EJERCICIO PROPUESTO

EMILIO VILCHES G.

Problema 38.- Parte c:

Demuestre las siguientes proposiciones para $p, q \in \mathbb{R}$:

1. Si $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ y $q \notin \mathbb{Q}$ entonces $p+q \notin \mathbb{Q}$
2. Si $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ y $q \notin \mathbb{Q}$ entonces $p-q \notin \mathbb{Q}$
3. Si $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ y $q \notin \mathbb{Q}$ entonces $pq \notin \mathbb{Q}$

Solución:

Para cada una de las proposiciones usaremos el razonamiento por contradicción, recordemos en que consiste:

Dadas dos proposiciones r y s, si queremos demostrar $r \Rightarrow s$ una forma alternativa es razonar por contradicción, es decir asumir r y negar s para obtener una contradicción, osea,

$$(r \wedge \overline{s}) \Rightarrow F$$

en efecto

$$\begin{aligned}
[(r \wedge \overline{s}) \Rightarrow F] \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{(r \wedge \overline{s})} \vee F \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{(r \wedge \overline{s})} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{r} \vee \overline{\overline{s}} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{r} \vee s \\
&\Leftrightarrow \quad r \Rightarrow s
\end{aligned}$$

1. definamos
$$\begin{aligned}
r:&\ (p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}) \wedge (q \notin \mathbb{Q}) \\
s:&\ (p+q) \notin \mathbb{Q}
\end{aligned}$$
queremos probar que $(r \Rightarrow s)$, razonamos por contradicción, es decir probaremos $(r \wedge \overline{s}) \Rightarrow F$. Debemos asumir $(r \wedge \overline{s})$, osea, $(p+q \in \mathbb{Q})$, $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ y $q \notin \mathbb{Q}$.
De la parte (c) sabemos que si dos números son racionales entonces su resta también es racional, por lo tanto $(p+q) \in \mathbb{Q}$ y $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ implica $q \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice que $q \notin \mathbb{Q}$.
2. idéntica a la anterior.
3. Por contradicción supongamos que $pq \in \mathbb{Q}$. de la parte (a) se tiene que $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$ y de la parte (c), que $\frac{pq}{p} = q \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice que $q \notin \mathbb{Q}$.