Matemáticas II - Escuela de Verano 2008
Clase Auxiliar II

Pregunta 1.- Determine el valor de erdad de las siguientes proposiciones (cuando sea posible):

a) Si 1=1 entonces 2=3

b) Si $1 \neq 0$ entonces $2 \neq 2$

c) 1=0 es una condición suficiente para que 1=2

d) 1=2 es una condición necesaria para que 1≠2

e) Si todo lo que digo es falso entonces todo lo que digo es verdadero.

Solución.- La gracia de este problema es entender la diferencia entre las condiciones necesarias y suficientes. Como una primera explicación diremos que una condición suficiente significa que si suceden las premisas entonces también sucederán las consecuencias, es decir:

$$\text{(p es condición suficiente para q)} \equiv (p \Rightarrow q)$$

del mismo modo una condición necesaria nos dice que si lo último ocurrió, entonces necesariamente la condición inicial tiene que haber sido cierta, ie[1]:

$$\text{(p es condición necesaria para q)} \equiv (p \Leftarrow q)$$

aplicando esto a nuestro problema nos queda:

a) Si 1=1 entonces 2=3

Traduciendo al lenguaje lógico tenemos

$$\underbrace{(1 = 1)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(2 = 3)}_{F}$$

y luego la implicancia toma el valor de verdad F.

b) Si $1 \neq 0$ entonces $2 \neq 2$

Similarmente al anterior

$$\underbrace{(1 \neq 0)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(2 \neq 2)}_{F}$$

y nuevamente la proposición es F.

[1] ie significa es decir

c) 1=0 es una condición suficiente para que 1=2

Como condición suficiente es el implica hacia la derecha se tendrá

$$\underbrace{(1=0)}_{F} \Rightarrow \underbrace{(1=2)}_{F}$$

y en este caso el valor de verdad es V.

d) 1=2 es una condición necesaria para que 1≠2

Traduciendo se tiene

$$\underbrace{(1=2)}_{F} \Leftarrow \underbrace{(1\neq 2)}_{V}$$

lo cual no puede ser, ie, la proposición es F.

e) Si todo lo que digo es falso entonces todo lo que digo es verdadero.

Llamemos:

$$p := \textit{Todo lo que digo es F}$$
$$q := \textit{Todo lo que digo es V}$$

queremos descubrir el valor de verdad de la expresión $p \Rightarrow q$. Tenemos lo casos p verdad y p falso:

- **Caso 1:** Si $p \equiv V$ entonces cualquier cosa que yo diga es mentira, en particular si digo la frase *yo digo mentiras* es falsa y por consiguiente la negación de esa frase es verdadera.
  Ahora, yo digo mentiras, es algo del estilo

  $$(\exists frase)(frase \equiv F)$$

  y luego la negación será

  $$(\forall frase)(frase \equiv V)$$

  lo cual es identico a decir *Todo lo que digo es V*, ie, hemos demostrado que si p es cierta, entonces q también lo es.
- **Caso 2:** Si $p \equiv F$ entonces independiente del valor de verdad de q la implicancia $p \Rightarrow q$ es cierta.

Concluímos que la expresión *Si todo lo que digo es falso entonces todo lo que digo es verdadero* es verdadera.

Problema 2.- Determine cual de las siguientes expresiones son tautologías o contradicciones:

a) $(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow (q \wedge \sim q)$

b) $(p \vee \sim p) \Leftrightarrow (q \vee \sim q)$

c) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

d) $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$

e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\exists r) : (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$

Solución.-

a)

$$\underbrace{\underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}}_{V}$$

b)

$$\underbrace{\underbrace{(p \vee \sim p)}_{V} \Leftrightarrow \underbrace{(q \vee \sim q)}_{V}}_{V}$$

c) Notemos que $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ luego

$$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q) \equiv (p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$$

usando la conmutatividad y la asociatividad del $\wedge$

$$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \equiv \underbrace{\underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \wedge \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}}_{F}$$

d) De un modo similar al anterior $\sim (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \ \vee q)$ y así:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \vee q) \Leftrightarrow (p \ \vee q)$$

lo cual es tautológico.

e) Este problema es un tanto distinto, como queremos probar un $\Leftrightarrow$ debemos probar cada uno de las implicancias:

- **Caso $\Rightarrow$:** Supongamos que $(p \Rightarrow q)$ es cierto, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) &\equiv V \wedge (p \Rightarrow q) \\ &\equiv (p \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \end{aligned}$$

  luego se prueba el lado derecho pues existe r (que en nuestro caso es específicamente p) tal que $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$

- **Caso $\Leftarrow$:** Por silogismo se concluye la veracidad de este implica.[2]

Problema 3.- Demostrar las siguientes equivalencias:

a) $[\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

b) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

[2] Ver Cátedra del Jueves

Solución.-

a) Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
[\, p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] &\equiv [\, p \Rightarrow (\sim q \vee r)] \\
&\equiv [\sim p \vee (\sim q \vee r)] \\
&\equiv [(\sim p \vee \sim q) \vee r] \\
&\equiv [\sim (p \wedge q) \vee r] \\
&\equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]
\end{aligned}$$

b) De manera similar:

$$\begin{aligned}
[p \Rightarrow (q \wedge r)] &\equiv \sim p \vee (q \wedge r) \\
&\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \\
&\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)
\end{aligned}$$

Problema 4.- Se define el conectivo lógico binario $\star$ por la siguiente tabla:

p	q	p⋆q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Muestre que $p \star p \equiv \sim p$ y que $p \vee q \equiv (p \star q) \star (p \star q)$

Solución.- Primero notemos que si $p \equiv V$ entonces $p \star p \equiv F$ y que si $p \equiv F$ entonces $p \star p \equiv V$ luego es claro que

$$\sim p \equiv p \star p$$

Ahora usamos esto para notar que $(p \star q) \star (p \star q) \equiv \sim (p \star q)$, entonces si hacemos la tabla:

p	q	p⋆q	∼(p⋆q)
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	F

es claro que la última columna es exactamente la tabla de verdad de la expresión $p \vee q$