Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2008
Matemáticas II

Guía N^{o}1: Lógica, Conjuntos e Inducción.

0.1. Lógica proposicional

1. Construya las Tablas de Verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $p \wedge (q \vee r)$
   b) $(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$
   c) $[p \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})] \vee [(q \wedge \bar{p}) \vee (r \wedge \bar{q})]$
   d) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \vee \bar{q})$
   e) $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
   f) $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

2. Si $p \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow F$ encuentre el valor de verdad de:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \Rightarrow q)$$

3. Sean p, q, r proposiciones tales que: $p \Leftrightarrow V$, $q \Leftrightarrow F$ y r es una proposición cualquiera. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $(p \wedge q) \vee q$
   b) $(p \vee q) \wedge q$
   c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
   d) $(q \vee r) \Rightarrow \overline{(\bar{p} \vee \bar{r})}$
   e) $\overline{[p \vee (\bar{p} \wedge q) \wedge q]} \Rightarrow [(\bar{q} \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow s)]$.

4. Sean p y q proposiciones. Suponga que lo siguiente es verdadero. p es verdadera sí y sólo sí q es verdadera. ¿Cuales de las siguientes son entonces verdaderas?.

   a) Si p es verdadera entonces q es verdadera.
   b) Si q es verdadera entonces p es verdadera.
   c) Si p es falsa entonces q es falsa.
   d) Si q es falsa entonces p es falsa.

5. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones (cuando sea posible):

a) Si $1 = 1$ entonces $2 = 2$.
b) Si $1 = 1$ entonces $2 = 3$.
c) Si $1 = 0$ entonces $1 = 1$.
d) Si $1 \neq 0$ entonces $2 \neq 2$.
e) Si $1 = 1$ y $1 = 2$ entonces $1 = 2$.
f) Si $1 = 3$ o $1 = 2$ entonces $1 = 1$
g) $1 = 0$ es una condición suficiente para que $1 = 2$.
h) $1 = 0$ es una condición necesaria para que $1 = 2$.
i) $1 = 1$ es una condición necesaria para que $1 = 2$.
j) $1 = 2$ es una condición necesaria para que $1 \neq 2$.
k) $1 = 2$ es una condición necesaria para que $1 \neq 3$.
l) $1 = 2$ es una condición suficiente para que $1 \neq 3$.
m) Si todo lo que digo es falso entonces todo lo que digo es verdadero.
n) Si todo lo que digo es falso entonces $1 = 2$.
ñ) Una condición suficiente para que $1 = 2$ es que $1 = 3$.

6. Determine cuales de las siguientes proposiciones son tautologías o contradicciones.

a) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
b) $p \Rightarrow (q \vee p)$
c) $(p \veebar q) \wedge (q \veebar r) \Rightarrow (p \veebar r)$
d) $(p \veebar q) \Rightarrow (p \vee q)$
e) $(p \vee q) \Rightarrow (p \veebar q)$
f) $p \vee (p \vee q) \Rightarrow \sim p$
g) $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
h) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p$
i) $\sim ((p \wedge \sim p) \Rightarrow q)$
j) $p \Leftrightarrow (p \vee q)$
k) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p$
l) $(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow (q \wedge \sim q)$
m) $(p \vee \sim p) \Leftrightarrow (q \vee \sim q)$
n) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
ñ) $p \vee q \vee \sim r$
o) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
p) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
q) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
r) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p$
s) $p \wedge (p \Rightarrow \sim p)$
t) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$
u) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
v) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
w) $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$
x) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
y) $p \wedge (q \vee p) \Leftrightarrow \sim p$
z) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

7. Demostrar las siguientes equivalencias:

a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$
b) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
c) $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

d) $(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)] \vee [(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Leftrightarrow (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$

8. Sean p y q proposiciones. Responda en palabras las siguientes preguntas:

   a) Si q es verdadera ¿Por qué $p \Rightarrow q$ es también verdadera independiente de cual es p?.

   b) Si p es falsa ¿Por qué $p \Rightarrow q$ es verdadera independiente de cual es q?.

   c) Si p es verdadera y q es falsa. ¿Qué se puede decir de $p \Rightarrow q$?.

   d) Si p y q son falsas. ¿Qué se puede decir de $p \Rightarrow q$?.

9. Se define el conectivo lógico $\oplus$ como: $p \oplus q \Leftrightarrow F$ si y solo si $p \Leftrightarrow F$ y $q \Leftrightarrow F$. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$[(p \Rightarrow q) \vee q] \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \oplus \bar{q}]$$

10. Se define el conectivo lógico binario $\star$ por la siguiente tabla:

p	q	p $\star$ q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

   Muestre lo siguiente:

   a) $\bar{p} \Leftrightarrow p \star p$

   b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \star q) \star (p \star q)$

   c) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \star p) \star (q \star q)$

   d) $p \star q \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{(p \wedge q)}]$

11. Dadas p y q proposiciones. Definimos el operador lógico $p \Diamond q$ como la proposición que es verdadera solo cuando q es verdadera y p es falsa.

   a) Escriba la tabla de verdad para $p \Diamond q$.

   b) Es $\Diamond$ asociativo?, Es $\Diamond$ conmutativo?.

   c) Describa $\Diamond$ utilizando los conectivos $\vee$,$\wedge$ y $\sim$.

   d) Muestre que:

1) $(\sim p)\Diamond(\sim q) \Leftrightarrow q\Diamond p.$	6) $(p\wedge q)\Diamond(r\wedge q) \Leftrightarrow p\Diamond(r\wedge q)$
2) $p\Diamond p \Leftrightarrow F$	7) $(p\Diamond q)\wedge(q\Diamond p) \Leftrightarrow F$
3) $(\sim p)\Diamond p \Leftrightarrow V$	8) $(p\Diamond q)\vee(q\Diamond p) \Leftrightarrow p \veebar q$
4) $(p\vee q)\Diamond r \Leftrightarrow (p\Diamond r)\wedge(q\Diamond r)$	9) $(p\Diamond q) \Rightarrow (p\rightarrow q) \Leftrightarrow V$
5) $(p\wedge q)\Diamond r \Leftrightarrow (p\Diamond r)\vee(q\Diamond r)$	10) $(p\Diamond q) \Leftrightarrow \sim(q \Rightarrow p)$

12. Indique en cuál de los siguientes casos p es condición necesaria y suficiente para q (es decir $p \Leftrightarrow q$).

    a) $p(n) =$" n es múltiplo de 4" y $q(n) =$" n es par".

    b) $p(n,m) =$"n y m son pares" y $p(n,m) =$"$n+m$ es par".

    c) $p(n) =$"n^2 es par" y $q(n) =$" n es par".

