.

Si $T = 1$ s, $T < 1$, puesto que $\beta \leq 1$ y $1/\sqrt{1-\beta^2} \geq 1$. Esto se denomina la dilatación del tiempo.

V.9 Composición de velocidades

V.9.1 Velocidades paralelas.

El método de los productos de la función k para obtener la suma de las velocidades no es el más sencillo. Sirve para ilustrar que todas las fórmulas de la relatividad especial se pueden obtener a través de su uso.

A continuación incluimos una derivación alternativa.

Para ello necesitamos usar el Postulado $\#$ 5 planteado previamente.

Supongamos que un cuerpo P viaja con velocidad u' con respecto a un sistema S'. A su vez, este sistema viaja con una velocidad v con respecto a s. Queremos calcular la velocidad u de este cuerpo con respecto al sistema s.

Designamos las coordenadas de P con respecto a S' como (t'_p, x'_p). Las coordenadas de este punto con respecto al sistema s son (t_p, x_p). La relación entre ambas coordenadas está dada por la transformación de Lorentz (donde hemos suprimido el subíndice p)

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t),\\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x).\end{aligned}$$

Por definición

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}\,, \qquad \text{la velocidad } P \text{ con respecto al sistema } S'.\text{Por otra parte:}$$

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \text{ la velocidad de } P \text{ c/r al sistema } S$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}}$$

Despejando u de esta ecuación

$$\begin{aligned}u'(1 - \frac{v \cdot u}{c^2}) &= u - v,\\ (1 + \frac{v \cdot u'}{c^2})u &= u' + v,\end{aligned}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}$$

Esta es la ley de composición de velocidades. Es directo comprobar que si $u' = c\,,\, v = c \Rightarrow u = c$.

No es posible lograr velocidades mayores que la velocidad de la luz sumando velocidades con esta ecuación relativista.

Velocidades Perpendiculares

Supongamos que el observador en S' se mueve en un eje perpendicular a la dirección de desplazamiento de los dos sistemas de referencia, digamos el eje y. La velocidad relativa, de acuerdo a un observador en S es:

$$\frac{\Delta\, y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta\, y}{\gamma\,[\Delta\, t - \frac{v\,\Delta\, x}{c^2}]},$$

dividiendo ambos factores por $\Delta\, t$ y definiendo

$$v'_y \equiv \frac{\Delta\, y'}{\Delta t'}, \text{y}$$

$$v_y \equiv \frac{\Delta\, y}{\Delta t}, \text{ obtenemos:}$$

$$\frac{\Delta\, y'}{\Delta t'} = v'_y = \frac{v_y}{\gamma\,[1 - \frac{v^2}{c^2}]} = \gamma\, v_y$$

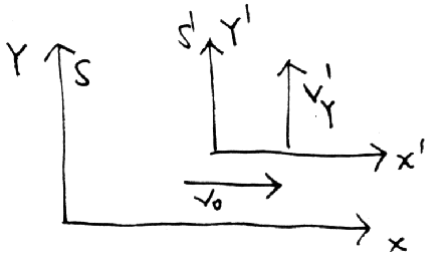


Figure V.33: .

Esta es la fórmula que relaciona una velocidad perpendicular a la dirección de movimiento en el sistema S', con la velocidad medida desde el sistema de referencia en reposo.

El objetivo del siguiente ejemplo es recordar que cuando las mediciones se realizan en el mismo sistema de referencia, toda la cinemática y la geometría de un curso de Introducción a la Física son válidas. Sólo cuando queremos relacionar medidas en sistemas de referencia inerciales diferentes es necesario recurrir a las transformaciones de Lorentz y a la geometría del espaciotiempo.

Ejemplo

Un sistema S' está en movimiento uniforme con respecto a otro, S. En S' se ubica una barra que forma un ángulo θ' con respecto a la dirección del movimiento. ¿Cuál es la dirección de la barra medida por un observador en S.

De la figura se obtiene:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta y'} = \cot\, \theta'$$

Usamos esta relación porque $\Delta y'$ es perpendicular al movimiento y por el Postulado # 5 : $\Delta y' = \Delta y$.

Cualquier diferencia en el valor del ángulo que aparezca en S proviene de la relación entre $\Delta x'$ y Δx. Gráficamente lo que mide S se ve en la figura V.34:

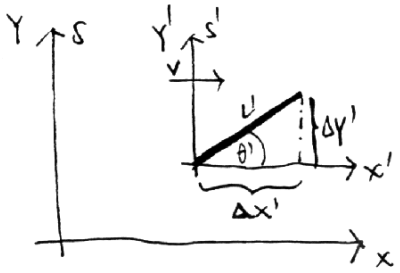


Figure V.34: .

Coordenada de A :

$$x'_A = \gamma\, x_A \quad (\text{puesto que } \Delta t = 0 \text{ en } S)$$

$$x'_A \equiv x'_c \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x'}{\gamma \Delta y'} = \frac{1}{\gamma}\cot\theta'$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \cot\theta$$

$$\cot\theta = \sqrt{1-\beta^2}\,\cot\theta'$$

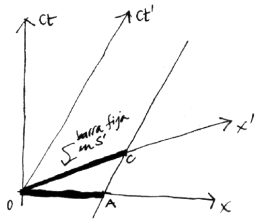


Figure V.35: *La figura señala lo que mide el observador S y S'.*

Ejemplo

Si observamos una estrella fija desde la Tierra, debemos inclinar la orientación del telescopio debido al movimiento relativo de la Tierra con respecto a la estrella. Este fenómeno se denomina aberración de la luz y consiste en el cambio de dirección de la propagación de la luz, al pasar de un sistema en reposo a otro en movimiento relativo, si el ángulo de incidencia no es paralelo a la velocidad relativa entre los sistemas de referencia.

Calcule la inclinación θ' con que debe posicionarse el telescopio, de acuerdo a la Figura, en los dos casos siguientes:

a) Calcule el valor del ángulo θ', en la forma clásica, es decir sin usar relatividad especial.

b) Desarrolle el cálculo del ángulo θ' en forma relativista y compare este resultado con el anterior.

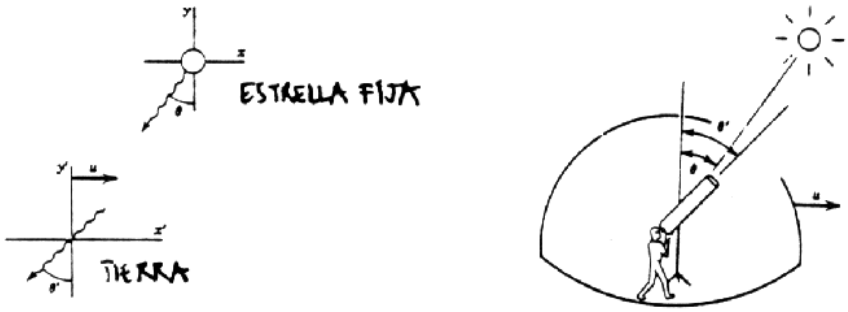


Figure V.36: *A la izquierda aparecen los dos sistemas de referencia que están en movimiento relativo. A la derecha se da una idea del cambio de dirección que se le debe dar al telescopio para enfocar la estrella fija (sin movimiento propio).*

a) Como la Tierra se está acercando a la estrella, de acuerdo al esquema indicado, la velocidad relativa *aumenta* $u + c\,\text{sen}\,\theta$, recordemos que no estamos utilizando la relatividad especial.

.

$$\tan\,\theta' = \frac{u + c\,\text{sen}\,\theta}{c\,\cos\,\theta}$$

$$\tan\,\theta' = \left[\tan\,\theta + \frac{u}{c\,\cos\,\theta}\right]$$

En forma no-relativista las velocidades se suman en forma usual.

Como la luz - de acuerdo a la figura - va al encuentro del sistema de referencia, la velocidad relativa aumenta.

$$v'_x = -c\,\cos\,\theta$$

$$v'_y = -(u + c\,\text{sen}\,\theta)$$

b) Ahora procedemos con el formalismo relativista.

De acuerdo a las fórmulas dadas

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u\,v_x}{c^2}} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma[1 - \frac{u\,v_x}{c^2}]}$$

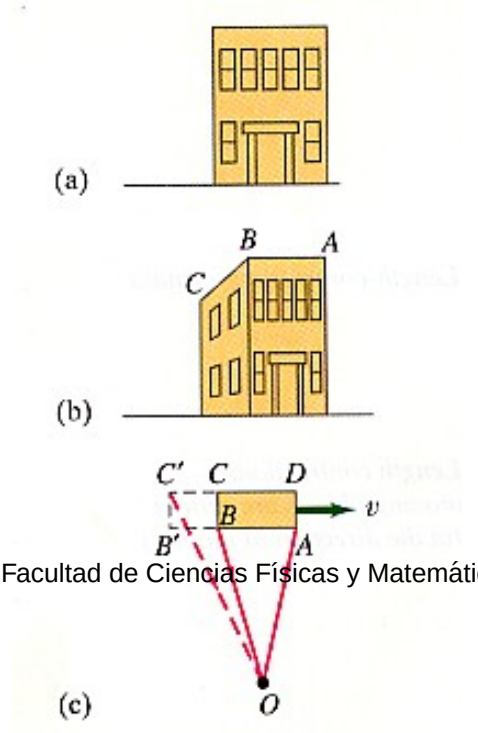
$$v_x = -c\,\text{sen}\,\theta \qquad v_y = -c\,\cos\,\theta$$

$$v'_x = -\frac{[c\,\text{sen}\,\theta + u]}{1 + \frac{u\,\text{sen}\,\theta}{c}} \qquad v'_y = -\frac{c\,\cos\,\theta}{\gamma[1 + \frac{u\,\text{sen}\,\theta}{c}]}$$

$$\tan\,\theta' = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{u + c\,\text{sen}\,\theta}{1 + \frac{u\,\text{sen}\,\theta}{c}} \times \frac{1}{\left\{\frac{c\,\cos\,\theta}{\gamma[1 + \frac{u\,\text{sen}\,\theta}{c}]}\right\}}$$

$$\tan\,\theta' = \gamma\frac{u + c\,\text{sen}\,\theta}{c\,\cos\,\theta} = \gamma[\tan\,\theta + \frac{u}{c\,\cos\,\theta}]$$

La diferencia con el tratamiento no–relativista es un factor γ en frente de toda la expresión.



