EJERCICIO

Dos trenes con rapidez V se mueven en sentido contrario. En $t=0$, separados por una distancia D, una paloma con velocidad $U > V$, con respecto a la tierra, vuela de un tren a otro y vuelve al primero, así sucesivamente hasta que los trenes chocan.

→ Distancia recorrida por la paloma hasta el choque

RESP

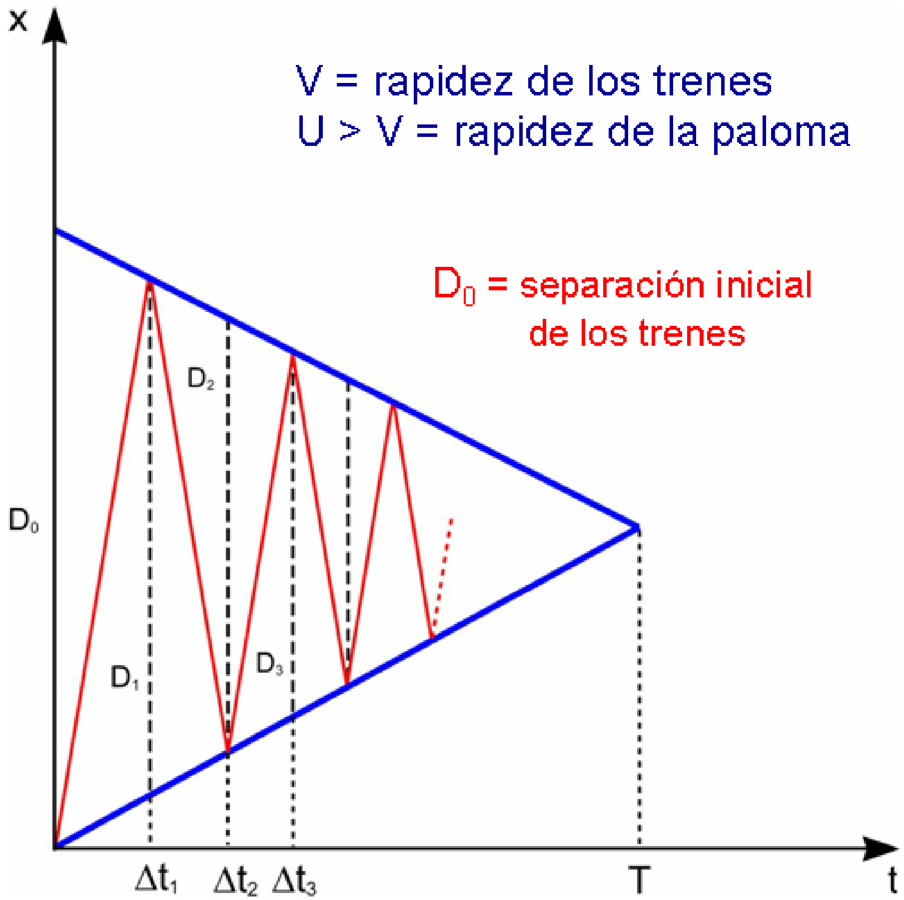
1) CAMINO FÁCIL:

TIEMPO QUE TARDAN LOS TRENES EN CHOCAR $= \frac{D}{2V}$

LA PALOMA ESTÁ EN VUELO TODO ESE TIEMPO

$$\Rightarrow \boxed{X = TU = \frac{DU}{2V}}$$

2) SOLUCIÓN ALTERNATIVA: MÁS LARGA PERO MÁS ILUSTRATIVA


x
V = rapidez de los trenes
U > V = rapidez de la paloma
D_0 = separación inicial
de los trenes
D_2
D_0
D_1
D_3
Δt_1
Δt_2
Δt_3
T
t

1er CHOQUE

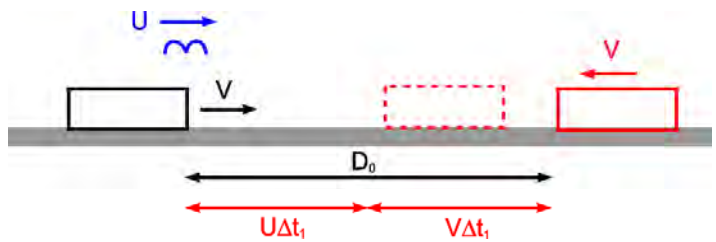
$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1 &= U\Delta t_1\\ \Delta t_1 &= \frac{D_0}{U+V}\end{aligned}\right\} \quad \Delta x_1 = D_0 \frac{U}{U+V}$$

2do CHOQUE

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_2 &= U\Delta t_2\\ \Delta t_2 &= \frac{D_1}{U+V}\end{aligned}\right\} \quad \Delta x_2 = D_1 \frac{U}{U+V}$$

3er CHOQUE .....

$$\underbrace{U\Delta t_1}_{\text{distancia recorrida por la paloma}} = D_0 - \underbrace{V\Delta t_1}_{\text{distancia recorrida por el tren}}$$



CAMINO RECORRIDO POR LA PALOMA

$$X = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n + \dots$$

$$x = \frac{U}{U+V}\left[D_0 + D_1 + D_2 + \dots D_n + \dots\right]$$

PERO $D_1 = D_0 - 2V\Delta t_1$

$$D_1 = D_0 - \frac{2VD_0}{U+V}$$

$$D_1 = \left(\frac{U-V}{U+V}\right) D_0$$

ANÁLOGAMENTE

$$D_2 = \left(\frac{U-V}{U+V}\right) D_1$$

$$\vdots$$

$$D_n = \left(\frac{U-V}{U+V}\right) D_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad D_n = \left(\frac{U-V}{U+V}\right)^n D_o$$

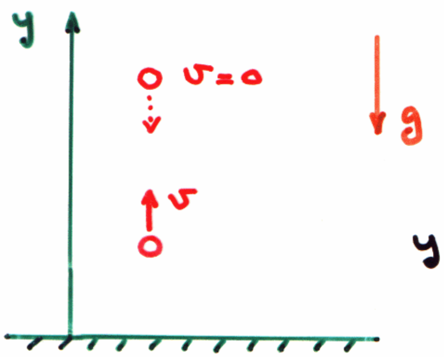
Sea $r \equiv \dfrac{U-V}{U+V} < 1$

ENTONCES

$$X = \frac{U}{U+V} D_o \underbrace{\left[1 + r + r^2 + \dots \right]}_{\frac{1}{1-r} = \frac{U+V}{2V}}$$

$$\therefore \quad X = \frac{U D_o}{2V}$$

ACELERACIÓN DE GRAVEDAD



$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

¿CUANTO TARDA EN VOLVER AL SUELO?