13. Exprese en palabras la recíproca y contrarecíproca de cada una de las siguientes afirmaciones:

    a) Si pienso luego existo.

    b) Si no pienso entonces no existo.

    c) Si no pienso entonces soy Buda.

    d) Si soy Buda entonces pienso.

    e) Estos pájaros tienen el mismo tipo de plumas sólo si vuelan juntos.

    f) Estos pájaros vuelan juntos sólo si tienen el mismo tipo de plumas

    g) Para leer el Tarot es necesario consultar el oráculo.

14. Traduzca las siguientes afirmaciones en lenguaje proposicional definiendo $p =$"Yo soy Julio Cesar" y $q =$"Tú eres Brutus".

    a) Si yo soy Julio Cesar entonces tu no eres Brutus.

    b) No es cierto que si yo soy Julio Cesar entonces tu eres Brutus.

    c) Yo soy Julio Cesar sólo si tu no eres Brutus.

    d) Tu eres Brutus sólo si yo soy Julio Cesar.

    e) Yo soy Julio Cesar sí y sólo sí tu no eres Brutus.

    f) Tu no eres Brutus sí y sólo sí yo no soy Julio Cesar.

    g) O bien tu eres Brutus o yo soy Julio Cesar.

    h) O bien yo no soy Julio Cesar o tu eres Brutus.

    i) Para que tu seas Brutus es necesario y suficiente que yo no sea Julio Cesar.

15. Traduzca las siguientes afirmaciones en lenguaje proposicional definiendo $p =$"La lógica es fácil", $q =$"En el examen hay una pregunta de lógica" y $r =$"aprobé el examen".

    a) Si la lógica es fácil entonces paso el examen.
    b) Si paso el examen entonces lógica es fácil.
    c) Si no paso el examen entonces lógica no es fácil.
    d) Si no hay pregunta de lógica entonces paso el examen.
    e) La lógica es difícil y paso el examen si no hay pregunta de lógica.
    f) O bien lógica es fácil y paso el examen o lógica es difícil y no paso el examen.
    g) Si lógica es fácil entonces si hay una pregunta de lógica paso el examen.
    h) Si lógica es difícil entonces paso el examen si no hay pregunta de lógica.
    i) Si no paso el examen entonces hay una pregunta de lógica y la lógica es difícil.

16. Convierta cada una de las afirmaciones siguientes en forma de lógica proposicional y determine si son verdaderas o falsas (si es posible) explicando porque.

    a) Si yo fuese una vaca entonces comería pasto. Como no soy una vaca entonces no como pasto.
    b) Si estamos capacitados para volar tendríamos alas. Como es cierto que podemos volar y dado que no volaríamos a menos que tuviéramos alas entonces claramente tenemos alas.
    c) Si las fábricas en el Oeste polucionan el aire entonces la lluvia ácida producirá daño en el Este. Dado que la lluvia ácida esta produciendo daño en el Este entonces las fábricas en el Oeste están polucionando el aire.
    d) Si las fábricas en el Oeste polucionan el aire entonces la lluvia ácida producirá daño en el Este. Dado que las fábricas en el Oeste no están polucionando el aire entonces la lluvia ácida no está produciendo daño en el Este.
    e) Si cuando las tasas de interés bajan la inflación y el mercado accionario suben. Entonces si la inflación sube también subirá el mercado accionario.
    f) Si cuando las tasas de interés bajan la inflación sube y cuando la inflación sube el mercado de bonos sube. Entonces si las tasas de interés bajan el mercado de bonos subirá.

17. Sean p, q y r proposiciones. Suponga que lo siguiente es verdadero. Si p es verdadera y q no lo es entonces r es verdadera. ¿Cuales de las siguientes son entonces verdaderas?.

    a) Si p es verdadera entonces r es verdadera.

    b) Si p no es verdadera y q es verdadera entonces r es verdadera.

    c) Si p no es verdadera o bien q no es verdadera (o ambas no son verdaderas) entonces r no es verdadera.

    d) Si r no es verdadera entonces p no es verdadera y q es verdadera.

    e) Si r no es verdadera entonces o bien p es falso o q es verdadera (o ambas).

18. Suponga que es verdadero que "todo lo que brilla es oro". Bajo esta hipótesis determine, cuando sea posible, el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

    a) No todo lo que es de oro brilla.

    b) Lo que no es de oro no brilla.

    c) Si mis dientes brillan entonces son de oro.

    d) Si mis dientes son de oro entonces brillan.

    e) Si mis dientes no son de oro entonces no brillan.

    f) Mis dientes son de oro si y solo si brillan.

0.2. Cuantificadores y Demostraciones

19. Escriba las siguientes afirmaciones proposicionalmente utilizando cuantificadores y encuentre su valor de verdad (cuando sea posible). En caso de ser verdadero o falso demuestrelo:

    Suponga que D es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

    a) Todos los números naturales son mayores que -1.

    b) Todos los cuadrados de números reales son mayores o iguales que 0.

    c) Todos los números reales que son mayores que 10 son también mayores que 5.

    d) Si todos los números reales son mayores que 10 entonces $0 = 1$.

    e) Todos los elementos de D son diferentes 0.

    f) Todos los elementos de D son mayores que 10 y menores que 25.

    g) Todos los elementos de D son mayores que 10 o bien todos los elementos de D son menores que 25.

h) La diferencia entre cualquier par de elementos distintos de D es a lo menos 1.

i) Existe un número natural mayor que 1000.

j) Existe un número natural que es igual a su cuadrado.

k) Existe un número real que es mayor que 0 y existe otro número real que es menor que 0.

l) No existe ningún número real que es mayor que 0 y que es menor que 0.

m) Para cada natural existe un número natural que es mayor por 1.

n) No existe ningún número natural que es mayor que todos los otros números naturales.