Ejercicio

Explique si la figura que se acompaña es correcta o no. Justifique su respuesta.

Un par de comentarios finales con respecto al tiempo. Es la variable que se puede determinar con mayor precisión. Esta es una ventaja técnica, que nos permite hacer experimentos y confrontarlos con predicciones bien precisas, como ya lo describimos anteriormente.

Por otra parte, utilizando las palabras de Penrose [9]: "...la relatividad especial nos enseña algo profundo acerca de la realidad física, en relación a la naturaleza del tiempo".

Una de estas enseñanzas –como hemos visto–, se refiere al cambio en el concepto de simultaneidad, dos fenómenos A y B que ocurren al mismo tiempo en un sistema de referencia, de acuerdo a otro observador que viaja con una velocidad v, constante, con respecto al anterior, A ocurre antes que B. El concepto de simultaneidad deja de ser absoluto.

Composición de velocidades usando el factor k del efecto Doppler.

Usaremos el álgebra de las funciones k para encontrar la composición de velocidades.

Los tres sistemas de coordenadas est'an relacionados mediante las transformaciones siguientes, el sistema A con B: $T' \stackrel{u}{\longrightarrow} k_{AB}\,T$, el sistema B con C: $T'' \stackrel{v}{\rightarrow} k_{BC}\,T'$. A partir de estas relaciones podemos conocer T en función de T'': $T'' \stackrel{V}{\rightarrow} k_{AB}\,k_{BC}\,T$. Si $V \equiv V_{AC}$, es la velocidad relativa del sistema C con respecto a A entonces se debe cumplir que $k_{AC} = k_{BC}\,k_{AB}$. Reemplazando cada uno de los k por sus respectivas velocidades tenemos:

$$\frac{V_{AC}}{c} = \frac{k_{AC}^2 - 1}{k_{AC}^2 + 1} = \frac{k_{AB}^2\,k_{BC}^2 - 1}{k_{AB}^2\,k_{BC}^2 + 1}$$

De aquí, haciendo el álgebra correspondiente, obtenemos la Ley de Composición de velocidades.

$$V_{AC} = \frac{(u+v)}{1 + \dfrac{u\,v}{c^2}}.$$

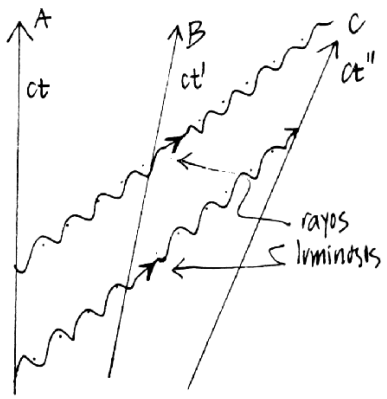


Figure V.38: .

Para poner a prueba esta relación, supongamos que un carro se mueve con velocidad $c/2$ con respecto a la tierra. Sobre el mismo carro un atleta, super–lenteja corre con una rapidez $c/2$ en el mismo

sentido que el movimiento del carro. ¿Cuál es la velocidad de este super atleta con respecto a la tierra?

Reemplazando en la fórmula anterior, tenemos:

$$V_{AC} = \frac{(c/2 + c/2)}{1 + \dfrac{c^2}{4\,c^2}} = \frac{4\,c}{5}.$$

La velocidad resultante es menor que la velocidad de la luz. La suma de velocidades relativistas es una expresión no–lineal, a diferencia del caso no–relativista.

V.10 Ejercicios Resueltos

El siguiente ejemplo ilustra una situación que no corresponde a lo que estamos habituados y que sucedería si existieran objetos *macroscópicos* que viajaran a velocidades cercanas a las de propagación de la luz. O, a la inversa, qué sucedería si la velocidad de la luz tuviera un valor más pequeño.

Nuestra experiencia indica que si un avión (o helicóptero) se acerca a una muralla iluminándola con un foco, como se ilustra en la Figura, la zona iluminada se acerca desde infinito hacia la muralla. Mostraremos en este ejemplo, que es posible que el movimiento de la sombra proyectada por una muralla debido al foco en movimiento, puede desplazarse desde la muralla hacia infinito, si el foco (o el avión) se acerca a velocidades cercanas (pero inferiores) a la velocidad de propagación de la luz.

Ejemplo

Un avión viaja en forma rectilínea a una velocidad u,cercana a la velocidad de la luz y a una altura H sobre el suelo. Una linterna, encendida al pasar el avión, emite un rayo de luz pasando apenas sobre el muro.

Dos observadores A y B en reposo, descansan detrás del muro de altura h. B se ubica justo detrás del muro, mientras que A permanece a una distancia ℓ de B.

Al pasar sobre la muralla (punto D, en la figura) el avión enciende otra linterna que ilumina al observador B. En este ejemplo, nos interesa sólo estas dos linternas, la situada en el punto P y apuntando sobre el borde superior de la muralla y la situada en el punto D, justo sobre la muralla y apuntando en forma vertical sobre B.

a) Encuentre el valor que debe tomar la velocidad u del avión de modo que el destello (fotón) emitido desde la linterna en P, al ser encendida por el paso del avión, alcance al observador A

justo en el instante en que el fotón, emitido desde la linterna situada en el punto D, alcanza al observador B.

Hallar el rango de valores del ángulo ϕ para el cual ocurre esta situación.

b) Demuestre que si la velocidad del avión es mayor que el valor encontrado en la pregunta anterior (pero siempre menor que la velocidad de la luz), entonces la oscuridad que hay en el lado izquierdo del muro se propaga desde B, al lado de la muralla, hacia A. Justo lo opuesto a lo que dicta el sentido común.

Este es un ejercicio de cinemática no-relativista.

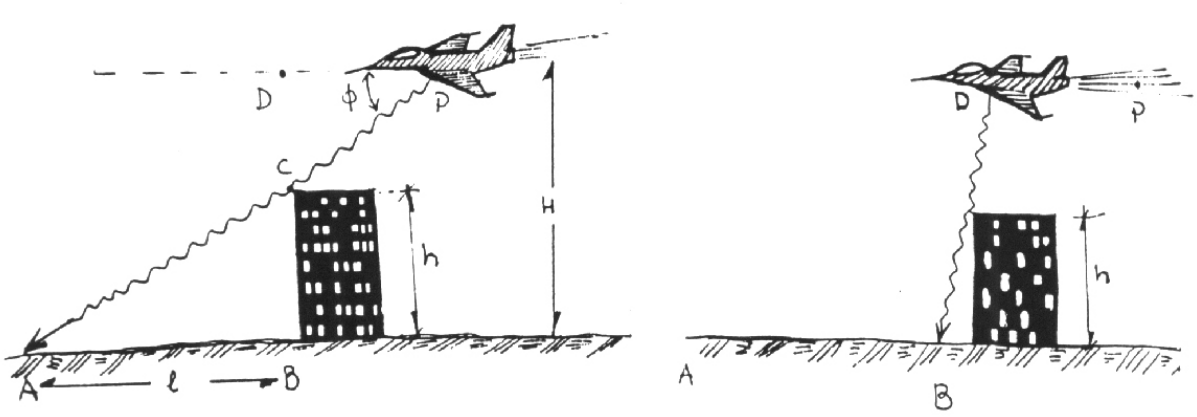


Figure V.39: Al pasar por los puntos **P** y **D** el avión enciende una linterna ubicada en cada uno de dichos puntos y que apunta en la forma indicada.

Solución

a) Para encontrar el valor buscado para u, calcularemos el tiempo que tarda el rayo de luz en recorrer los dos caminos propuestos en el enunciado (ver Figura):

$$T(P \to C \to A) \equiv T_A,$$

$$T(P \to D \to C \to B) \equiv T_B.$$

Calculemos T_A.

Como los triángulos rectángulos $\Delta\, CDP \sim \Delta\, CBA$, entonces

$$\frac{\bar{AP}}{\bar{AC}} = \frac{H}{h}, \qquad \text{de aquí} \quad \text{se obtiene} \quad \bar{AP} = \frac{H}{h}\,\bar{AC} = \frac{H}{h}\,\sqrt{\ell^2 + h^2},$$

donde hemos usado $\bar{CA} = \sqrt{h^2 + \ell^2}$.

Pero T_A es el tiempo que el fotón demora en recorrer la distancia $\bar{PA}$, de modo que:

$$T_A = \frac{H}{h}\sqrt{h^2+\ell^2}\cdot\frac{1}{c}. \tag{V.18}$$

Para calcular la velocidad u de modo que el destello emitido en D llegue a B simultáneamente con el fotón que salió desde P y alcanza A, debo considerar el tramo PD que recorrió el avión.

$$T_B = T(P\to D) + T(D\to C\to B).$$

El tiempo que transcurrió entre $P\to D$ es

$$T(P\to D) = \frac{\bar{PD}}{u}.$$

De la Figura se tiene:

$$\frac{\bar{PD}}{\bar{DC}} = \frac{\ell}{h},$$

de modo que

$$\bar{PD} = \frac{\ell}{h}\bar{DC} = \frac{\ell}{h}(H-h), \tag{V.19}$$

de esta forma

$$T(P\to D) = \frac{\ell\,(H-h)}{h\,u}.$$

El tiempo de viaje del destello entre D y B es:

$$T(D\to B) = \frac{H}{c}$$

de donde se puede obtener el tiempo que tarda el rayo en alcanzar el punto B, contando el instante desde que el avión encendió la linterna en el punto P:

$$T_B \equiv T(P\to B) = \frac{\ell\,(H-h)}{h\,u} + \frac{H}{c}.$$

Si imponemos la condición que A y B reciban los destellos simultáneamente, se debe cumplir que $T_A = T_B$, y de esta ecuación obtenemos la condición buscada:

$$\frac{\ell\,(H-h)}{h\,u} + \frac{H}{c} = \frac{H}{c}\,\frac{\sqrt{h^2+\ell^2}}{h},$$

despejando u/c, obtenemos:

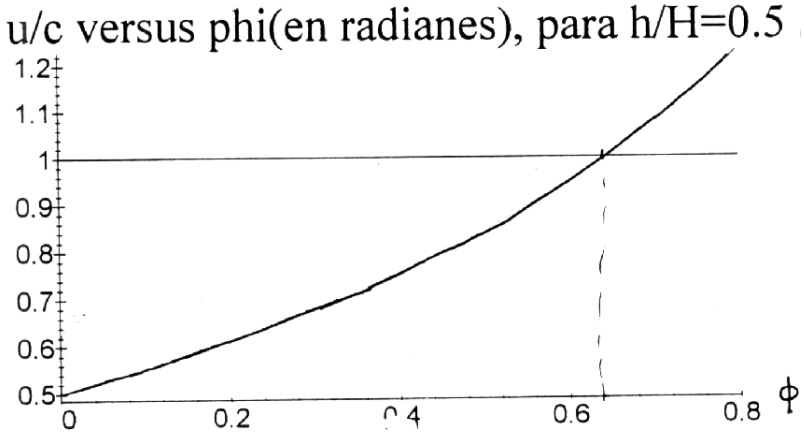
$$\frac{u}{c} = \frac{\left(1-\dfrac{h}{H}\right)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{h}{\ell}\right)^2}-\dfrac{h}{\ell}}$$

$$\text{como} \quad \frac{h}{\ell} \equiv \tan\,\phi, \qquad \text{entonces:} \quad \frac{u}{c} = \frac{(1-\frac{h}{H})}{\left[\frac{1}{\cos\,\phi} - \tan\phi\right]}. \tag{V.20}$$

El ángulo ϕ debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{u}{c} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1-\text{ sen }\phi}{\cos\phi} > (1-\frac{h}{H}).$$

En el gráfico que se acompaña se puede estimar el rango de valores posibles que puede tomar ϕ.



b) Es claro que si la velocidad del avión u aumenta, entonces el destello emitido en P, llega a A después que el emitido desde C, puesto que el avión viaja más rápido y el iempo T_{PD} se acorta.

Si el avión viaja con una velocidad $u = u(\phi)$ que se ajusta a la ecuación V.20, la región $\bar{AB}$ se ilumina en forma instantánea.

Si

$$1 > \frac{u}{c} > (\frac{1-\frac{h}{H}}{1-\text{ sen }\phi})\cos\phi.$$

entonces la zona $\bar{AB}$ se ilumina desde B hacia A, siempre que no emita destellos cuando $\phi < 0,6$. Para $\phi > 0.6$ no se cumple que $\frac{u}{c} < 1$.

Ejemplo

La Paradoja del Granero

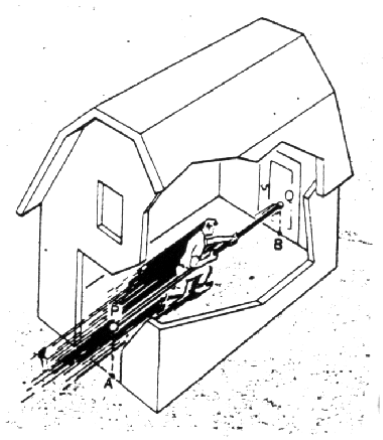


Figure V.40:

Considere un atleta corriendo con una garrocha de largo propio 20 m. (La velocidad del atleta con respecto al granero es de $\sqrt{3}\,\frac{c}{2}$). Éste sostiene la garrocha de modo que se mantiene paralela a la dirección de movimiento del atleta. En su carrera, el deportista pasa por un granero de longitud propia = 10 m. ¿ Sería posible cerrar los dos extremos del cobertizo de manera que el atleta y la garrocha queden atrapados en su interior?

Analice su respuesta desde el punto de vista del atleta y del observador en el interior del granero.

Solución

La paradoja del granero.

Solución:

Sea $L_g \equiv$ longitud propia del granero, $L_g = 10$ m.

$L \equiv$ longitud propia de la garrocha, $L = 20$ m.

i) Análisis con respecto al atleta:

El atleta opina que L_g sufre una contracción puesto que ve aproximarse al granero con velocidad $\sqrt{3}\frac{c}{2}$

luego $L_g^{(A)} = L_g\sqrt{1-\frac{(\frac{\sqrt{3}}{c})^2}{c^2}} = \frac{L_g}{2} = \frac{10}{2} = 5m$

y como la longitud de su garrocha es L (largo propio)

$\Rightarrow$ para el atleta es imposible quedar atrapado en el interior del granero puesto que: $L > L_g/2$

ii) Análisis con respecto al observador parado en el granero.

El observador B ve aproximarse al atleta con $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, por lo tanto, la contracción de la garrocha es:

$$L^{(B)} = L\sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}} = \frac{L}{2} = \frac{20}{2} = 10m$$

y como $L_g = 10m$ (largo propio del granero)entonces para observador B es perfectamente posible que el atleta (A) quede atrapado en el granero, ya que:

$$L^{(B)} = L_g \qquad L^{(B)} \equiv \text{long. medida por } B \text{ de la garrocha de } A$$

Alternativa # 2: Uso directo de las Transformaciones de Lorentz.

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{sea} & \Delta x & = & x_2 & - & x_1 \\ & \Delta x' & = & x_2' & - & x_1' \end{array}$$

donde **1** y **2** eventos que indican la entrada y salida del granero para análisis (i) y el fin y comienzo de la garrocha en análisis (ii)

Las transformaciones de Lorentz son:

$$\begin{array}{rcl} (*)\Delta x & = & \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ (**)\Delta t & = & \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x' \end{array}$$

i) s' desea medir la longitud del granero $\Rightarrow \Delta t' = 0$ en (*) $\Rightarrow \Delta x = \gamma \Delta x'$

$$\begin{array}{rcl} \Delta x & \equiv & \text{longitud granero medido por} s \\ \Delta x' & = & \text{longitud granero medido por} s' \\ \Rightarrow & \Delta x' = L_g^{(A)} = \frac{L_g}{\gamma} = \frac{L_g}{2} < L & \\ \Rightarrow & \text{Para } s' \text{ es imposible quedar atrapado} & \end{array}$$

ii) Ahora

$$\begin{array}{rcccl} \Delta x & = & x_2 - x_1 & = & \text{largo garrocha con respecto } s \\ \Delta x' & = & x_2' - x_1' & = & \text{largo garrocha con respecto } s' \end{array}$$

S desea medir la longitud de la garrocha $\Rightarrow \Delta t = 0$

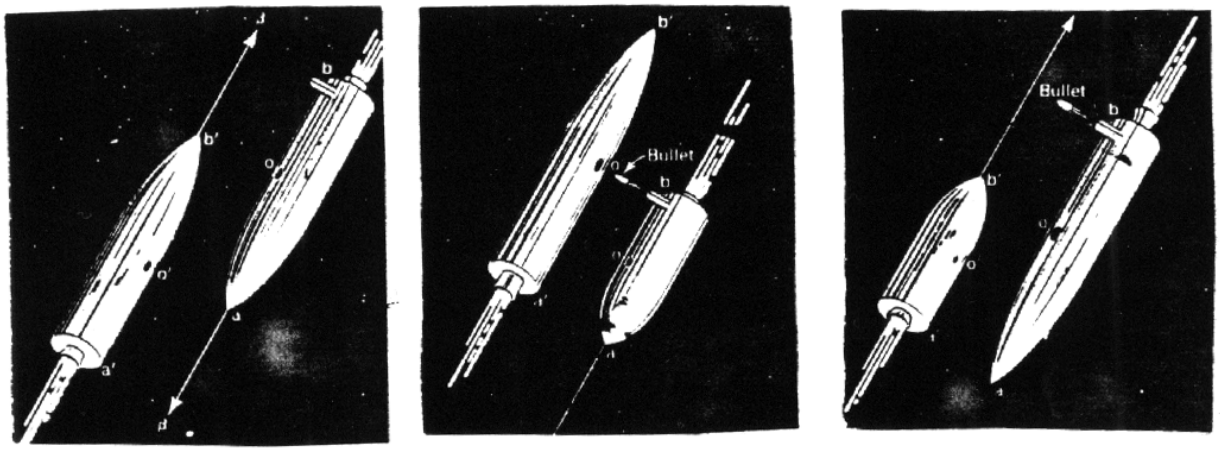
$$\text{de}(**) \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = -\frac{v}{c^2}\Delta x'$$

$$\text{en}(*) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

$$L^{(B)} = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{2} = L_g$$

$$\Rightarrow \quad \text{Para } S \text{ es posible quedar atrapado}$$

****



V.11 Apéndice A: ¿Qué es el tiempo?

El tiempo se define en forma tal que la descripción del movimiento resulte simple [8]. De hecho, uno de los logros de Galileo en 1583, fue el convertir un péndulo en una máquina confiable para registrar el paso del tiempo. Otro de los aciertos de Galileo fue utilizar un reloj de agua para tabular el tiempo durante la caída libre de los cuerpos. Éste fue también el origen de la utilización de planos inclinados y poleas, que surgieron como una forma de hacer la caída libre más lenta y por tanto más fácil de tabular. Es también, el origen de los ejercicios propuestos en los libros introductorios de mecánica.

Como lo señala Penrose [9], los griegos lograron un entendimiento aceptable de los fenómenos estáticos, pero no así de los dinámicos. Este hecho proviene, en parte, por la falta de una forma adecuada de cuantificar el cambio de posición de un objeto.

El número que se asocia a la duración de un fenómeno es lo que designamos tiempo. Este número se obtiene contando la cantidad de ciclos de otro fenómeno que consideramos periódico hasta que no se demuestre lo contrario.

Así es que ya antes de la aparición de la relatividad especial no existía un tiempo absoluto. El período del sol fue considerado por Aristóteles como un buen reloj. De acuerdo a la física Aristotélica la trayectoria del sol en el espacio está descrita por una circunferencia perfecta, que es el único movimiento que no se frena (como un bloque en una mesa) o que no se acelera (como es el movimiento natural, la caída de un objeto hacia el centro de la tierra). Además es eterno. Era entonces un buen reloj. Ahora sabemos que el sol no gira entorno a la tierra y que además la rotación de la tierra sufre alteraciones [15] debido a diversos fenómenos físicos. Si uno necesita mejorar la precisión debe comparar con otro fenómeno.