$$y = 0 = v_0 T - \frac{1}{2} g T^2$$

$$T \left(v_0 - \frac{1}{2} g T \right) = 0$$

2 SOLUCIONES : $T = 0$

$$T = \frac{2 v_0}{g}$$

TIEMPO QUE DEMORA EN ALCANZAR SU ALTURA MÁXIMA

$$v = v_0 - gt$$

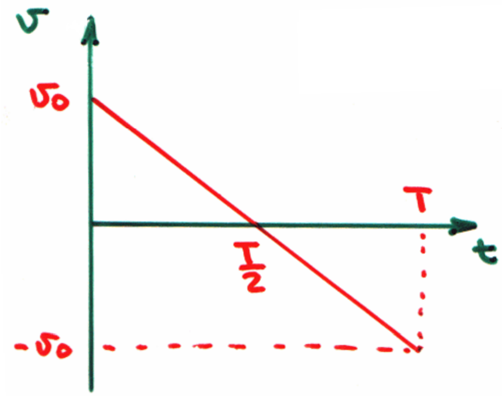
$$v = 0 \Rightarrow \quad 0 = v_0 - g T_m$$

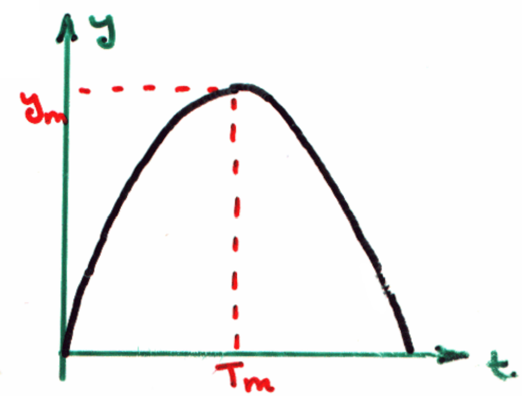
$$T_m = \frac{v_0}{g} = \frac{T}{2}$$

VALOR DE LA ALTURA MÁXIMA

$$y_m = v_0 T_m - \frac{1}{2} g T_m^2$$

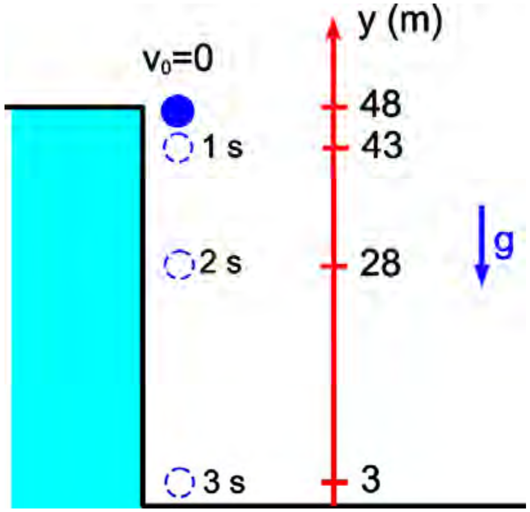
$$y_m = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$





En 1993, Dave Munday, un mecánico de profesión, se lanzó por segunda vez desde el borde canadiense de las cataratas del Niagara, cayendo libremente 48 m sobre el agua y las rocas. Munday sobrevivió una vez más debido a sus amplios conocimientos de física e ingeniería.

¿Si su caída fue vertical, como pudo predecir la velocidad con la cual el barril chocaría con el agua?



datos del problema

$$y_0 = h = 48\ \text{m}$$

$$v_0 = 0$$

$$g = 10\ \text{m/s}^2$$

posición y velocidad del barril

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = -gt$$

tiempo de caída del barril

$$y = 0 \Rightarrow t_{\text{caida}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 48\ \cancel{\text{m}}}{10\ \cancel{\text{m}}/\text{s}^2}} = \sqrt{\frac{48}{5}}\text{s} = 3.1\ \text{s}$$

velocidad del barril al chocar con el agua

$$v_{\text{agua}} = -gt_{\text{caida}} = -\sqrt{2hg}$$

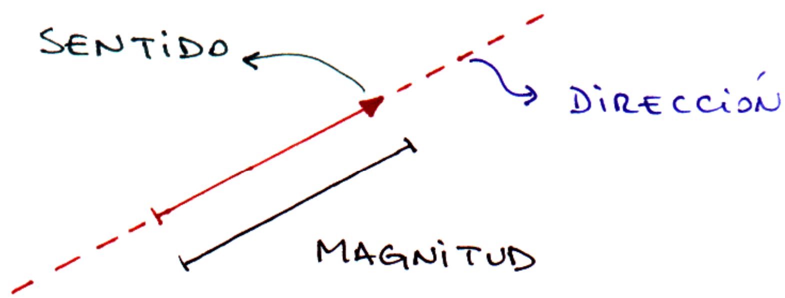
$$v_{\text{agua}} = -\sqrt{2\cdot 48\ \text{m}\cdot 10\ \text{m/s}^2}$$

$$v_{agua} = -31{,}0\ \text{m/s} = 111{,}5\ \text{km/h}$$

VECTORES

¿POR QUÉ?

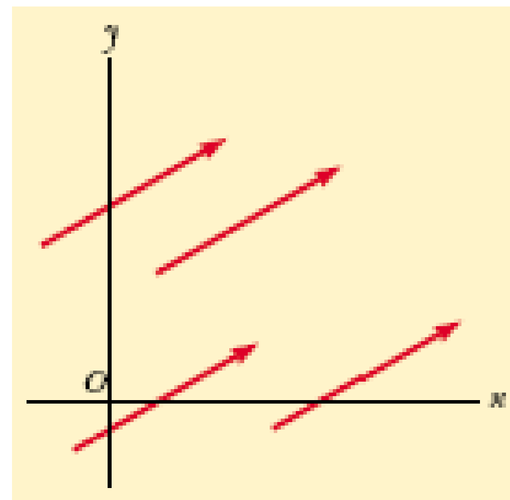
- DESCRIBIR MOVIMIENTO EN 2 Y 3 DIM.
- NOTACIÓN MAS COMPACTA