ñ) La suma de dos números naturales es mayor o igual que cada uno de los dos números.

o) Existen dos números naturales cuya suma de cuadrados es 58.

p) Si x pertenece a D entonces $x + 2$ también.

q) Existe un elemento de D que es mayor o igual a todos los elementos de D.

r) D tiene exactamente un elemento.

s) D tiene exactamente dos elementos.

20. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Escriba en forma de lógica proposicional y encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Hay un elemento en A que es mayor que los restantes.

b) Existe un único en A elemento cuyo cuadrado es 4.

c) Para cada elemento en A existe otro en A que es menor o igual que este.

d) Existe un elemento en A cuyo cuadrado es igual a sí mismo.

21. Determine cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes sin importar quien es D:

a) $(\exists x \in D \forall y \in D : y \leq x)$

b) $(\exists l \in D \forall k \in D : l \leq k)$

c) $(\exists k \in D \forall m \in D : \sim (k < m))$

d) $(\forall y \in D \exists x \in D : y \leq x)$

22. Escriba los siguientes conjuntos en forma proposicional con cuantificadores:

a) El conjunto de todos los números reales entre -10 y 10 pero que son distintos de 0.

b) El conjunto de todos los números naturales que son pares.

c) El conjunto de todos los enteros múltiplos de seis.

d) El conjunto de números naturales que son suma de cuadrados de dos números naturales.

23. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{N}$. Decimos que $A \succeq B$ si se cumple que $(\forall b \in B)(\exists a \in A) : b \leq a$. Responda lo siguiente:

    a) Describa en palabras $A \succeq B$ y de un ejemplo.

    b) Describa en palabras $(A \succeq B) \wedge (B \succeq A)$ y de un ejemplo.

    c) Describa en palabras $\sim (A \succeq B) \vee \sim (B \succeq A)$ y de un ejemplo.

    d) Describa en palabras $\sim (A \succeq B)$ y de un ejemplo.

    e) ¿Qué puede decir de $\phi \succeq A$, $A \succeq \phi$ y $A \succeq A$?.

    f) ¿Es cierto que necesariamente se cumple que $A \succeq B$ o $B \succeq A$?. Si es falso muestre un contraejemplo.

    g) ¿Es cierto que si $A \succeq B$ y $B \succeq C$ entonces $A \succeq C$?. Si es falso muestre un contraejemplo.

    h) ¿Es cierto que si $\sim (A \succeq B)$ entonces $B \succeq A$?. Si es falso muestre un contraejemplo.

24. Determine el valor de verdad de la proposición $\exists n \in \mathbb{N} : (n \leq 1 \Rightarrow n^2 \geq 4n)$ y escriba la negación de dicha proposición.

25. Negar las siguientes proposiciones:

    a) $\forall x \in \mathbb{R} \ : x^2 > 0$

    b) $\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi$

    c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \ : x < y$

    d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \ : (x + y = 1 \Rightarrow x = -y)$.

    e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \ : [(x + y) \ es\ par \Rightarrow (x \ es\ par \ \wedge y \ es\ par)]$

    f) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} \ : (x < y \wedge x^2 \geq y)$

    g) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R} \ : (x < y \Rightarrow x + z = y)$

26. Niegue las siguientes proposiciones:

    a) $\forall m \in \mathbb{Z} : (2m + 1 > 2 \wedge m - 4 \leq 1)$

    b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : (3x + y)$ es par

    c) $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{Z} : (2x + y = 5 \Rightarrow x \cdot y < 2)$

    d) $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall m \in \mathbb{N} : [(n \cdot m > 2) \Leftrightarrow (2n + m \geq 1)]$

27. Considere las funciones proposicionales

$$p(x, y) : x - y > 1 \quad y \quad q(x, y) : 2x + 3y < 2$$

así como los conjuntos $A = \{2,\ 1,\ -1,\ -3\}$ y $B = \{-4,\ 1,\ -1/2\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\exists x \in A, \ \ \forall y \in B : p(x,y) \Rightarrow q(x,y)$

b) $\forall x \in B, \ \ \forall y \in A : \overline{p(x,y)} \vee q(x,y)$

c) $\exists x \in A, \ \ \exists y \in B : p(x,y) \Leftrightarrow \overline{q(x,y)}$

d) $\forall x \in A, \ \ \exists y \in B : p(x,y) \wedge q(x,y)$

e) $\forall x \in B, \ \ \exists y \in B : q(x,y)$

f) $\forall x \in B, \ \ \exists y \in A : q(x,y) \Rightarrow p(x,y)$

28. Dadas las proposiciones $p(x) =$"x es par", $q(x) =$"x es múltiplo de 5" y $r(x) =$"$x \geq 8$". Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

    a) $\forall x \in \mathbb{N} : (p(x) \vee r(x))$

    b) $\forall x \in \mathbb{N} : (\bar{p}(x) \wedge q(x))$

    c) $\exists n \in \mathbb{N} : (r(n) \Rightarrow q(n))$

    d) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \exists m \in \mathbb{N} : [p(n) \Rightarrow (q(n) \vee r(m))]$

29. Determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas y demuestre su respuesta.

    a) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n \cdot m$ es par $\Leftrightarrow$ (n es par) $\wedge$ (m es par)

    b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x \neq y \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$

    c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} > x$

    d) $\forall n \in \mathbb{N} : n$ no divide a $n+1$

    e) $\forall n \in \mathbb{N} : n$ múltiplo de $7 \Rightarrow n^2 + 2n - 14$ múltiplo de 7

    f) Utilizando los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9 exactamente una vez cada uno con 8 operaciones de suma o resta es posible sumar 10.

    g) $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a$ divide a b y b divide a c y c divide a a sí y sólo si $a = b = c$.

