Solución Problema 16) Consideramos el tiempo total T dividido en dos intervalos: el tiempo T_1 durante el cual la piedra cae hasta el fondo del pozo, y el tiempo T_2 durante el que el sonido del choque viaja de vuelta hasta el borde superior.
De esto es claro que

$$T = T_1 + T_2$$

Analicemos cada intervalo:

Caída: Tomando como eje de referencia la vertical del pozo con orígen en el borde, la piedra sufre una caída libre con aceleración g hacia abajo, y rapidez inicial nula pues se deja caer. La distancia recorrida por la piedra es H, y el tiempo que tarda en ello es T_1. De aquí que se debe cumplir

$$H = \frac{1}{2} g \cdot T_1^2$$

Despejando, $T_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Viaje del sonido: El sonido viaja de vuelta a rapidez constante U, y recorre la misma distancia H hacia arriba, tardando el tiempo T_2, de modo que

$$H = U \cdot T_2$$

Despejando, $T_2 = \frac{H}{U}$.

Reemplazando las expresiones obtenidas para T_1 y T_2 en la primera ecuación, se llega a que

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{U} \quad (1)$$

a) Debemos resolver la ecuación anterior para despejar H. Si llamamos $x = \sqrt{H}$, la ecuación se transforma en

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} x + \frac{1}{U} x^2$$

O equivalentemente,

$$\frac{1}{U} x^2 + \sqrt{\frac{2}{g}} x - T = 0$$

una ecuación cuadrática, cuya solución es $x = \frac{U}{2} \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{g}} \pm \sqrt{\frac{2}{g} + \frac{4T}{U}} \right)$.
La solución con resta resulta en un valor negativo, lo que no es posible pues $x = \sqrt{H} \geq 0$, por lo tanto debemos tomar la solución con suma. Como $H = x^2$, se obtiene que

$$H = \frac{U^2}{4} \cdot \left(\frac{2}{g} - 2\sqrt{\frac{2}{g} \cdot \left(\frac{2}{g} + \frac{4T}{U} \right)} + \left(\frac{2}{g} + \frac{4T}{U} \right) \right) = \frac{U^2}{g} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gT}{U}} \right) + UT$$

b) Si la velocidad del sonido es muy grande, el tiempo total será empleado casi completamente en la caída libre de la piedra, y en el caso límite, completamente. En este caso, U es muy grande por lo que $T_2 = \dfrac{H}{U} \approx 0$. La ecuación (1) se transforma en

$$T \approx \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

De donde $H \approx \dfrac{1}{2} g \cdot T^2$, lo que era de esperarse dado que casi todo el tiempo se emplea en la caída libre ($T_1 \approx T, T_2 \approx 0$). Usando $T = 5s, g \approx 10\frac{m}{s^2}$ se obtiene que $H \approx 125m$ es aproximadamente el valor límite.