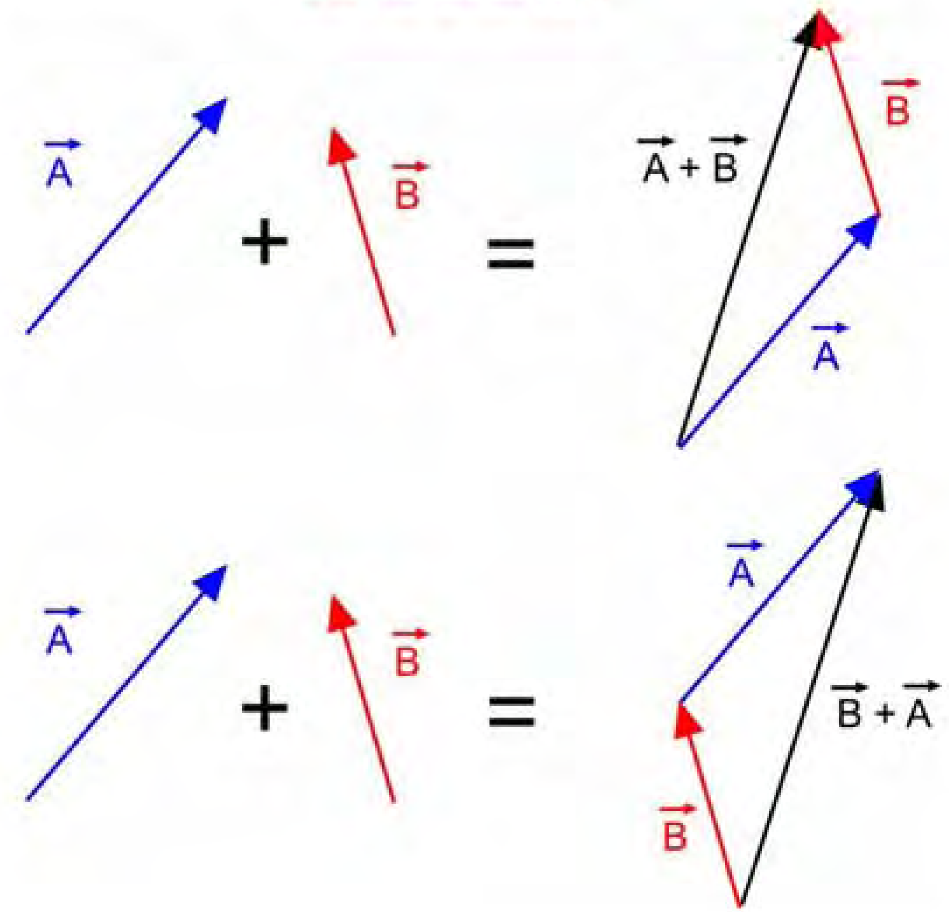
EJEMPLOS: ↓ g

POSICIÓN Y VELOCIDAD DE UN OBJETO

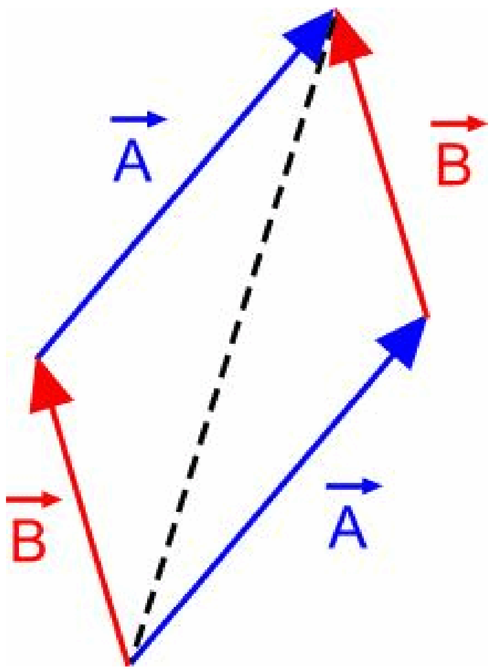
Dos vectores son iguales si sus magnitudes son iguales y ambos apuntan en la misma dirección aún cuando sus puntos de partida sean diferentes.



GEOMETRÍA INDEPENDIENTE DEL SISTEMA DE REFERENCIA

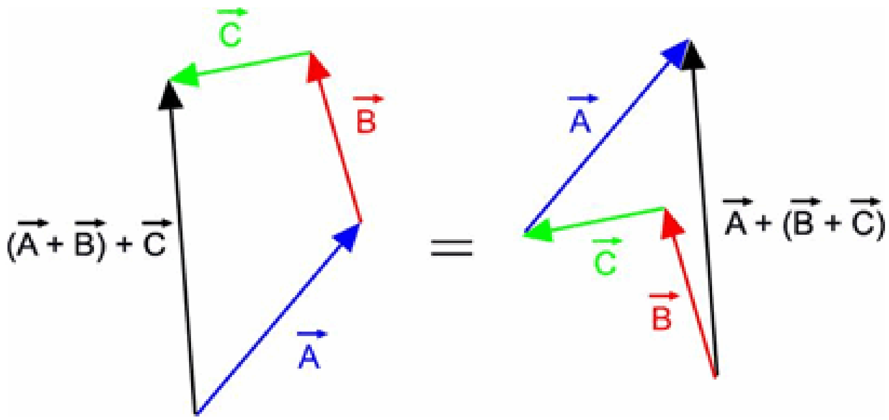


LEY DEL PARALELOGRAMO

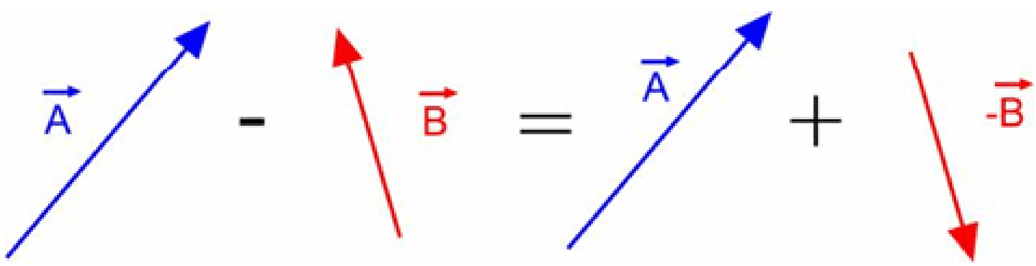


SUMA DE VECTORES ES CONMUTATIVA
¡NO IMPORTA EL ORDEN!