30. Para $n \in \mathbb{N}$ se definen la proposiciones $p(n) =$" $n(n+1)$ es par" y $q(n) =$" $\frac{n(n+1)}{2}$ es un número entero".

    a) Determine el valor de verdad de $(\forall n \in \mathbb{N}) : p(n)$ y demuestre formalmente su afirmación.

    b) Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N}) : (p(n) \Leftrightarrow q(n))$.

31. Para $n \in \mathbb{N}$ se define la proposición $p(n) =$"$n^3 + 5$ es par" y $q(n) =$ " n es impar".

    a) Determine el valor de verdad de $(\forall n \in \mathbb{N}) : p(n)$ y demuestre formalmente su afirmación.

b) Determine el valor de verdad de $(\forall n \in \mathbb{N}) : q(n) \Rightarrow p(n)$ y demuestre formalmente su afirmación.

c) Determine el valor de verdad de $(\forall n \in \mathbb{N}) : p(n) \Rightarrow q(n)$ y demuestre formalmente su afirmación.

32. Demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que:

    a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

    b) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$

    c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

    d) $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$

    e) $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$. Donde $\max(x, y)$ es el máximo entre x e y y $\min(x, y)$ es el mínimo entre x e y.

33. ¿Qué puede decir de la siguiente demostración?.

    Sean n y $m \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{aligned} n &= m \Rightarrow (n + n) = (m + n) \Rightarrow 2n - 2m = m + n - 2m \Rightarrow \\ 2(n - m) &= m + n - 2m \Rightarrow 2(n - m) = (n - m) \Rightarrow 2 = 1. \end{aligned}$$

34. ¿Qué puede decir de la siguiente demostración?.

    Sean $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned} a &= b \Rightarrow a^2 = ab \Rightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \Rightarrow (a - b)(a + b) = (a - b)b \Rightarrow \\ a + b &= b \Rightarrow b + b = b \Rightarrow 2b = b \Rightarrow 2 = 1. \end{aligned}$$

35. ¿Qué puede decir de la siguiente demostración?.

$$\begin{aligned} -20 &= -20 \Rightarrow 16 - 36 = 25 - 45 \Rightarrow 4^2 - 9 \cdot 4 = 5^2 - 9 \cdot 5 \Rightarrow \\ 4^2 - 9 \cdot 4 + \frac{81}{4} &= 5^2 - 9 \cdot 5 + \frac{81}{4} \Rightarrow \\ \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \Rightarrow 4 = 5. \end{aligned}$$

36. Vamos a probar que la cantidad de números primos es infinita por contradicción. Supongamos que hay una cantidad finita de primos $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Sea $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Muestre que:

a) Para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que p_i no divide a q

b) Muestre que si $q+1$ no es primo entonces existe un primo $p > p_n$ tal que p divide a $q+1$

c) Con lo anterior construya una contradicción.

37. Pruebe las siguientes proposiciones para $n, m \in \mathbb{N}$:

    a) Si n es un número primo más grande que 2 entonces n es impar.

    b) Si n es divisible por m y $m > 1$ entonces $n+1$ no es divisible por m.

    c) n es par si y sólo si n^2 es par.

    d) $n+m$ es par si y solo si n y m son pares o bien n y m son impares.

38. Pruebe las siguientes proposiciones para $p, q \in \mathbb{R}$:

    a) Si $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ entonces $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$

    b) Si $p \notin \mathbb{Q}$ entonces $\frac{1}{p} \notin \mathbb{Q}$

    c) Si $p \in \mathbb{Q}$ y $q \in \mathbb{Q}$ entonces $p+q \in \mathbb{Q} \wedge p \cdot q \in \mathbb{Q} \wedge p - q \in \mathbb{Q}$

    d) Si $p - q \in \mathbb{Q}$ y $p + q \in \mathbb{Q}$ entonces $p \in \mathbb{Q} \wedge q \in \mathbb{Q}$

    e) Si $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ y $q \notin \mathbb{Q}$ entonces $p+q \notin \mathbb{Q} \wedge p - q \notin \mathbb{Q} \wedge p \cdot q \notin \mathbb{Q}$

39. Pruebe que $a \cdot b\ es\ par \;\Leftrightarrow\; (a\ es\ par\ \vee b\ es\ par)$.

40. Demuestre por contradicción la siguiente proposición: "Los 123 residentes de un edificio tienen edades que suman 3813 años, entonces existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100 años".

41. Demuestre por contradicción que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

42. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

    a) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < 1$

    b) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$

    c) $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq 1$

    d) $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq a$

43. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$ Muestre que:

    a) $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a \cdot b \leq \frac{1}{4})$

    b) $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2})$

    c) $2a + 4b = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{20})$

    d) $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2})$

    e) $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\frac{1}{a}\frac{1}{b}) \cdot (a + b) \geq 4$