V.11.1 La medición del tiempo

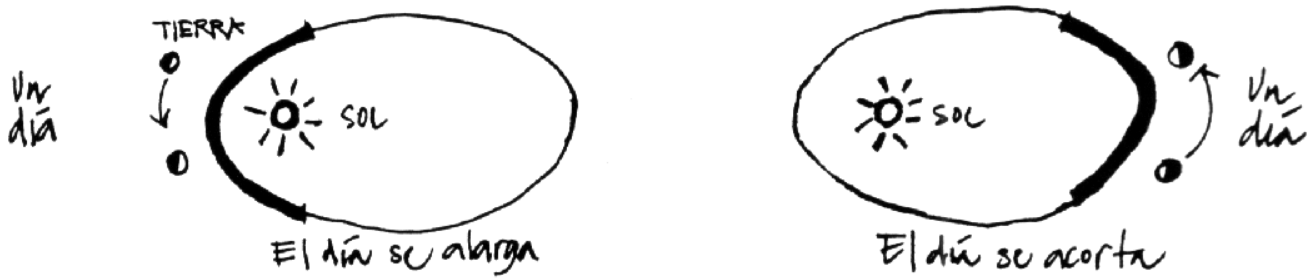


Figure V.41: Este es un diagrama muy exagerado de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. La órbita de la Tierra es muy cercana a una circunferencia. Se encuentra más cerca del Sol durante el verano del hemisferio Sur.

En la antigüedad, en una travesía marítima la latitud de un barco se puede medir comparando la posición del sol en el cenit (un ángulo) con la del lugar de origen u otro tomado como referencia (otro ángulo). Sin embargo la longitud, en aquellos tiempos sólo podía medirse por el desfase de, por ejemplo, el tiempo que marca un reloj al alcanzaer el cenit el sol con aquel que marcaba (en la misma posición del sol) en su punto de partida. En el barco un reloj era el único medio por el cual podía ubicar su longitud mar adentro.

En este contexto podemos mencionar a Hooke, quien alrededor del siglo XVII reemplazó el reloj de péndulo que utilizaban los barcos por uno con un resorte helicoidal. De este modo se aminoraba el efecto de los vaivenes del barco sobre el funcionamiento del reloj y la imprecisión en la determinación de la longitud. Otro relojero John Harrison (1693–1776) utilizó un resorte bimetálico para disminuir los efectos debido a los cambios de temperatura y logró construir un reloj que sólo se atrasaba 54 segundos después de una travesía marítima de 156 días [12].

El más antiguo de los relojes lo constituye el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. A medida que aumentó la precisión de los instrumentos utilizados, comenzaron a surgir dificultades debido a que la tierra describe una elipse alrededor del sol y, por la conservación del momento angular, hay tramos en los cuales viaja más rápido (ver Figura V.41) y el día solar, considerado como el intervalo de tiempo que transcurre entre dos posiciones consecutivas del sol en el cenit de un mismo lugar, se alarga en aproximadamente 4,7 segundos con respecto al día promedio.

¿Es posible detectar estos cambios?

En 1900 los relojes se ajustaban de acuerdo al

EL MERCURIO MIERC. 22 JUNIO/94

or

además al Consejo de Seguridad que respalde las gestiones de su enviado especial a Yemen. Asimismo, Boutros-Ghali señaló que el organismo debe "dejar claro que el estado actual de la situación no puede ser tolerado".

Nave espacial Ulysses

PASADENA, EE.UU., 28 (AFP).— Más de tres años y medio después de su lanzamiento, la nave espacial Ulysses alcanzó el polo sur del Sol, después de haber estudiado Júpiter, indicó la NASA. Desde siempre, desde que etudiamos el Sol y el sistema solar, nos quedamos alrededor del ecuador del Sol, declaró Willis Meeks, el director del proyecto Ulysses. Por primera vez, estamos a grandes alturas sobre el polo y podemos ver el Sol desde una perspectiva totalmente diferente. El pasaje del Ulysses sobre el polo sur del Sol comenzó el domingo y finalizará en noviembre próximo.

Relojes se ajustan en un segundo

NUEVA YORK, 28 (ANSA).— En la noche del jueves al viernes, los relojes se detendrán por un segundo en todo el mundo, para ajustarlos con la marcha de la rotación de la Tierra. Se lo ha denominado el segundo bisiesto y llevará el tiempo a un extraño minuto de 61 segundos, cuando sean las 19h.59'59 de Washington (1H.59'59 GMT), donde tiene su sede el Observatorio Naval. Son precisamente los expertos de este observatorio quienes ordenan detener el tiempo, una medida necesaria para corregir un retraso en la rotación de la Tierra.

Fármaco contra el cáncer

NUEVA YORK, 28 (EFE).— Un nuevo fármaco llamado Taxotere ha demostrado ser uno de los más efectivos contra el cáncer de pulmón, dijeron hoy investiga-res estadounidenses.

Figure V.42: .

tránsito de las estrellas más luminosas a través de los meridianos de los observatorios terrestres. Esto se define como un día sideral.

En 1936 la construcción de relojes de péndulo era técnicamente tan sofisticada que en el instituto BIH (Bureau International de l'Heure) se logró alcanzar una precisión suficiente para poder comparar la duración del día en dos fechas diferentes y asegurar que el largo de un día de Enero de dicho año excedió a uno de Julio en aproximadamente 2 milisegundos [15].

En 1955 la precisión de los relojes atómicos permitían medir el tiempo con una exactitud de una parte en 10^{11} y su tamaño y peso permitían hacer comparaciones entre dos puntos separados.

En la décimotercera Conferencia General de Pesas y Medidas, se adoptó una nueva definición de la unidad de medida del tiempo. Se reemplazó la definición existente -basada en el movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, como se detalla en la siguiente sección -,por la medida atómica del tiempo. La nueva definición es: El segundo se define de la siguiente forma : un átomo de Cesio 133, que al sufrir una transición (hiperfina) entre dos estados posibles, emite una onda; 9.192.631.770 ciclos (oscilaciones) de esta onda, corresponden a un segundo [7]. Los diez dígitos que aparecen en la definición fueron escogidos de manera que esta definición coincidiera con la del segundo efemérido.

Hoy, la precisión y estabilidad de los relojes atómicos permite una exactitud en su medida de 2 partes en 10^{14}. Este número da una idea de la complejida tecnología involucrada en el proceso de medición [16].

Escalas de tiempo

El *tiempo solar medio* es la escala de tiempo obtenida mediante dos posiciones sucesivas del Sol, después de aplicar diversas correcciones para lograr una escala más uniforme.

El *tiempo universal* UTO, es el tiempo solar medio referido al meridiano de Greenwich (Greenwich Mean Time o GMT).

Pequeñas correcciones adicionales de la uniformidad del movimiento de la Tierra debido a fluctuaciones en la dirección del eje polar y otros movimientos periódicos asociados a la atmósfera, las corrientes oceánicas , ...etc. lleva a otras escalas aún más uniformes: UT1 y UT2.

Numerosos laboratorios han cooperado para generar lo que se denomina *el tiempo coordenado universal* (UTC), que es un promedio de las escalas de tiempo atómico de cada uno de los laboratorios.

Para mantener la equivalencia entre el UTC y el largo del día, es necesario añadir o quitar, en forma ocasional, un segundo a la escala atómica. Este es el *segundo bisiesto* que se menciona en el recorte de un periódico que se acompaña. Esta armonía entre estas dos escalas es probable que llegue a su fin. No es fácil ajustar los relojes atómicos del GPS. Además es interesante señalar que si se hubiese cambiado el 770 que aparece al final de la definición del segundo atómico en base al

Cs, por 990, sólo hubiese sido necesario ajustar estos relojes sólo 3 veces en lugar de las 23 en que se ha debido realizar dese 1967 [16].

Por un acuerdo internacional, la UTC es mantenida en coincidencia con la escala del navegante UT1, dentro de un margen de 0.7 segundos.

V.12 Apéndice 2: El Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

Resumen de un artículo de Neil Ashby, Universidad de Colorado.

El artículo aparece en $http://www.phys.lsu.edu/mog/mog9/node9.html$

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) consiste de 24 satélites que orbitan la Tierra, V.43, cada uno llevando un reloj atómico estable y de gran exactitud. Cuatro satélites están en cada uno de los seis planos orbitales diferentes, cada uno con una inclinación de 55° con respecto al Ecuador de la Tierra. El período orbital son 12 horas (siderales, tiempo medido con respecto a las estrellas fijas), así que la posición aparente de un satélite con el escenario de las estrellas se repite cada 12 horas. Transmisores activados por los relojes envían señales de tiempo sincrónicas, con la información de la posición y el tiempo de transmisión. De esta forma el receptor en la Tierra puede determinar su posición y tiempo mediante la decodificación del mensaje enviado por cuatro satélites diferentes. El satélite también lleva detectores de rayos gamma. Los satélites pueden determinar las coordenadas espacio tiempo de un evento nuclear midiendo los tiempos de arrivo de la señal y resolviendo de nuevo cuatro ecuaciones de propagación simultáneas.

Sin considerar los aceleradores de alta energía, no hay otro sistema de ingeniería en existencia hoy día en el cual la relatividad general y la especial tengan tantas aplicaciones. El Sistema se basa en el principio de la constancia de la velocidad de la luz en un sistema de referencia inercial: el sistema inercial centrado en la Tierra o como lo denominaremos: sistema ECI (Earth Centered Inertial). La dilatación del tiempo, el fenómeno de la relatividad especial, es significativa para los relojes en movimiento tanto para los relojes ubicados en los satélites como para los relojes en reposo en la Tierra. El principio de equivalencia encuentra su expresión en la presencia de varias fuentes de corrimientos de las frecuencias de las señales debido al campo gravitacional. También, debido a que la Tierra y sus satélites están

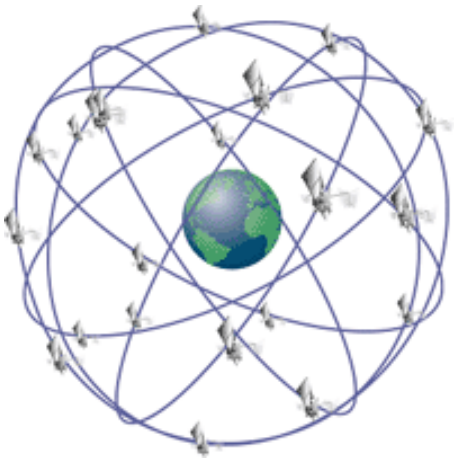


Figure V.43:

en caída libre en el campo gravitacional del Sol, se generan corrimientos en la frecuencia de origen gravitacional nacen debido al potencial gravitacional de la Luna y el Sol, sin embargo éstos afectan en una pocas partes en 10^{16} y por tanto pueden ser despreciados.