ASOCIATIVIDAD SUMA DE 3 VECTORES



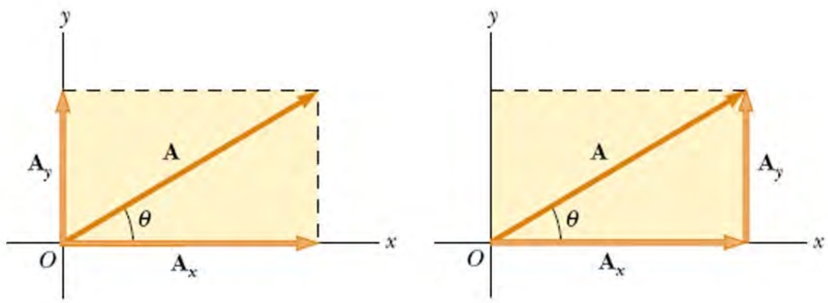
RESTA DE VECTORES



VECTORES

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA

→ SISTEMA DE REFERENCIA

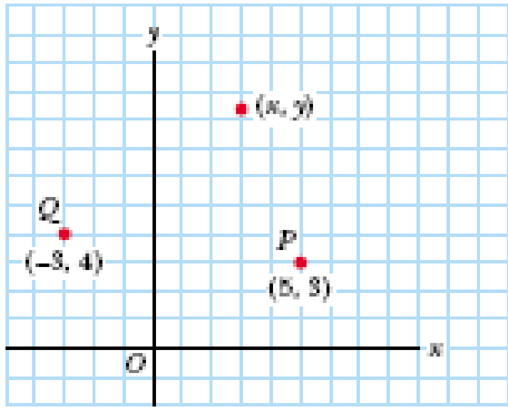


2DIM → $\vec{A} = \underbrace{(A_x, A_y)}_{\text{PAR ORDENADO}}$

MAGNITUD DEL VECTOR $\vec{A} \equiv |\vec{A}|$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Sistema de referencia



COMPONENTES CARTESIANAS

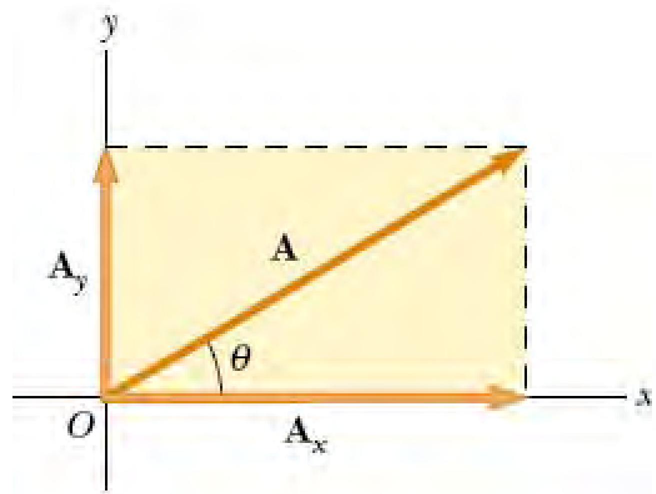
$$A_x = |\vec{A}| \cos\theta$$

$$A_y = |\vec{A}| \operatorname{sen}\theta$$

¡ORDEN DE LAS COMPONENTES ES IMPORTANTE!

DIRECCION $\longrightarrow$ $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$