44. Pruebe que si $2p = a + b + c$ entonces:

$$1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

45. Para cada una de las imágenes de la figura 1 genere una demostración del Teorema de Pitágoras que la utiliza.

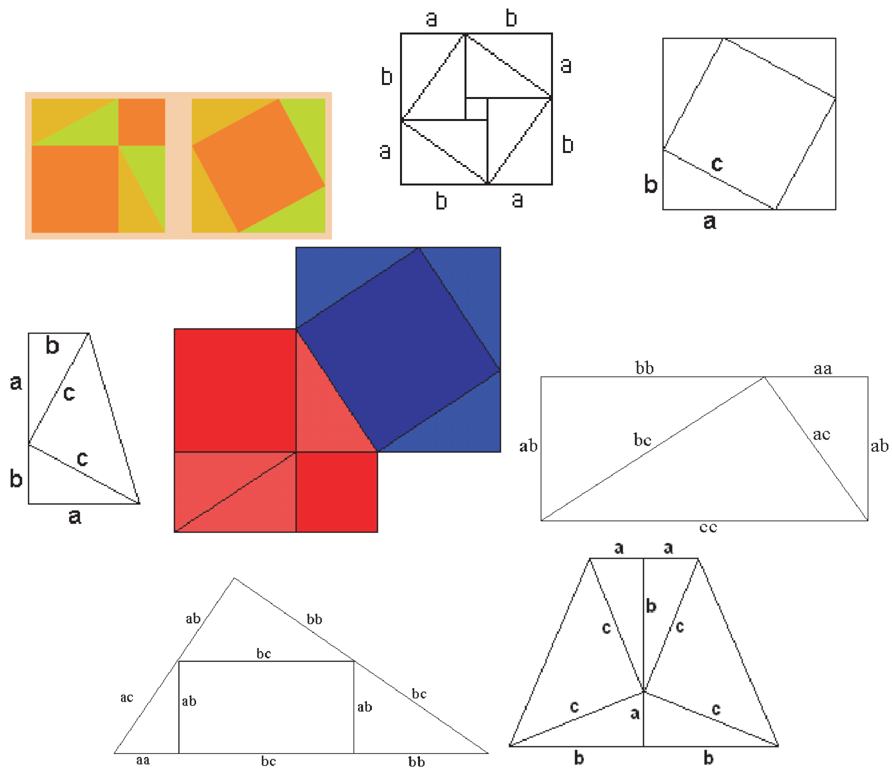

Figura 1: Pruebas gráficas del Teorema de Pitágoras

46. Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ pruebe que si se colocan n pichones en n jaulas entonces existe una jaula vacía sí y sólo sí hay una jaula que contiene más de un pichón.

47. Pruebe que si se toman 55 números naturales distintos todos menores que 100 entonces:

a) Existen dos de ellos que difieren en 9.

b) Existen dos de ellos que difieren en 10.

c) No existen necesariamente dos de ellos que difieren en 11.

d) Existen dos de ellos que difieren en 12.

e) Existen dos de ellos que difieren en 13.

HINT: Puede utilizar el problema anterior.

48. Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ si se seleccionan más de la mitad de los naturales del conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$ entonces existen dos de ellos de modo que uno divide al otro.

49. Pruebe usando la Figura 2 que $\forall x \in \mathbb{R}^{+} \backslash \{1\}$, $\left(x + \frac{1}{x}\right) > 2$.

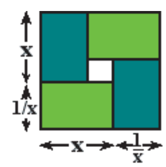

Figura 2: Prueba gráfica de $\left(x + \frac{1}{x}\right) > 2$

50. Pruebe usando la Figura 3 que $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+}$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

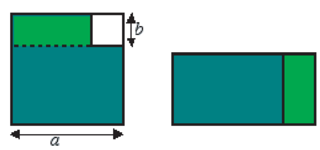

Figura 3: Prueba gráfica de $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

51. Dados dos números $n, m \in \mathbb{N}$ se dice que n y m son primos relativos si no tienen divisores comunes excepto 1. Dados $n, m, k \in \mathbb{N}$ Pruebe que:

    a) Si k es primo relativo con n y k es primo relativo con m entonces k es primo relativo con $n \cdot m$.
    b) Si k divide a $n \cdot m$ y k es primo relativo de n entonces k divide a m.
    c) Si n es primo entonces n divide a m si y sólo si n divide a m^2

0.3. Conjuntos

52. Demuestre que los siguientes conjuntos son iguales:

$A = \{n \in \mathbb{N}/n \text{ es par}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N}/\exists m, l \in \mathbb{N},\ m \text{ y } l \text{ impares}, n = m + l\}$

53. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ considere los conjuntos:

$$A = \{k \in \mathbb{Z} / \exists l \in \mathbb{Z},\ k = n \cdot l\},\ B = \{k \in \mathbb{Z} / \exists l \in \mathbb{Z},\ k = m \cdot l\}$$

Encuentre la condición sobre n y m para que:

a) $A \subseteq B$

b) $B \subseteq A$

c) $A = B$

d) $A \cap B = \{0\}$

e) $A \cap B = \phi$

f) $A \cup B = \mathbb{Z}$

54. Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| < 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x+2| + 3}{|x|} < 23\}$$

Demuestre que la proposición

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

es verdadera.

55. Dados

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| < 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{x+2}{x} - 5\right| < \varepsilon\}$$

Determine ε de modo que $A \subseteq B$.

56. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta.

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$

b) $\emptyset \in \emptyset$

c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

e) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

f) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

h) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

i) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

k) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

l) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

m) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$

n) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

ñ) $\forall x : \phi \subsetneq x$

o) $\forall x : \phi \in x$

$p)$ $\phi \in \{\{\}\}$

$q)$ $\phi \subseteq \{\{\}\}$

$r)$ $\{1\} \in \mathbb{N}$

$s)$ $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$

$t)$ $\{1, \{2\}\} \in \mathbb{N}$

$u)$ $\{1, \{2\}\} \subseteq \mathbb{N}$

57. Sean $A,\ B,\ y\ C$ conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

    $a)$ Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$.

    $b)$ Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

    $c)$ Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$.

    $d)$ Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$.

58. Si $A,\ B,\ y\ C$ son conjuntos tales que $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ y $(A \cap C^c) \subseteq (B \cap C^c)$. Demuestre que $A \subseteq B$.

59. Sean $A,\ B,\ C\ y\ D$ conjuntos.

    $a)$ Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ ¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$?

    $b)$ Si $A \subset B$ y $C \subset D$ ¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subset (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subset (B \cap D)$?

60. Responda a las siguientes preguntas:

    $a)$ Si $A \cup B = A \cup C$, ¿es necesario que $B = C$?

    $b)$ Si $A \cap B = A \cap C$, ¿es necesario que $B = C$?