El efecto Sagnac tiene una gran influencia en este sistema de medición. Ya que la mayoría de los usuarios de GPS están en reposo (o casi) sobre la superficie de la Tierra, sería altamente deseable sincronizar los relojes en un sistema de referencia que estuviera rotando fijo a la Tierra (un sistema fijo Earth Fixed, Earth Center Frame o sistema ECEF). Sin embargo, debido a que la Tierra rota, esta sincronización no es posible. Este es el efecto Sagnac. Es suficientemente importante en los GPS para que deba ser considerado. Inconsistencias que ocurrirían en procesos de sincronización realizados en la superficie de la Tierra mediante rayos de luz, o con relojes portables que se muevan lentamente, dependen del camino recorrido y pueden llegar a ser del orden de varias docenas de nanosegundos, (una mil millonésima de segundo: 10^{-9} segundos) demasiado grandes para ser tolerados en el sistema del GPS. De esta forma el efecto Sagnac obliga a diseñar una convención diferente para la sincronización de los relojes. También, el campo de una señal en el ECEF no es una línea recta. En el GPS, la sincronización es realizada en el sistema ECI; esto soluciona el problema de la inconsistencia debido a la dependencia del camino.

Varias fuentes de efectos relativistas se introducen al determinar la unidad de tiempo, el segundo SI (Sistema Internacional) está definido por el Observatorio Naval de Estados Unidos (USNO). Para un reloj que permanece fijo sobre la Tierra, la dilatación del tiempo generada por el movimiento de rotación de la Tierra puede ser visto alternativamente como una contribución, en el sistema ECEF, al potencial efectivo gravitacional el cual incluye las contribuciones provenientes de la no esfericidad de la Tierra. Relojes fijos a la Tierra ubicados en la misma superficie equipotencial de este campo gravitacional, marcan el tiempo con la misma rapidez. Considerando tiempos geológicos, la forma de la Tierra se ha distorsionado así que se acerca a una de estas figuras equipotenciales - la geodésica de la tierra al nivel promedio del mar. El segundo SI está definido por la rapidez de los relojes atómicos ubicados sobre la geodesia. Esta rapidez esta determinada con una suficiente exactitud, relativa a relojes en infinito, teniendo en consideración tres efectos:

- la dilatación del tiempo debido a la rotación de la Tierra
- los cambios de frecuencia debido al monopolo gravitacional
- y al potencial cuadrupolar debido a la deformación de la Tierra.

En relatividad general (GR), el tiempo coordenado se expresa en forma aproximada suponiendo un movimiento lento de la tierra y que el sistema solar es un campo gravitacional débil. El tiempo propio transcurrido en un reloj que está en movimiento depende de la posición de los relojes y la velocidad de los objetos masivos cercanos, y puede ser calculado si las velocidades y posiciones y la masa de estos objetos son conocidos.

Los efectos relativistas en los relojes de los satélites pueden ser combinados de forma tal que solo dos correcciones necesitan ser consideradas. Primera, el corrimiento, en promedio de la frecuencia de los relojes en órbita es corregido en frecuencia por algo así como 446, 47 partes en

10^{12}. Esta es una combinación de 5 fuentes distintas de efectos relativistas: corrimiento gravitacional de la frecuencia de los relojes en la Tierra debido al monopolo de la Tierra y a su momentum cuadrupolar, corrimiento de la frecuencia de origen gravitacional del reloj del satélite, y corrimientos del tipo del efecto Doppler de segundo orden debido al movimiento del satélite y los relojes fijos en la Tierra.

Segundo, si la órbita es excéntrica, una corrección adicional aparece de las combinaciones del campo gravitacional que varía y el corrimiento de la frecuencia debido al movimiento debido a que las distancias del satélite con respecto a la Tierra cambia. Esta corrección es periódica y es proporcional a la excentricidad de la órbita. Para una excentricidad de .01 la amplitud de este término es del orden de 23 nanosegundos. Debido a una falta de computadores en los satélites en los primero días del GPS, se decidió que esta última corrección era de responsabilidad del software en los GPS de los recibidores (aquellos ubicados en la Tierra).

Para el lanzamiento del primer satélite NTS-2 (Junio de 1977), el cual transportaba el primer reloj de cesio que se pondría en órbita, había algunos que dudaban que los efectos relativistas fueran efectivos. Se construyó un sintetizador de frecuencia en el sistema de relojería del satélite de forma que después del lanzamiento, si llegara a ocurrir que la rapidez del reloj en su órbita final era la que efectivamente predecía la relatividad general, entonces el sintetizador debería ser activado para poner al reloj coordenado con la rapidez necesaria para una operación efectiva del instrumento.

El reloj atómico funcionó por alrededor de 20 días para poder medir su rapidez antes de iniciar el sintetizador. La frecuencia medida durante esos 20 días, fue de 442,5 partes en 10^{12}, más rápido que los relojes en el piso; si esta señal permaneciera sin corregirse habría resultado en errores en los tiempos de alrededor de 38.000 nanosegundos por día. La diferencia entre la predicción de la relatividad general acerca de la frecuencia y la observada en el satélite en órbita distaba solamente en 3,97 partes en 10^{12} de lo que se observó. Un valor adecuado a la precisión del reloj que está en órbita. Esto entonces dio una aproximación al 1% considerando el movimiento combinado y los corrimientos gravitacionales para un reloj que orbita alrededor de la tierra en un radio de 4,2 veces el radios de la Tierra.

Varios efectos relativistas son demasiados pequeños para afectar el sistema a la precisión actual de este, pero pueden llegar a ser importantes a medida que el sistema es mejorado; estos incluyen retardos del tiempo de origen gravitacional, cambio de la frecuencia de los relojes en satélites debido al momentum cuadrupolar de la tierra y curvatura especial. Este sistema fue conseguido inicialmente para algún uso de navegación militar teniendo acceso a transmisiones codificadas de los satélites las cuales no están disponibles para los usuarios civiles. La incertidumbre en la oposición en tiempo real usando el código de posicionamiento preciso es ahora del orden de 2,4 metros. Promediando sobre el tiempo y sobre muchos satélites reduce esta incertidumbre al punto donde algunos usuarios están actualmente interesados modelar muchos efectos hasta el nivel del milímetro. Aún sin estos ímpetus, el GPS provee una fuente muy fértil para las aplicaciones del concepto de relatividad.

Nuevas y sorprendentes aplicaciones de la determinación de la posición y en la transferencia del

tiempo basada en sistemas GPS están siendo continuamente inventadas. Aplicaciones civiles incluye por ejemplo: registro del movimiento de los elefantes en África, estudio de los movimientos de las placas, exploración, mapeo, salvamentos en el océano abierto, bitácora de vehículos de flete, falla en línea de alto poder y sincronización de los nodos telecomunicacionales. Alrededor de 60 fábrica producen sobre 350 aparatos comerciales **GPS**. Millones de recibidores son hechos cada año, el precio del receptor local debe ser de alrededor de US$ 200.

Ejemplo: Esquema del funcionamiento de un GPS

Para formarse una idea del funcionamiento del GPS (Global Positioning System), considere el siguiente ejemplo simplificado.

Dos satélites, con sus respectivos relojes atómicos, viajan a una altura H sobre el nivel del piso. Estos relojes están sincronizados en el sistema de referencia en que ambos están en reposo. Su separación, medida en este mismo sistema de referencia es L'. Estos satélites envian señales periódicamente a Tierra. Esta señal trae codificado el instante en que fue enviada, de acuerdo al reloj de la nave y la posición con respecto a la Tierra de dicho reloj. Si el observador en Tierra recibe simultáneamente una señal de ambos satélites, se pide:

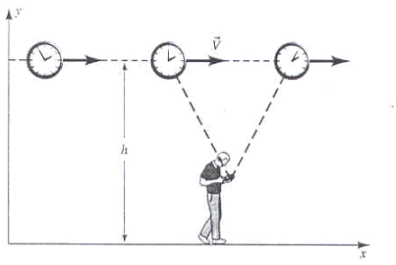


Figure V.44:

a.- Utilizando un diagrama de espacio - tiempo, muestre que el observador debe encontrarse ubicado entre los dos satélites.

b.- De acuerdo al observador en Tierra, de cuál delos relojes salió la señal antes que la otra. ¿Cuál es la diferencia Δt, que tarda cada uno de los stélites en enviar la señal un extremo a otro?.

c.- ¿Cuál es la posición (coordenada x) del observador en tierra con respecto a las posiciones de ambos satélites? (En otras palabras, qué se debe calcular para encontrar la posición x del observador).

d.- Si en el espacio existen 24 satélites orbitando a 27.000 km de altura, muestre que las correcciones relativistas calculadas aquí, son relevantes si queremos una precisión de 2 - 5 metros.

a) Observador en Tierra

b) Dado que ambos relojes emiten la señal simultáneamente en su sistema de referencia, tenemos que:

$$t'_B - t'_A \equiv \Delta t' = 0 = \gamma[(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)] = \gamma[\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x]. \text{ ec.1}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A \equiv L' &= \gamma[(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)] \\ &= \gamma[\Delta x - v\Delta t] \quad \text{ec.2} \end{aligned}$$

Tenemos dos ecuaciones para dos incógnitas Δt y Δx. Despejando, obtenemos

De la ecuación [ec.1]

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x$$

De la ecuación [ec.2],

$$\Delta x = \frac{L'}{\gamma} = v \cdot \Delta t.$$

Reemplazando Δx en la ecuación, tenemos

$$\Delta x = \frac{c^2\Delta t}{v} = \frac{L'}{\gamma} + v\Delta t, \text{ obtenemos}$$

$$(c^2 - v^2)\Delta t = L'\sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow \Delta t = \frac{L'\gamma}{c^2}.$$

También: $\Delta x = \frac{L'\gamma}{v}$.