SENTIDO $\longrightarrow$ SIGNO DE LAS COMPONENTES A_x y A_y



SUMA DE VECTORES

$\vec{A} = (A_x, A_y)$

$\vec{B} = (B_x, B_y)$

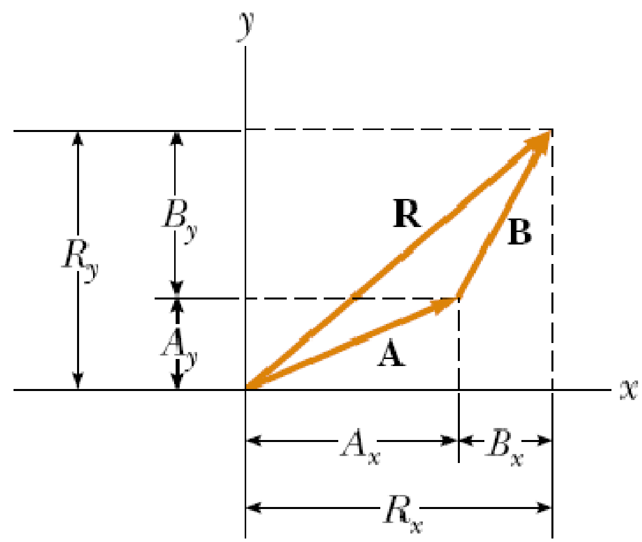
USANDO EL MISMO SISTEMA DE REFERENCIA

$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y)$

PARA SUMAR VECTORES SE SUMAN SUS COMPONENTES

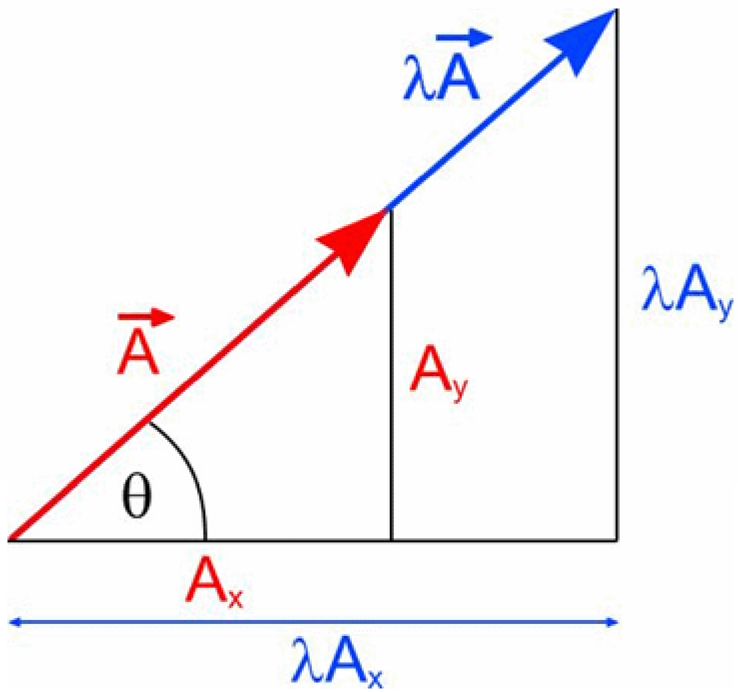
RESTA DE VECTORES

$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y)$

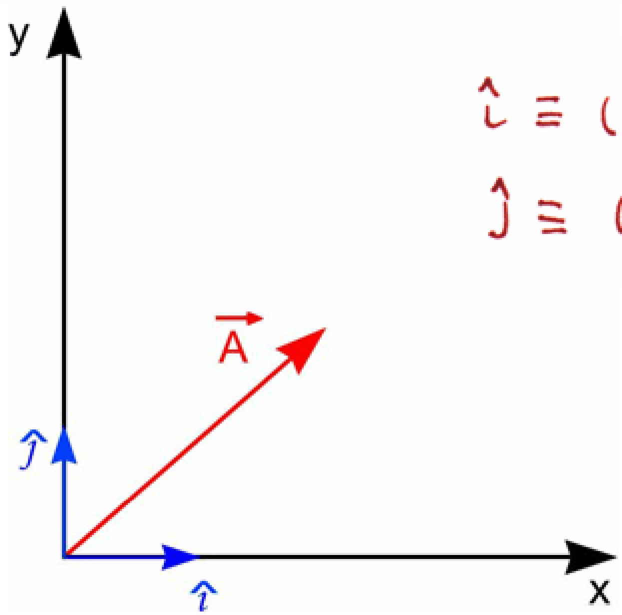


Multiplicación por escalar

$$\lambda \vec{A} = \lambda (A_x, A_y) = (\lambda A_x, \lambda A_y)$$



VECTORES UNITARIOS

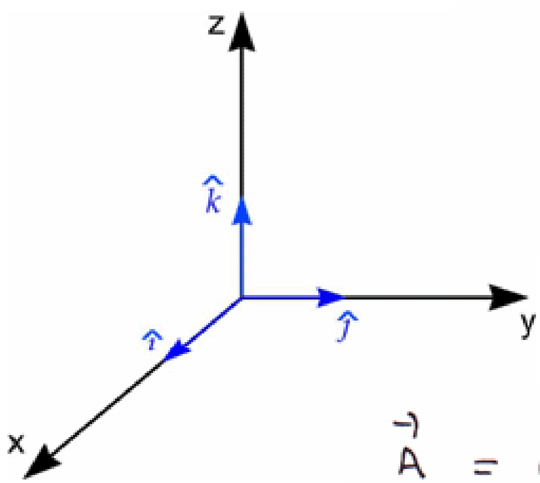


$$\hat{\imath} \equiv (1,0)$$

$$\hat{\jmath} \equiv (0,1)$$

$$\vec{A} = A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath}$$

3- DIMENSIONES



$$\hat{\imath} \equiv (1,0,0)$$

$$\hat{j} \equiv (0,1,0)$$

$$\hat{k} \equiv (0,0,1)$$

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

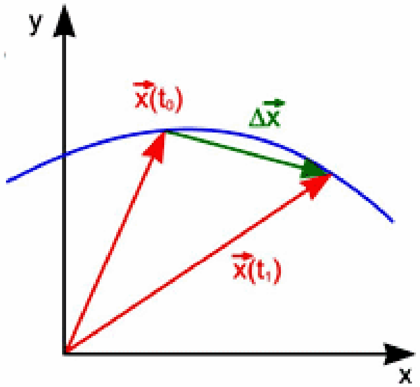
$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$$

Movimiento en dos dimensiones

En 1922, uno de los Zacchinis, una famosa familia de circenses italianos, fue la primera "bala humana" disparada por un cañón. Para aumentar la espectacularidad del acto, la familia aumento gradualmente la distancia del vuelo, hasta que, en 1940, Emanuel Zacchini voló sobre tres ruedas de la fortuna, atravesando una distancia horizontal de 69 m.

¿Cómo pudo saber donde colocar la red y cómo pudo estar seguro que alcanzaría altura suficiente para no golpear las ruedas de la fortuna?

Posición (2 DIM)



$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$$

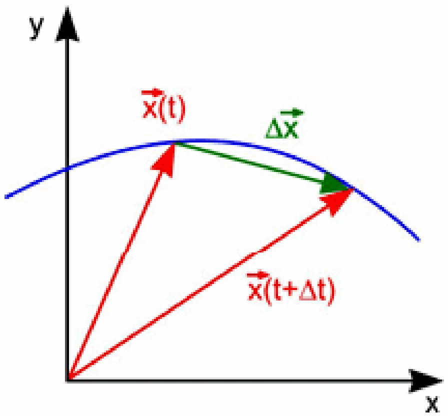
Velocidad

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$$

Aceleración

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$$

VELOCIDAD



DESPLAZAMIENTO

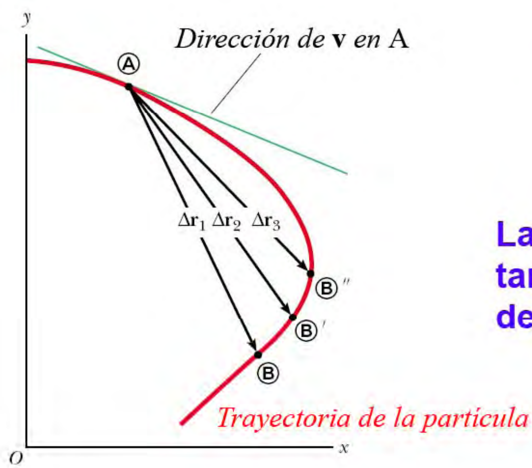
$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right)$$

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

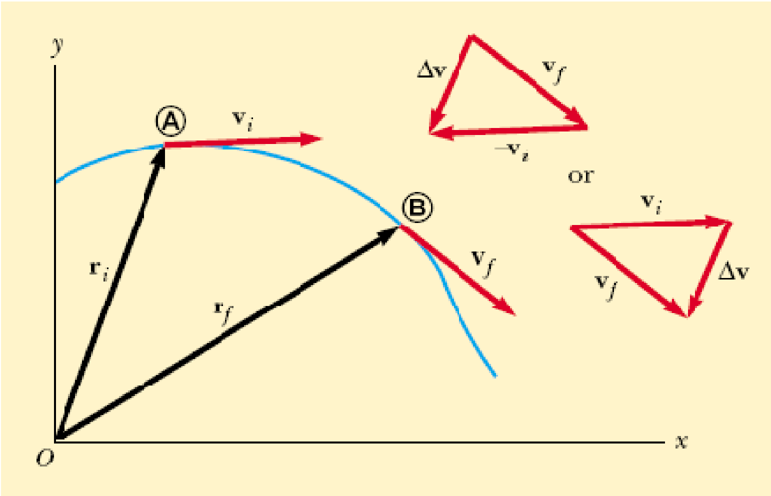
$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right] \equiv \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{\dot{x}(t)}$$

ANÁLOGAMENTE PARA $v_y(t)$....