    $c)$ Si $A \triangle B = A \triangle C$, ¿es necesario que $B = C$?

61. Demostrar las siguientes propiedades del complemento y la diferencia:

    $a)$ $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

    $b)$ $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

62. Sean $A,\ B,\ y\ C$ conjuntos arbitrarios. Demuestre las siguientes propiedades:

    $a)$ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$.

    $b)$ $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

    $c)$ $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

63. Sea U un conjunto universo que contiene a $A,\ B,\ y\ C$ (como subconjuntos, no como elementos!!!). Demuestre que:

    $a)$ $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = U$

    $b)$ $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

    $c)$ $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B^c \cup C)$

d) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

64. Probar que si

$$A \cap X = A \cap Y \ \wedge \ A \cup X = A \cup Y$$

entonces $X = Y$.

65. El último reporte sobre los mejores 16 restaurantes de Santiago indica que 11 sirven desayuno, 11 sirven cerveza y 10 sirven almuerzo y cena. Los 16 ofrecen alguno de los tres servicios. Un total de 5 se catalogan como "familiares" que quiere decir que sirven desayuno pero no alcohol. Un total de 5 sirven desayuno y tienen servicio de cena a la carta. Por otro lado ninguno sirve desayuno, cerveza y tiene además servicio de cena a la carta. Conteste las siguientes preguntas sobre estos restaurantes:

a) ¿Cuantos sirven desayuno y cerveza?.

b) ¿Cuantos sirven cerveza pero no desayuno?.

c) ¿Cuantos sirven cerveza pero no sirven ni desayuno ni cena a la carta?.

d) ¿Cuantos sirven cerveza y cena a la carta?.

66. En los tests clínicos de una nueva crema solar 100 sujetos experimentaron quemaduras de tercer grado o nausea. De estos, 35 sufrieron quemaduras de tercer grado y 25 experimentaron quemaduras de tercer grado y nausea. Entonces de estos 100 ¿Cuantos sufrieron nausea?.

67. En un pueblo de 30.000 habitantes se leen tres periódicos (la Primera, la Segunda y la Tercera). Se sabe que 6.500 personas leen la Primera, 5.580 la Segunda y 4.800 la Tercera. Además, los que leen la Primera y la Segunda, pero no la Tercera son 680; los que leen la Primera y la Tercera, pero no la Segunda son 1200; y los que leen la Segunda y la Tercera, pero no la Segunda son 880. Si los que no leen ningún periódico son 16.720, ¿Cuántos leen los tres periódicos?

68. Definamos los siguientes conjuntos:

A={ Estudiantes de Matemáticas I }
B={ Estudiantes de Matemáticas II }
C={ Estudiantes De Computación }
D={ Estudiantes de Física I }
E={ Estudiantes de Física II }
F={ Estudiantes que fueron a Fantasilandia }
G={ Estudiantes que se acostaron muy tarde }

Expresar las siguientes proposiciones en función de estos conjuntos:

a) Todos los alumnos de Matemáticas I cursan Física I.

b) Los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.

c) Sólo los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.

d) Ningún estudiante de Computación fue a Fantasilandia.

e) A Fantasilandia fueron sólo estudiantes de Matemáticas I y Física I.

f) Todos los estudiantes de Física I que no son ni de Matemáticas I ni de Matemáticas II fueron a Fantasilandia.

69. Se sabe que de un grupo de 20 personas, 10 estudian Música, 7 estudian Fotografía, 4 estudian Pintura y Fotografía, 3 estudian Música y Pintura, 2 estudian Fotografía y Música y 1 estudia Música, Fotografía y Pintura. ¿Cúantos estudian sólo Fotografía? ¿Cuántos estudian sólo Pintura?

70. Considere los conjuntos I,J,K definidos por:

$$\begin{aligned} I &= \{\{7,8\},\{2,3,4\},\{9,10\}\}, \\ J &= \{7,8,9,10,2,3,4\} \\ K &= \{\{7\},\{8\},\{2\},\{3\},\{4\},\{9\},\{10\}\}. \end{aligned}$$

Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si son verdaderas o falsas.

a) $I = J = K$.

b) $9 \in I$.

c) $9 \subset I$.

d) $9 \in J$.

e) $9 \subset J$.

f) $9 \in K$.

g) $9 \subset K$

h) $\{7,8\} \in I$.

i) $\{7,8\} \subset I$.

j) $\{7,8\} \in J$.

k) $\{7,8\} \subset J$.

l) $\{7,8\} \in K$.

m) $\{7,8\} \subset K$

n) $\forall x \in J,\ \forall y \in J,\ \{x,y\} \in I$.

ñ) $\exists x \in J,\ \forall y \in J,\ \{x,y\} \in I$.

o) $\exists x \in J,\ \exists y \in J,\ \{x,y\} \in I$.

p) $\forall x \in J,\ \ \{x\} \in K$.

q) $\forall x \in J,\ \exists A \subseteq I,\ x \in A$.

71. Muestre que $\{2x+5/x \in \mathbb{Z}\} = \{1+2y/y \in \mathbb{Z}\}$.

72. Sea A conjunto. Determine si A pertenece, es subconjunto, o ni pertenece ni es subconjunto de los siguientes conjuntos.

a) $\{\{A\},A\}$

b) $\{A\}\backslash\{\{A\}\}$

c) $\{\{A\}\}\backslash\{A\}$

d) $A \cup \{A\}$

e) $\mathcal{P}(\{A,\{A\}\})$

f) $\mathcal{P}(\{A\})$

73. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $[C \cap (A^c \cup B^c)] \cup [B \cap (A \cup C)]$
b) $[B^c \cap (A \cup C)] \cup (A^c \cap [(B \cap C) \cup (B^c \cap C^c)])$
c) $[(A \cup B \cup C^c) \cap (A \cup B^c \cup C^c)]^c$
d) $(B^c \cap [(C \cap D) \cup (C^c \cap D^c)]) \cup (B \cap [(C^c \cap D^c) \cup (A \cap C \cap D)])$
e) $[D \cap B \cap (A \cup C^c)] \cup (A^c \cap [(C^c \cap D^c) \cup (B \cap D)]) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c)$