Vemos que $t_B - t_A = \frac{\gamma L'}{c^2}, t_B = t_A + \frac{\gamma L'}{c^2}$.

De acuerdo al observador en Tierra, el reloj A disparó primero.

c) Para calcular la coordenada x_P del observador todo esto referido al sistema del observador tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (x_P - x_B)^2 + H^2 &= c^2(t_P - t_B)^2 \\ (x_P - x_A)^2 + H^2 &= c^2(t_P - t_A)^2, \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones indican que el evento A (y B) están en el cono de luz del evento P que corresponde al instante en que el observador recibe los pulsos de A y B. Note que estas ecuaciones[3]

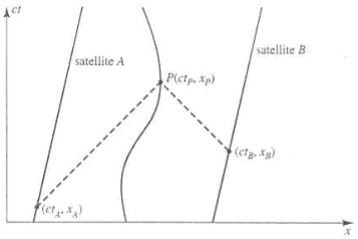


Figure V.45:

Tenemos 6 incógnitas $x_P, t_P, x_B, x_A, t_B, t_A$. Se requieren 4 ecuaciones adicionales. Éstas son:

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= \gamma L', \\ t_B - t_A &= \gamma \tfrac{v}{c^2} L', \\ x_P &= 0, \\ t_A &= 0. \end{aligned}$$

En las dos últimas ecuaciones, instalamos el origen del sistema de coordenadas junto al observador P. En la última ecuación $t_A = 0$,los relojes parten cuando el satélite A emite el destello que alcanza al observador P. Estas coordenadas hacen más fácil los cálculos. Sería más físico poner $x_A = t_A = 0$, establecer el origen de coordenadas epaciales junto con el destello que alcanza a P, pero las ecuaciones son un poco más complejas.

Con esta elección, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} x_B^2 + H^2 &= (c\,t_P - \gamma \tfrac{v}{c} L')^2 \\ x_A^2 + H^2 &= (c\,t_P)^2 \\ x_B &= x_A - \gamma L' \end{aligned}$$

La ecuación para x_A es

$$(\gamma L' + x_A)^2 + H^2 = [(x_A^2 + H^2)^{1/2} - \gamma \frac{v}{c} L']^2$$

La ecuación para t_P es:

$$[((c\,t_P)^2 - H^2)^{1/2} + \gamma L']^2 + H^2 = (c\,t_P - \gamma \frac{v}{c} L')^2$$

Las dos soluciones que aparecen se deben a la ecuación del como la luz que no distingue el presente del pasado.

Como ejemplo, Ud., puede resolver el caso $H = 0$ y obtener

$$-c\,t_P = x_A \qquad\qquad (t_P > 0)$$

[3]no distinguen el presente del pasado, por tanot en algún momento debemos escoger el signo correcto de la variable.

V.13 Ejercicios Propuestos

1.– Un vagón de tren se mueve sobre una vía a velocidad constante v. A y B están en los extremos del vagón y los observadores C y D están de pie junto a la vía. Definimos el evento AC como ocurrencia de A al pasar frente a C, y los otros similarmente.

(a) De los cuatro eventos BD, BC, AD, AC, ¿cuáles sirven para que los observadores que están sobre la vía midan el paso de un reloj llevado por A?

(b) Sea Δt el intervalo de tiempo entre estos dos eventos para los observadores que están a un lado de la vía. ¿Qué intervalo de tiempo marca el reloj en movimiento?

(c) Supóngase que los eventos BC y AD son simultáneos en el sistema de referencia de la vía. ¿Son simultáneos en el sistema de referencia del vagón?. Si no, ¿cuál es primero?

2.– Determine el desplazamiento de longitud de onda por efecto Doppler relativista para la línea 6563 Ådel Hidrógeno H_α, emitida por una estrella que se aleja de la Tierra a una velocidad relativa de 10^{-3}c, 10^{-2}c, y 10^{-1}c. ¿Es una buena aproximación el resultado a primer orden?

3.– Un aeroplano de 40 m de longitud en su sistema de reposo se mueve a velocidad uniforme de 630 $\frac{m}{seg}$, con respecto a la Tierra.

(a) ¿Qué fracción de su longitud de reposo parecerá acortarse, con respecto a un observador sobre la Tierra?

(b) ¿Cuánto tiempo tardará, según los relojes en tierra, para que el reloj del aeroplano se retrase un microsegundo? (Suponga que únicamente es válida la relatividad especial).

4.– El radio de reposo de la Tierra puede considerarse como de 6400 km, y la velocidad a que gira alrededor del Sol, como de 30 km/seg. ¿Cuánto parecería acortarse el diámetro de la Tierra con respecto a un observador en el Sol, por el movimiento orbital de aquella?

5.– Se mide la longitud de una nave espacial y se encuentra un valor exactamente igual a la mitad de su longitud propia.

(a) ¿Cuál es la velocidad de la nave con respecto al sistema del observador? ¿Cuál es la dilatación del tiempo unitario de la nave?

6.– Dos naves espaciales tienen una longitud de 100 m cada una, medidos en su sistema propio. Se desplazan en sentidos opuestos, cruzándose en el vuelo. El astronauta que va en la nariz de una nave, que la designamos por A, mide el tiempo que transcurre entre el paso de la nariz y la cola de la otra nave (B) desde su puesto de observación. Encuentra que este intervalo es $2,50 \times 10^{-6}$ segundos. A partir de este dato, encuentre:

(a) ¿Cuál es la velocidad relativa de las naves?

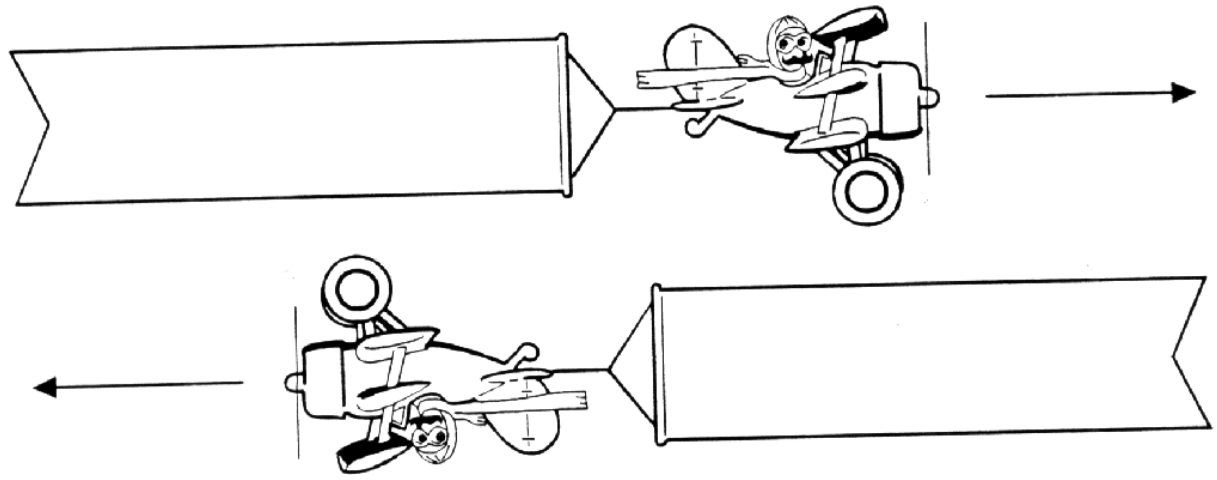


Figure V.46:

(b) ¿Cuál sería el intervalo medido en la primera nave (A), si ahora registrara el intervalo que transcurre entre que la nariz de la nave (B) pasa frente a la nariz de (A) y la cola de (B) pasa frente a la cola de (A)?

Acompañe ambas respuestas con un gráfico espacio-tiempo.

7.– (a) Si la vida (propia) promedio de un mesón μ es 2.3×10^{-6} segundos, ¿qué distancia promedio viajaría éste en el vacío antes de morir, de acuerdo con mediciones en diferentes sistemas de referencia, donde su velocidad es de $0.00c, 0.60c, 0.90c, y 0.99c$ respectivamente.

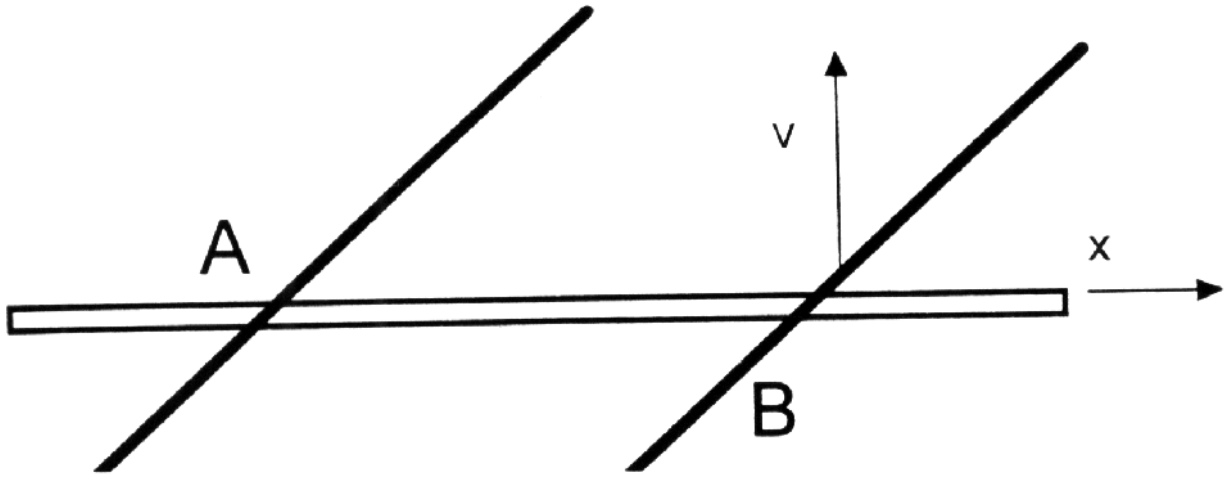
(b) Compare cada una de estas distancias con la distancia que el mismo mesón mediría.