La velocidad es siempre tangente a la trayectoria de la partícula

Aceleración instantánea



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

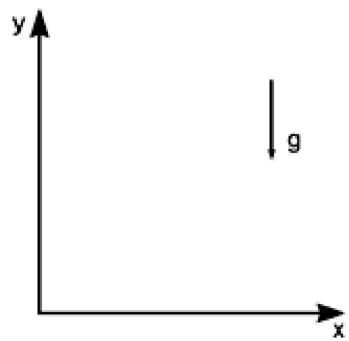
¡La aceleración no es necesariamente tangente a la trayectoria de la partícula!

Una partícula puede acelerar si:

- **El modulo de la velocidad cambia.**
- **La dirección de la velocidad cambia.**
- **Tanto el modulo de la velocidad como su dirección cambian.**

ACELERACIÓN CONSTANTE

$$\vec{a} = (0, -g)$$



$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$$

EJE X

$$a_x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$v_x = v_{0x}$$

EJE Y

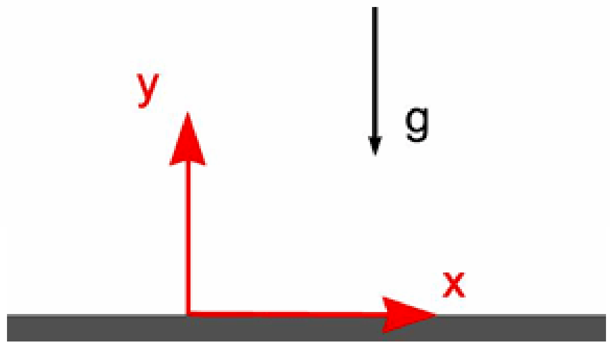
$$a_y = -g$$

$$\Downarrow$$

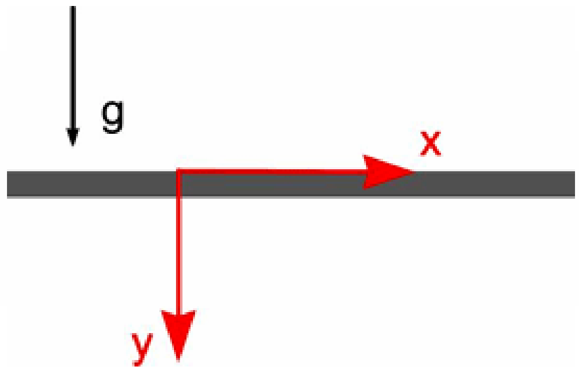
$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_{0y} - g t$$