74. Sean A, B y C conjuntos pruebe que:

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
c) $A \subset C \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$
d) $C \subset A \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B$
e) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$
f) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
g) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$
h) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$
i) $A \cup B = \phi \Leftrightarrow A = B = \phi$
j) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^c = \phi$
k) $A = B \Leftrightarrow A \triangle B = \emptyset$
l) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \triangle B = A \cup B$
m) $A \subset B \Rightarrow \{A \cup (B \setminus A)\} = B$
n) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

75. Sean A, B y C conjuntos determine y justifique si las siguientes son verdaderas o falsas:

a) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$
b) $(A \cup B) \backslash A = B \backslash A$
c) $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \phi$
d) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$
e) $A \cap B = \phi$ y $A \cup B = C \Rightarrow A = C \backslash B$
f) $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$
g) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \backslash C)$
h) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$
i) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$
j) $\mathcal{P}(A \backslash B) = \{\phi\} \cup (\mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B))$
k) $\bigcup_{A \in \mathcal{P}(X)} A = X$
l) $A \in B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$
m) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$.
n) $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$.
ñ) $A \triangle B = A \Rightarrow B = \emptyset$.
o) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.
p) $(A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B$
q) $A \cap (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cap C)$

76. Sean A, B y C conjuntos pruebe que $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$ si y sólo si $C \subseteq A$

77. Sean A, B subconjuntos de X y C subconjunto de Y. Determine y justifique si las siguientes son verdaderas o falsas:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
c) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$
d) $(A \times B)^c = A^c \times B^c$
e) $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
f) $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$
g) $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cap (X \times B^c)$

78. Sean $A = [-1, 1]$, $B =]0, 1]$ y $C =]2, 3]$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Grafique los siguientes conjuntos:

a) $A \times B$
b) $B \times A$
c) $A \times C$
d) $C \times B$
e) $A^c \times A$
f) $A^c \times B^c$
g) $B \times A^c$
h) $B^c \times A^c$
i) $A^c \times C$
j) $B \times C^c$
k) $C^c \times C^c$
l) $C^c \times B^c$
m) $(A \times B)^c$
n) $(A \times C)^c$
ñ) $(C \times A)^c$
o) $(A \cup B) \times C$
p) $(A \cap B) \times C$
q) $C \times (A \cup B)$
r) $(A \backslash B) \times C$
s) $(A \times B) \cup (C \times A)$
t) $(A \times C) \cap (B \times B)$

79. Dados A, B y C subconjuntos de $\mathbb{R}$ se define:

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b \in \mathbb{R}/a \in A, b \in B\}, A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{R}/a \in A, b \in B\} \\ -A &= \{-a \in \mathbb{R}/a \in A\} \end{aligned}$$

Si $A = [0, 1]$ y $B =]-1, 2]$ grafique los siguientes conjuntos:

a) $A + B$
b) $A - B$
c) $A + A$
d) $-A$
e) $-B$
f) $A + (-A)$
g) $A + (-B)$
h) $(A + A) + A$
i) $A \cdot B$
j) $A \cdot A$

Pruebe que:

a) $A + B = B + A$
b) $A \cdot B = B \cdot A$
c) $(A + B) + C = A + (B + C)$
d) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
e) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
f) $-(A + B) = (-A) + (-B)$
g) $-(-A) = A$
h) $A + \{0\} = \{0\} + A = A$
i) $x \in A \Rightarrow A + \{x\} \subseteq A + A$
j) $x \in A \Rightarrow A \cdot \{x\} \subseteq A \cdot A$
k) $A \cdot \{1\} = \{1\} \cdot A = A$
l) $A \cdot \{0\} = \{0\} \cdot A = \{0\}$
m) $0 \in A \Rightarrow A \subseteq A + A$
n) $1 \in A \Rightarrow A \subseteq A \cdot A$
ñ) $-(A \cdot B) = (-A) \cdot B = A \cdot (-B)$

Pruebe la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) $A + (-A) = \{0\}$
b) $A \subseteq A + A$
c) $A \subseteq A \cdot A$
d) $A + A \subseteq A$
e) $A \cdot A \subseteq A$

80. Con la notación del problema anterior.

   a) $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice simétrico si $A \subseteq (-A)$.
   b) $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice cerrado para suma si $A + A \subseteq A$
   c) $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice cerrado para el producto si $A \cdot A \subseteq A$

   Muestre que:

   a) Si A simétrico entonces $-A$ es simétrico.
   b) Si $0 \in A$ y A es cerrado para la suma entonces $A + A = A$. ¿La recíproca es cierta?.

   c) Si $1 \in A$ y A es cerrado para el producto entonces $A \cdot A = A$. ¿La recíproca es cierta?.

81. Explicite todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Describa dentro de los elementos de este conjunto cuales son subconjuntos de cuales. ¿Cuál es el número máximo de subcojuntos en que cualquier subconjunto puede estar incluido en este caso?.

82. Explicite todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\})$. Describa dentro de los elementos de este conjunto cuales son subconjuntos de cuales.

83. (MEDIO) Sea U un conjunto y $M \subseteq \mathcal{P}(U)$ se dice que es un álgebra sobre U si:

   a) $U \in M$
   b) Si $A, B \in M$ entonces $A \cup B \in M$
   c) Si $A \in M$ entonces $A^c \in M$

   Pruebe que:

   a) $\phi \in M$
   b) Si $A, B \in M$ entonces $A \cap B \in M$
   c) Si $A, B \in M$ entonces $A \Delta B \in M$
   d) Si M y N son álgebras sobre U entonces $M \cap N$ es un álgebra sobre U

84. Usando la definición del ejercicio anterior encuentre la menor álgebra (en el sentido de la inclusión) sobre $\mathbb{N}$ que contiene al conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

85. (DIFICIL) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos sobre un mismo universo U. Se definen los conjuntos A^* y A_* como:

$$\begin{aligned} A_* &= \{x \in U / x \text{ pertenece a una infinidad de } A_n\} \\ A^* &= \{x \in U / x \text{ no pertenece a una cantidad finita de } A_n\} \end{aligned}$$

Exprese de manera conjuntista (es decir con unión, intersección, complemento, etc..) ambos conjuntos.