8.– A 200 km sobre el nivel del mar, una partícula de rayo cósmico primario choca contra la atmósfera de la Tierra; en esta colisión de alta energía se produce un mesón π^+, el cual desciende verticalmente a una velocidad de $0.99c$ y, en su sistema propio, se desintegra $2.5 \times 10^{-}8seg$ después de producido. Según se ve desde la Tierra, ¿a qué altura sobre el nivel del mar se desintegra el mesón?

9.– En la Figura, A y B son los puntos de intersección del eje x (varilla estacionaria) con una varilla inclinada (varilla en movimiento) en dos instantes diferentes. La varilla inclinada se está moviendo en la dirección + y (sin cambiar de inclinación) a una velocidad v.

(a) Demuestre que el punto de intersección de las varillas tiene una velocidad $u = v\,cot\,\theta$ hacia la izquierda.

(b) Sea $\theta = 30^o$ y $v = \frac{2}{3}c$. Demuestre que, en este caso, u excede a c y explique porqué no existe ninguna contradicción con la relatividad.



10.– Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, paralelamente uno respecto del otro; el primero a una velocidad de 0,9 c y el segundo a una velocidad de 0,7 c. Encuentre la velocidad de un proyectil con respecto al otro.

11.– Un observador sobre la Tierra que llamamos A, manda una señal con una linterna cada seis minutos. Otro observador, B está en una estación espacial estacionaria con respecto a la Tierra. Designamos con C a un astronauta que viaja en un cohete de A a B, con una velocidad constante de 0,6 c, con respecto a A.

(a) ¿A qué intervalos recibe B las señales de A?

(b)¿A qué intervalos recibe C las señales de A?

(c) ¿A qué intervalos recibe B los destellos de C?

12.– Considere la existencia de partículas que tienen vida finita y cuyo número en función del tiempo está dado por:

$$N(t) = N_o \exp \frac{-t \ln 2}{\tau}.$$

Siendo N_o el número de partículas que existen en $t = 0$ y es la llamada vida media de las partículas, ya que en el tiempo $t = \tau$ el número inicial se ha reducido a la mitad:

$$N(0) = N_o, \qquad N(\tau) = \frac{N_o}{2}.$$

Los mesones π^+ , por ejemplo, se producen en colisiones de alta energía entre una partícula de rayo cósmico primario y la atmósfera terrestre. Su vida media *propia* es $\tau_o = 2,6 \times 10^{-8}$

s. Suponiendo que N_o mesones π^+ se han formado a la altura h de la tierra y que descienden hacia ella con rapidez 0.9999 c llegando solamente el 1 %:

(i) Determine la altura h a la cual se han formado los mesones.

(ii) Para esa altura, comente sobre el porcentaje que llegaría a la superficie terrestre si no se hicieran correcciones relativistas.

13.– Dos misiles de igual largo propio pasan en sentido contrario a velocidades relativistas. El observador O tiene un cañón en la cola de su nave apuntando en dirección perpendicular al movimiento relativo.

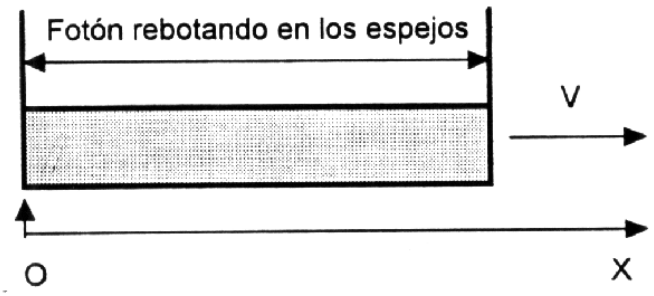
Como indica la figura, O dispara cuando la punta A coincide con A'. En el sistema de referencia de O, el otro misil sufre una contracción de Lorentz. En consecuencia O sospecha que su bala no dará en el blanco. Pero en el sistema de referencia de O', es el misil O el que aparece contraído y por lo tanto, cuando A y A' coinciden el observador ve lo que aparece en la tercera figura.

(a) Uno de los diagramas contiene un error. Descúbralo.

(b) Usando las transformaciones de Lorentz descubra lo que realmente sucede en este encuentro.

Nota: $L \equiv$ largo propio de los misiles. $u \equiv$ velocidad del misil O con respecto a O'.

14.– Se tiene una barra de largo L que se desplaza con velocidad v. En los extremos de esta barra se ubican dos espejos como se muestra en la figura. Suponga que un fotón se encuentra entre ellos. Si en $t = 0$ el espejo de la izquierda coincide con el punto $x = 0$ y justo en ese instante el fotón está siendo reflejado en ese mismo espejo, dibuje la trayectoria del fotón y de la barra en un diagrama espacio-tiempo $c = 1$.



15.– En el sistema S', un sujeto corre en la dirección del eje y' con velocidad constante $V = \dfrac{L'}{T'}$, donde L' es la distancia propia con respecto a S' y T' es el tiempo que marca un reloj estático con respecto a S'.

A su vez, S' se mueve con una velocidad U con respecto a otro sistema de referencia inercial S.

a) De acuerdo a un observador en reposo en el sistema S, calcule las dos componentes de la velocidad de este sujeto y a partir de este resultado encuentre la tangente del ángulo con que éste se aproxima.

b) Suponga que en el sistema S' hay una serie de interruptores separados por una distancia propia L'. A medida que el sujeto avanza los va encendiendo. Al ser activados, estos envían un fotón (o un pulso de luz, si Ud. lo prefiere) que *viaja directamente hacia S en la dirección del eje x del sistema S*.

Calcule la velocidad ω_y con que los detectores se encienden en el sistema S, a medida que van recibiendo la señal luminosa proveniente de S'. Suponga, si le ayuda utilizar este dato, que inicialmente el sistema S' se encontraba a una altura H sobre S. Recuerde que la distancias perpendiculares al movimiento relativo no sufren alteraciones.

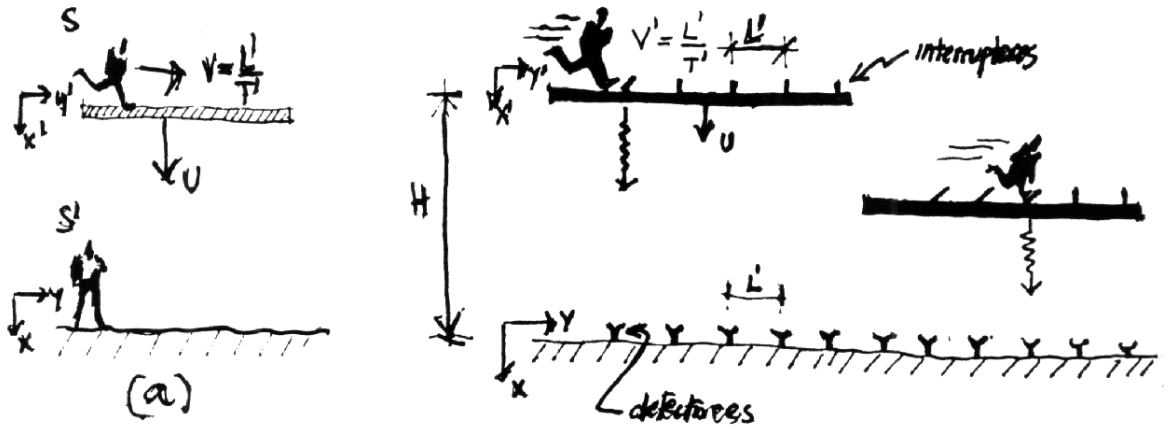


Figure V.47: Ejercicio # 19

c) Si el observador en S, $U = \overline{V}\cos\theta$, $V = \overline{V}$ sen θ, representan las componentes de la velocidad $\overline{V}$ con la cual se aproxima el sujeto, demuestre que la velocidad con que se encienden los detectores en el sistema S es:

$$w_y = \frac{\overline{V}\,\text{sen}\,\theta}{1 - \dfrac{\overline{V}\,\cos\,\theta}{c}}$$

d) Demuestre que si $\overline{V} \approx c$ (es decir, $\beta \approx 1$) y el ángulo θ es muy pequeño, la velocidad w_y toma su máximo valor para $\theta^2 = 2\,(1-\beta) \approx (1+\beta)(1-\beta) \Rightarrow \theta \approx 1/\gamma$.

16.– Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, en forma paralela y en el mismo sentido. Si denominamos uno de los proyectiles por O_1 y le asociamos la velocidad $V_1 = 0.9\,c$ y al otro, O_2 la velocidad $V_2 = 0.7\,c$:

a) Encuentre la velocidad de O_1 con respecto a O_2.

b) Si los largos propios son L_1 y L_2 respectivamente, cuál es el largo del cohete L_2, de acuerdo a O_1.

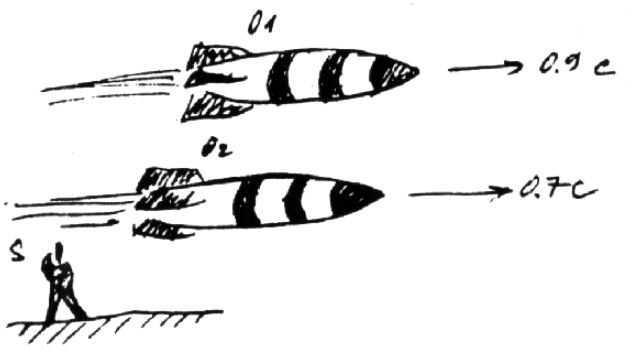
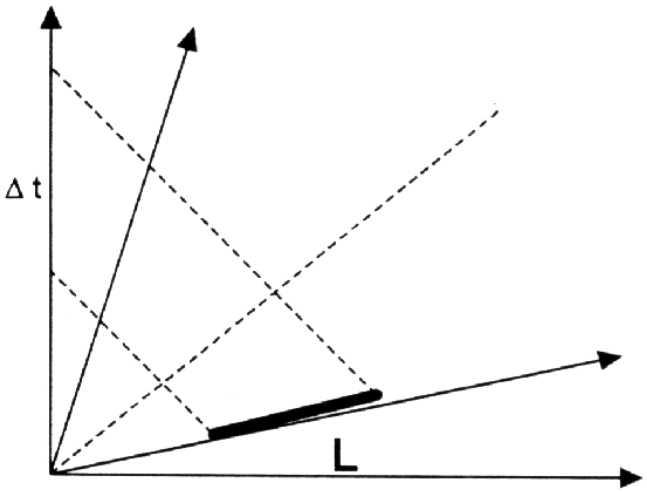