EJEMPLO



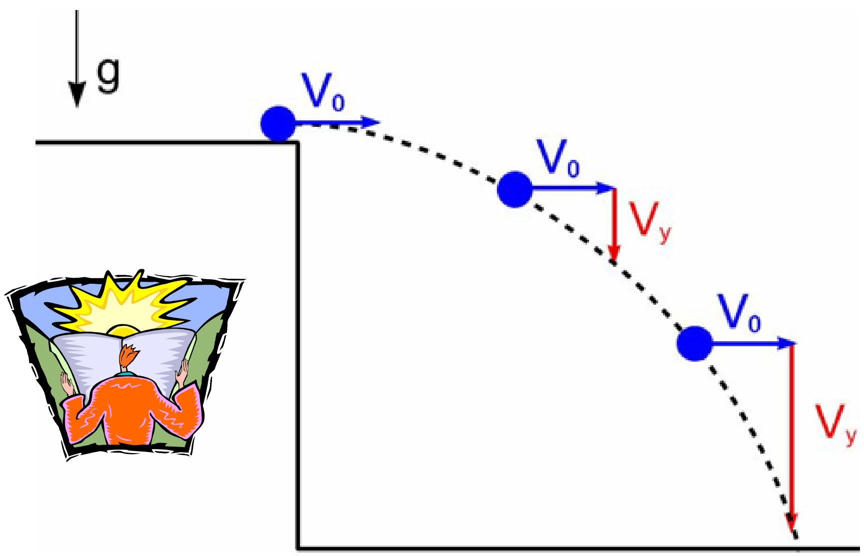
$$\vec{g} = (0, -g)$$

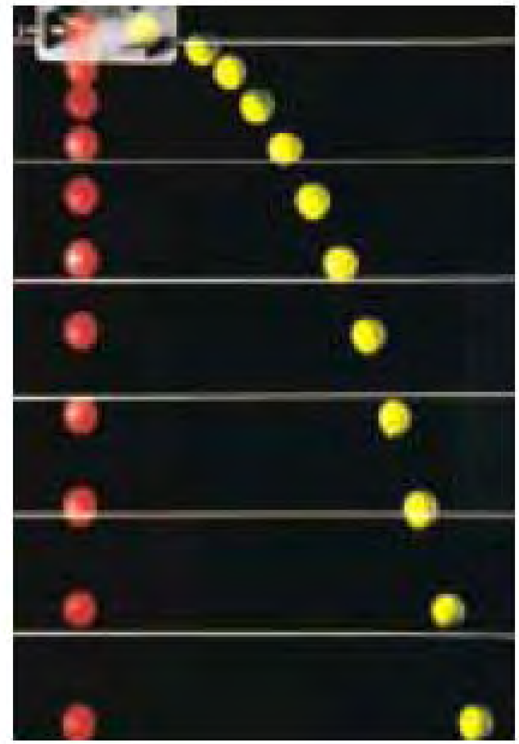


$$\vec{g} = (0, g)$$

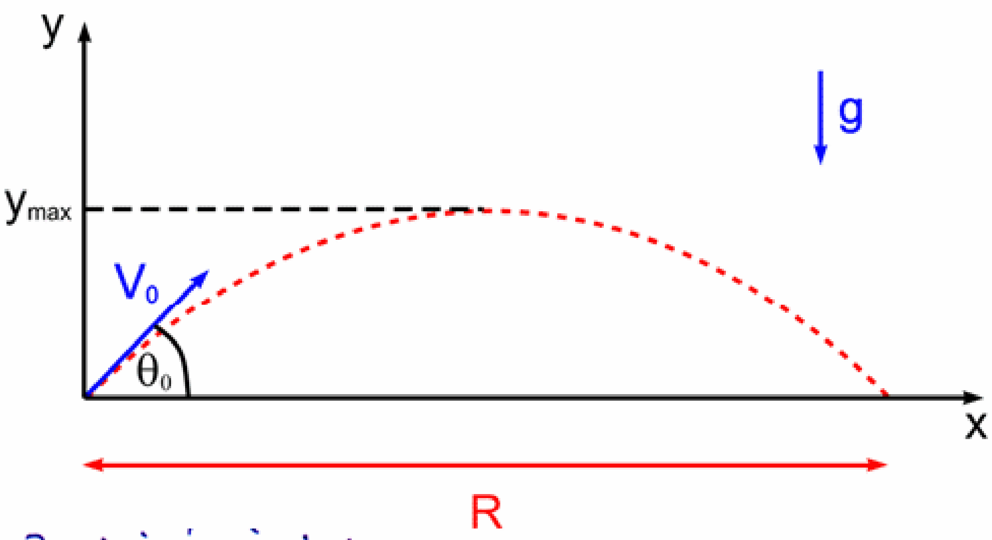
Principio de superposición (Galileo):

“Los movimientos horizontal y vertical de un proyectil son independientes entre sí. La trayectoria del proyectil está dada por la combinación de estos movimientos”.





LANZAMIENTO DE PROYECTILES



POSICIÓN INICIAL $\quad x_0 = y_0 = 0$

VELOCIDAD INICIAL $\quad v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$

$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$

ACELERACIÓN $\quad a_x = 0$

$a_y = -g$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

EJE X

$$x = v_0 \cos\theta_0 \, t \qquad (1)$$

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 \qquad (2)$$

EJE Y

$$y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (3)$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - g t \qquad (4)$$

DE LA ECUACIÓN (1)

$$x = v_0 \cos\theta_0 \, t \implies t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$$

REEMPLAZANDO EN (3)

$$y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \frac{x}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0} \right)^2$$

$$y = \tan\theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0} x^2$$

$$y \equiv ax - bx^2 = \text{EC. PARÁBOLA}$$

ALCANCE MÁXIMO R

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \tan\theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0} x^2$$

$$0 = x\left(\tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0} x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{i)} \quad x = 0$$

$$\text{ii)} \quad \tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0} x = 0$$

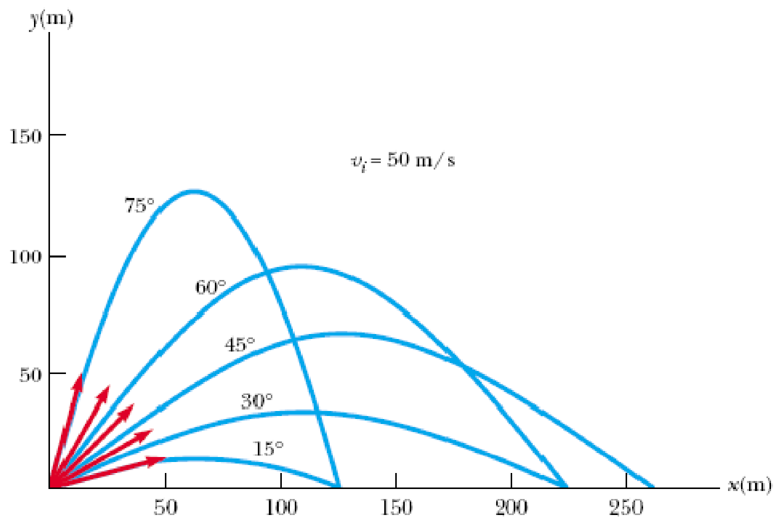
$$\therefore \quad x = \frac{2v_0^2}{g}\,\frac{\operatorname{sen}\theta_0\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0}$$

POR LO TANTO

$$R = \frac{2 v_0^2}{g} \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0$$

$$\boxed{R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\theta_0)}$$

$$R_{maximo} = \frac{v_0^2}{g} \quad \text{PARA} \quad \theta = 45^\circ$$



ALTURA MAXIMA

$$v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = v_o \operatorname{sen}\theta_o - g\, t_{max}$$

$$t_{max} = \frac{v_o \operatorname{sen}\theta_o}{g}$$

REEMPLAZANDO EN 3

$$H = v_o \operatorname{sen}\theta_o \left(\frac{v_o \operatorname{sen}\theta_o}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \operatorname{sen}\theta_o}{g}\right)^2$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta_o}{g}}$$

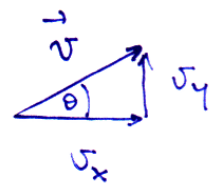
RELACIÓN ÚTIL

$$\frac{v_y}{v_{ox}} = \frac{v_{oy}}{v_{ox}} - \frac{g\,t}{v_{ox}}$$

$$v_{ox} \equiv v_o \cos\theta_o = v_x$$

PERO

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$



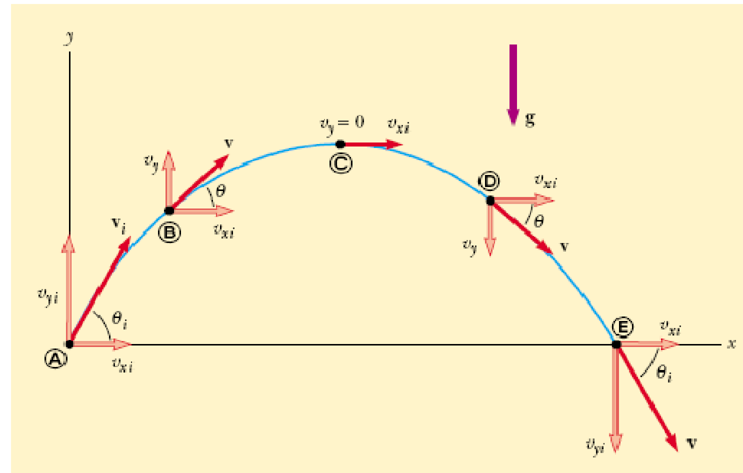
ENTONCES

$$\tan\theta = \tan\theta_o - \frac{g}{v_{ox}}\,t$$

PERO

$$t = \frac{x}{v_{ox}} = \frac{x}{v_o\cos\theta_o}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \tan\theta_o - \frac{g}{v_o^2\cos^2\theta_o}\,x$$



