Matemáticas II - Escuela de Verano 2008
Clase Auxiliar III

Problema 1.- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Escribir en símboos matemáticos y decidir el valor de verdad de las expresiones:

a) Hay un elemento en A que es mayor que los restantes.

b) Existe un único elemento en A cuyo cuadrado es 4.

c) Para cada elemento en A existe otro en A que es menor o igual que él.

d) Existe un elemento cuyo cuadrado es igual a sí mismo.

Solución.-

a) Usando cuantificadores matemáticos

$$(\exists x \in A) : (\forall y \in A \backslash \{x\}) \;\; x > y$$

Es claro que la frase es cierta pues bata considerar $x = 6$ pues en este caso

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6$$

b) Como antes

$$(\exists ! x \in A) : (x^2 = 4)$$

y nuevamente la frase es cierta pues el único de los elementos de A que cumple la proposición es $x = 2$.

c) Matemáticamente hablando esto se reduce a

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A \backslash \{x\}) : \;\; y \leq x$$

y en este caso la frase es falsa pues para $x = 1$ no tenemos ningún otro elemento que lo minore.

d) De manera similar se tendrá la frase

$$(\exists ! x \in A) : \;\; x^2 = x$$

lo cual es cierto pues solo $x = 1$ cumple la proposición.

Problema 2.- Negar las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : \; x^2 > 0$.
Respuesta: $\exists x \in \mathbb{R} : \; x^2 \leq 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi$.
Respuesta: $\forall x \in \mathbb{R} : e \geq x \vee x \geq \pi$. Notar que aparece un $\vee$ en la negación, esto es pues la expresión $e < x < \pi$ es realmente una proposición compuesta $e < x \wedge x < \pi$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x < y$.
Respuesta: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (x + y = 1 \Rightarrow x = -y)$.
Respuesta: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x + y = 1 \wedge x \neq -y$. Es bueno que recuerden que la manera correcta de negar una implicancia es la siguiente:

$$\begin{aligned} \sim (p \Rightarrow q) &\equiv \sim (\sim p \vee q) \\ &\equiv p \wedge \sim q \end{aligned}$$

Problema 3.- Determine el valor de verdad de las siguientes expresiones, justifique su respuesta:

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$

De la definición de subconjunto se tiene que $\emptyset \subseteq \emptyset$ ssi

$$\forall x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset$$

ahora como la expresión $\forall x \in \emptyset$ es siempre F y F implica cualquier cosa se deduce que efectivamente el vacío es subconjunto de sí mismo.

Nota: un argumento similar nos lleva a la coclusión que $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto.

b) $\emptyset \in \emptyset$

Esta frase es falsa pues el conjunto vacío no contiene elementos. Si asumiéramos que la frase es cierta tendríamos que el elemento vacío está dentro del conjunto vacío y por ende el vacío contiene algo lo cual por definición no ocurre.

c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Ya vimos que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto luego la frase es cierta.

d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Esto es cierto pues el elemento $\emptyset$ está claramente listeado en el conjunto $\{\emptyset\}$

e) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

Sabemos que el conjunto vacío es un conjunto sin elementos, entonces la expresión:

$$\forall x \in \{\emptyset\} \Rightarrow \underbrace{x \in \emptyset}_{F}$$

tiene la gracia de resultar falsa si tomamos $x = \emptyset$ pues nos quedaría:

$$\underbrace{\emptyset \in \{\emptyset\}}_{V} \Rightarrow \underbrace{\emptyset \in \emptyset}_{F}$$

f) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

La frase es claramente falsa por todos los argumentos que se han dado hasta ahora, en especial el hecho que el conjunto vacío no contiene elementos.

g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

Este argumento lo pueden aplicar siempre: sea A un conjunto, luego $A = A$ y por una equivalencia bastante conocida, si B también es un conjunto

$$A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

en particular $A \subseteq A$, es decir un conjunto siempre es subconjunto de sí mismo.

h) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

Falso, para que la frase fuera cierta debería estar dentro de los paréntesis elemento exacto, en nuestro caso si dijera:

$$\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$$

podríamos aseverar la validez de la proposición.

i) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

De la definición subconjunto:

$$\forall x \in \{a, b\} \Rightarrow x \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$$

tanto a como b están en $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ luego la expresión inicial es cierta.

j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

No es difícil convencerse que la expresión no es cierta.

Nota: El objetivo del problema es que les quede totalmente clara la diferencia entre la pertenencia y la inclusión, sobretodo el hecho que para decir que algo es subconjunto lo que nos interesa son los elementos dentro del conjunto en cuestión, mientras que en la pertenencia lo trascendente es el conjunto completo visto como un elemento dentro de otros conjuntos.

Problema 4.- Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

a) Se $A \in B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \in C$

El hecho que B sea subconjunto de C nos asegura que cualquier elemento que pertenezca a B está inmediatamente incluído en C por ende es obvio que $A \in C$.

b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

Tomando los conjuntos $A = \{1\}$ y $B = C = \{\{1\}, 2\}$ se concluye que la frase no es cierta pues hemos encontrado un contraejemplo, esto pues:

$$\{1\} \in \{\{1\}, 2\}$$

pero

$$1 \notin \{\{1\}, 2\}$$

c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$

Tomemos los siguientes conjuntos

$$A = \{1\}$$

$$B = \{1, 2\}$$
$$C = \{\{1, 2\}\}$$

es claro que $1 \in B$ luego $A \subseteq B$ y también se cumple que $B \in C$, pero A no esta listado en la defnción de C, con esto hemos encontrado un contraejemplo y así la frase no puede ser cierta.

d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$

La frase es falsa pero les dejo propuesto encotrar un contraejemplo.

Nota: Recordar que para probar que una generalidad no es cierta basta que encuentren un contraejemplo y para demos trar lo contrario (es decir que es cierta) deben probar genéricamente.

Problema 5.- Demuestre lo siguiente:

a) Si $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$

b) Si $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$

c) Si $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

d) Si $A \subseteq B \Rightarrow A \backslash B = \emptyset$

Solución.- Se tiene lo siguiente:

a) Si $A \cap B = A$ entonces en particular $A \subseteq A \cap B$ entonces sea $x \in A$ por lo anterior
$$\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$
de donde se concluye que
$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$
es decir $A \subseteq B$

b) Por otro lado si $A \cup B = A$ entonces $A \cup B \subseteq A$ con lo que sea $x \in B$ se tiene que
$$x \in B \Rightarrow (x \in B \cup A) \Rightarrow x \in A$$
luego se tiene lo pedido, ie, $B \subseteq A$

c) Recordar que $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ por la propiedad de la contrarrecíproca.
Sea $x \in A$ entonces
$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow x \in B &\equiv \sim x \in B \Rightarrow \sim x \in A \\ &\equiv x \notin B \Rightarrow x \notin A \\ &\equiv x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \end{aligned}$$
es decir $B^c \subseteq A^c$

d) Usamos el hecho que $A \backslash B \equiv A \cap B^c$. Con esto supongamos que $A \subseteq B$ esto nos dice que
$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$
ahora digamos por un momento (para llegar a una contradicción) que $\exists y \in A \backslash B$, esto es $y \in A \cap B^c$ lo cual asegura que
$$(\exists y) : (y \in A) \wedge (y \notin B)$$
lo cual es una contradicción. Se concluye que $A \backslash B = \emptyset$.