Figure V.48: Ejercicio # 20

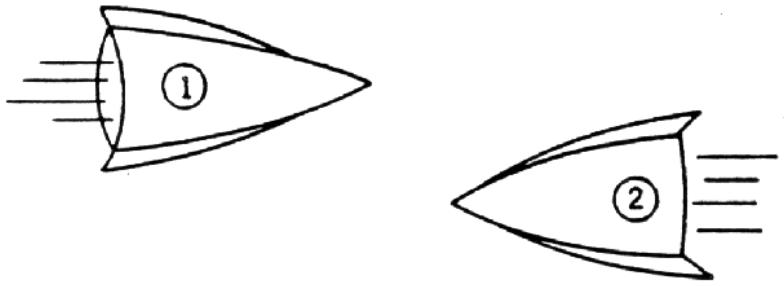
17.– Una barra de largo L' con respecto a su sistema en reposo, se aleja con una velocidad V_o de un observador en reposo. Si desde cada uno de los extremos de la barra se envían dos destellos en forma *simultánea con respecto al sistema fijo en la barra,* calcule la diferencia de tiempo $\Delta\, t$ con la cual arriba cada uno de los destellos al observador S.



heightheight

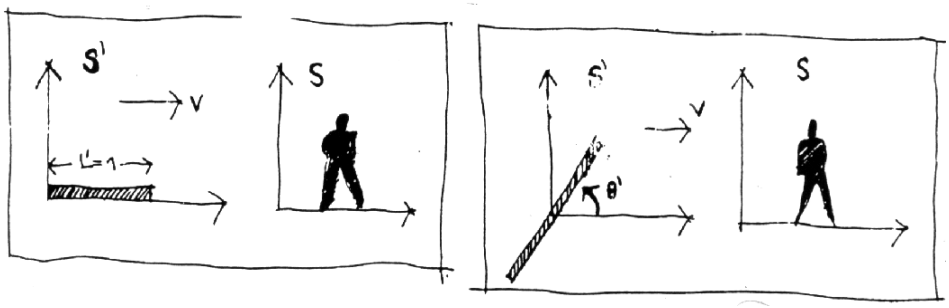
Nota: El intervalo $\Delta\, t$, *no* depende de la distancia a la cual se ubica la barra del origen de S. Ud. puede posicionarla donde más le acomode, respetando las condiciones impuestas en el enunciado del problema.

18.– Dos cohetes que viajan en la misma dirección pero en sentido opuesto, se cruzan, como se señala en la Figura. En el sistema S, que corresponde a la Tierra, ambos cohetes tienen rapidez u y largo ℓ.



i) Calcule el intervalo –medido por un observador en Tierra–, que transcurre entre el instante que sus respectivas narices se cruzan y el instante en que comienzan a separarse.

ii) Calcule el intervalo medido por un pasajero de uno de las naves –sistema S'–, entre el instante que sus respectivas narices se cruzan y el instante en que las naves comienzan a separarse.



19.– Una varilla de un metro de longitud en su sistema propio, se aproxima a un observador en reposo con una velocidad $\frac{24}{25}\,c$, como se indica en la Figura.

a) ¿Cuál es el largo de esta varilla en el sistema del observador?

b) Suponga ahora que la varilla está inclinada en un ángulo $\theta' = \arccos(5/6)$, en el sistema de referencia que viaja con la varilla. Calcule el ángulo de inclinación de la varilla medido en el sistema de referencia del observador fijo en tierra.

c) Calcule el largo de la varilla en el sistema de referencia del observador en reposo, para esta segunda configuración.

20.– La estructura de la izquierda (remache) tiene una protuberancia de largo **L** que al insertarse en el objeto con forma de U a la derecha alcanza justo a tocar el interruptor **B** ubicado al fondo de la cavidad. Esto ocurre cuando ambos objetos están en reposo (primera figura). **B** es un interruptor que, al ser tocado, gatilla la bomba de **TNT** señalada. Note que la cabeza del remache (por ejemplo el borde A) se apoya en los bordes del objeto en U al ser insertado.

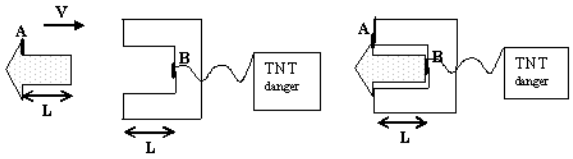
i.- Suponga que el mismo remache se acerca con una rapidez **V**, con respecto a un observador en reposo en la estructura en U, como aparece en la figura. Explique cuantitativamente qué sucede con el extremo del remache cuando **A** toca el borde de U:

también toca **B**, lo tocó antes, a qué distancia se encuentra según qué observador ¿ Explota la bomba? Debe acompañar un gráfico espacio-tiempo de la situación donde se especifique qué midió y su valor.

ii.- Considere las mismas preguntas, pero ahora desde el punto de vista de un observador en reposo con respecto al remache que ve acercarse al objeto en U. Siendo un observador sistema inercial, opina que la estructura en U se acerca con rapidez **V**. ¿ Explota o no la bomba, de acuerdo a este observador?

iii.- En definitiva, si la bomba explota NO puede depender del observador. ¿ Cómo resuelve Ud. esta paradoja?

iv.- En el caso i.- suponga que se conectó un dispositivo al punto A del remache tal que si **A** es presionado dispara un laser que corta el cable que une B con la bomba. En este nuevo escenario: ¿ Explota ésta o no?



21.– El diagrama representa un policía midiendo la velocidad de un auto mediante el efecto Doppler. Nos instalamos en el sistema de referencia de la autoridad. Del auto sólo indicamos la flecha del tiempo para no complicar el dibujo. Se indica la trayectoria de dos nodos separados por una longitud de onda (λ) emitida por la pistola del policía y la recibida después de reflejarse en el auto unos instantes más tarde. (recuerde que los largos, como la longitud de onda, se miden en intervalos tipo espacio).

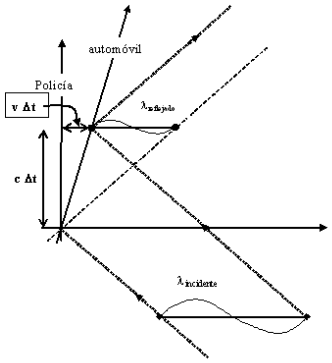
i.- De la figura, demuestre (no sólo afirme, explique por qué) que:$c\Delta t = v\Delta t + \lambda_{\text{reflejado}}$, y que $c\Delta t = \lambda_{\text{incidente}} - v\Delta t$, donde v es la velocidad del auto c/r al policía.

ii.- A partir del resultado anterior obtenga ($f \equiv$ frecuencia), $f_{\text{reflejada}} = k f_{\text{incidente}}$, con $k = \frac{1+V/c}{1-V/c}$.

iii.- Suponiendo que el cambio de frecuencia es pequeño debido a que V/c es muy pequeño, muestre que $(\Delta f/f) \approx 2V/c$. Verifique cuán pequeño es si V=120 km/h.

iv.- El radar de la policía de Santiago, opera con una frecuencia de 10.525×10^9 ciclos/s. ¿Cuántos ciclos por segundo cambia el haz reflejado comparado con el incidente (o enviado)?

v.- ¿Qué resolución debe tener la maquinita de la policía para poder distinguir entre un automovilista que viaja a 120 km/h y otro, infractor, que guía a 121 km/h?



Bibliography

[1] **A History of the theories of Aether and Electricity**, Sir Edmund Whittaker,1954,Tomash Publishers, Vol VII.

[2] **Spacetime Physics**,1966, R. Taylor and J. A. Wheeler,W. H. Freeman and Company.

[3] **Introduction to the Structure of Matter**, J. J. Brehm and W. J. Mullin, John Wiley and Son, 1989.

[4] **Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica**, R. Resnik. 1976, Ed. Limusa, México.

[5] **A First Course in General Relativity**, Bernard Schutz, Cambridge Press University, 2004.

[6] **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**, James B. Hartle, Addison Wesley, 2003.

[7] **The Quantum Beat, The physics Principles of Atomic Clocks**, F. G. Major, Springer , New York, 1998.

[8] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.

[9] **The Emperor's New Mind**, Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics, Roger Penrose, 1991,Penguin Book.

[10] **Feynman Lectures on Physics**, R. P. Feynman, R. Leighton and M. Sands, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1964, Sección 18-6.

[11] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.

[12] **The illustrated Longitude**,Dava Sobel and Williams J. D. Andrews, Walker and Company, New York,1998.

[13] **Espacio, tiempo y Gravitación**, R. Wald, Fondo de Cultura Económica # 14315.

[14] *Le Temps en Physique*, M. Mashaal, La Recherche, **2**4,# 260, page 1412. (Contiene un resumen de los distintos aspectos del tiempo en la f'isica).

[15] *Variations in the rotation of earth*, W. E. Carter et al., Sci., **224**, 1 june, page 957.

[16] *Time Too Good to Be True*, D. Kleppner, Physics ToDay, **Reference Frame**, March 2006, page 10.

[17] *Test of relativistic gravitation with a space–borne hydrogen maser*, R. F. C. Vessot et al.,1980, Phys. Rev. Lett., **45**, page 2081.

[18] *Around the world Atomic clocks: Predicted and Observed Relativistic time gains*, J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **1**77, 166, 1972, pag 166.

[19] 1979, A. Brillet and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **42**, 549.

[20] *Improved Kennedy–Thorndike Experiment to test Special Relativity*, 1990, D. Hils and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **64**, page 1697.

[21] *From Alchemy to Quarks: The Study of Physics as a Liberal Art*, Sheldon L. Glashow, Brooks and Cole Publishing Company, 1993.

[22] *What is missing from Minkowski's "Raum und Zeit" lecture*, arXiv:0807.1300v1 [physics.hist-ph], 8 july2008.

[23] *On the electrodynamics of moving bodies*, A. Einstein, June 30, 1905

[24] *Splitting the second*, Tony Jones, IoP publishing, Bristol, 2001.

[25] *It's About Time:* Understanding Einstein's Relativity, N. David Mermin, Princeton University Press, 2005.