PERO $R = \dfrac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0$ ENTONCES

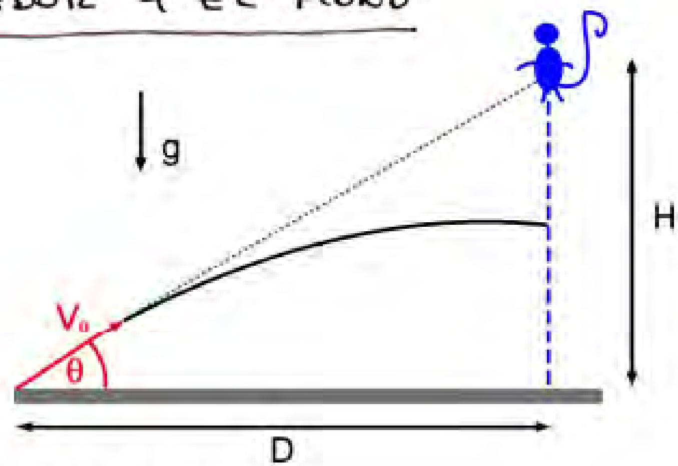
$$\tan\theta = \tan\theta_0 \left(1 - \frac{g}{v_0^2} \frac{x}{\cos^2\theta_0} \frac{\cos\theta_0}{\operatorname{sen}\theta_0} \right)$$

$$\tan\theta = \tan\theta_0 \left(1 - \frac{2x}{\frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0} \right)$$

$$\boxed{\tan\theta = \tan\theta_0 \left(1 - \frac{2x}{R} \right)}$$

ÁNGULO EN FUNCIÓN DE LA POSICIÓN

EL CAZADOR Y EL MONO



ECS. DE MOVIMIENTO

BALA

$$x = v_0 \cos\theta\, t \qquad y = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - g t$$

MONO

$$Y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

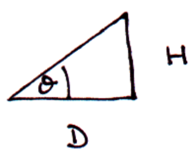
$$V_y = -gt$$

TIEMPO QUE DEMORA LA BALA EN RECORRER LA DISTANCIA D

$$x = D \quad \Rightarrow \quad D = v_0 \cos\theta \, T$$

$$T = \frac{D}{v_0 \cos\theta}$$

PERO



$$\tan\theta = \frac{H}{D}$$

$$\Rightarrow \qquad D = \frac{H}{\tan\theta} = \frac{H\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

ENTONCES

$$\boxed{T = \frac{H}{v_0 \operatorname{sen}\theta}}$$

ALTURA DE LA BALA

$$y_{BALA} = v_0 \operatorname{sen}\theta \, \frac{H}{v_0 \operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{v_0 \operatorname{sen}\theta} \right)^2$$

$$\boxed{y_{BALA} = H - \frac{1}{2} \frac{g H^2}{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}}$$

ALTURA DEL MONO

$$y_{mono} = H - \frac{1}{2} g T^2$$

$$y_{mono} = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{v_0 \operatorname{sen} \theta} \right)^2$$

$$\boxed{y_{mono} = H - \frac{1}{2} \frac{g H^2}{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$$

POR LO TANTO

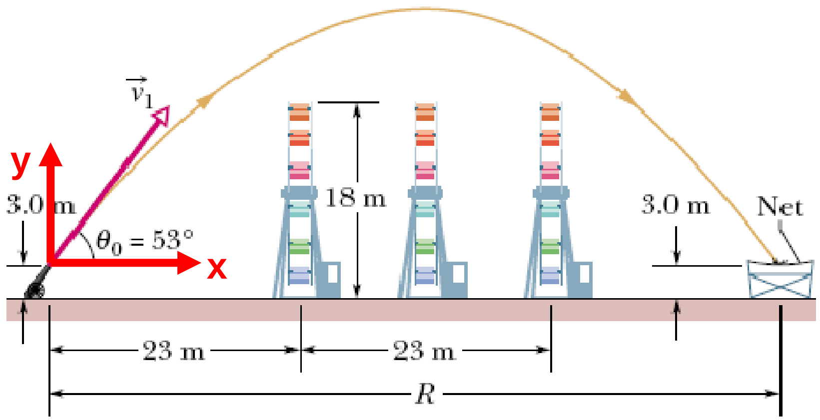
$$y_{BALA} = y_{MONO}$$

¡EL CAZADOR SIEMPRE LE APUNTA AL MONO!

Movimiento en dos dimensiones

En 1922, uno de los Zacchinis, una famosa familia de circenses italianos, fue la primera "bala humana" disparada por un cañón. Para aumentar la espectacularidad del acto, la familia aumento gradualmente la distancia del vuelo, hasta que, en 1940, Emanuel Zacchini voló sobre tres ruedas de la fortuna, atravesando una distancia horizontal de 69 m.

¿Cómo pudo saber donde colocar la red y cómo pudo estar seguro que alcanzaría altura suficiente para no golpear las ruedas de la fortuna?



Condiciones iniciales

$$x_1 = y_1 = 0$$
$$v_1 = 26,5 \text{ m/s}$$
$$\theta_1 = 53°$$

Ecuaciones de movimiento

$$x = v_1 \cos\theta_1 \, t$$
$$y = v_1 \text{sen}\,\theta_1 \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

¿Pasa por arriba de la primera rueda de la fortuna?

$$t_2 = \frac{x_2}{v_1 \cos\theta_1} \Rightarrow y_2 = v_1 \text{sen}\,\theta_1 \left(\frac{x_2}{v_1 \cos\theta_1} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_2}{v_1 \cos\theta_1} \right)^2$$

Evaluando

$$y_2 = (\tan 53°)(23 \text{ m}) - \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(23 \text{ m})^2}{2(26,5 \text{ m/s})^2 (\cos 53°)^2}$$

$$y_2 = 20,3 \text{ m}$$

Por lo tanto, el proyectil humano pasa 5,3 m por arriba de la primera rueda de la fortuna

¿A qué distancia deben colocar la red?

$$R = \frac{2 v_1^2 \text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_1}{\text{g}}$$

$$R = \frac{2(26,5 \text{ m/s})^2 \text{sen}(53°) \cos(53°)}{9,8 \text{ m/s}^2} = 69 \text{ m}$$