86. (DIFICIL) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos sobre un mismo universo U. Recordando que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in U / \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}, \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in U / \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

Se define:

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\geq n} A_N, \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\geq n} A_N$$

Responda lo siguiente:

a) Exprese $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con cuantificadores.

b) $\left(\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$

c) $\left(\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$

d) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

e) Si $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $n \geq m$ implica que $A_n \subseteq A_m$ (familia decreciente). Muestre que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

f) Si $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $n \geq m$ implica que $A_m \subseteq A_n$ (familia creciente). Muestre que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

87. (DIFICIL) Para los siguientes casos particulares determine explícitamente $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

a) Sean A y B dos conjuntos. Si n es par entonces $A_n = A$ y si n es impar y $A_n = B$.

b) Dado $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{1, \ldots, n\}$

c) Dado $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{i \in \mathbb{N}/i \geq n\}$

d) Dado $n \in \mathbb{N}$, si n es par $A_n = \{i \in \mathbb{N}/i \text{ es par} \wedge i \leq n\}$ y si n es impar $A_n = \{i \in \mathbb{N}/i \text{ es impar} \wedge i \leq n\}$.

e) Dado $n \in \mathbb{N}$, si n es par $A_n = \{i \in \mathbb{N}/i \text{ es par} \wedge i \geq n\}$ y si n es impar $A_n = \{i \in \mathbb{N}/i \text{ es impar} \wedge i \geq n\}$.

0.4. Sucesiones, Inducción y Sumatorias

88. Construya, en cada caso, la secuencia especificada explícitamente:

    a) La secuencia de números pares de menor a mayor comenzando por 0.

    b) La secuencia de números impares de mayor a menor comenzando por 21.

    c) La secuencia de potencias de 2 en orden ascendente comenzando en 2.

    d) La secuencia de potencias de 6 en orden ascendente comenzando en 12.

    e) La secuencia ascendente de números que son producto de potencias de 2 y 3 comenzando por 12.

    f) La secuencia de inversos multiplicativos de los números impares positivos en orden descendente.

89. Por inspección encuentre la fórmula para el término n-ésimo de las secuencias:

    a) $1 \cdot 3 \cdot 2^2,\ 2 \cdot 4 \cdot 3^2,\ 3 \cdot 5 \cdot 4^2, \ldots$

    b) $1 \cdot 5 \cdot 9,\ 2 \cdot 6 \cdot 10,\ 3 \cdot 7 \cdot 11, \ldots$

    c) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5},\ \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7},\ \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9}, \ldots$

    d) $\frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3},\ \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4},\ \frac{6}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \ldots$

    e) $\frac{1}{2 \cdot 3}4,\ \frac{2^2}{3 \cdot 4}4^2,\ \frac{3^2}{4 \cdot 5}4^3, \ldots$

    f) $\frac{5}{1 \cdot 2}\frac{1}{3},\ \frac{7}{2 \cdot 3}(\frac{1}{3})^2,\ \frac{9}{3 \cdot 4}(\frac{1}{3})^3, \ldots$

    g) $\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5},\ \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \ldots$

90. Por inspección, exprese las siguientes sumas de la forma $\sum\limits_{n=i}^{j} a_n$. Especificando i,j y a_n en cada caso:

    a) $4 + 6 + 12 + 22 + 36$

    b) $3 + 9 + 27 + \ldots + 19683$

    c) $3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2$

    d) $2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 5 + \ldots + 10^2 \cdot 11$

91. Encuentre una progresión aritmética en que el tercer término es igual a cuatro veces el primer término y el sexto término es 17.

92. Si la suma de 7 términos de una progresión aritmética es 49 y la suma de 17 términos es 289 encuentre la suma de N términos.

93. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el segundo es 24. Escriba la serie.

94. La suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica es igual a 9 veces la suma de los tres primeros términos. Encuentre la razón de la progresión (el valor de r).

95. Encuentre el valor de tres números en progresión geométrica que suman 38 y que su producto es 1728.

96. Encuentre el valor de tres números en progresión geométrica cuyo producto es 216 y la suma de los productos de a dos es 156.

97. Utilizando serie geométrica encuentre valores de $p, q \in \mathbb{N}$ tales que:

    a) $\frac{p}{q} = 5,0\overline{399}$
    b) $\frac{p}{q} = 0,4\overline{23}$
    c) $\frac{p}{q} = 8,\overline{8}$
    d) $\frac{p}{q} = 2,45678\overline{123}$
    e) $\frac{p}{q} = 1001,\overline{1001}$
    f) $\frac{p}{q} = 0,0055\overline{9}$

98. La suma de N términos de una progresión geométrica de razón 3 es 728 y el último término es 486. Encuentre el primer término.

99. (DIFICIL) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión aritmética de paso d. Muestre que:

    a) $\forall n < m < r \in \mathbb{N}$, $(m-r)a_n + (r-n)a_m + (n-m)a_r = 0$.
    b) Si a_n, a_m, a_r y a_s con $n < m < r < s \in \mathbb{N}$ están en progresión geométrica entonces $n-m$, $m-r$, $r-s$ también están en progresión geométrica.
    c) $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{2N+1} a_{n+k} = a_{k+N+1} \cdot (2N+1)$$

100. (DIFICIL) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión geométrica. Muestre que:

   a) $\forall n < m < r \in \mathbb{N}$, $a_n^{m-r} b^{r-n} c^{n-m} = 1$.

   b) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(a_{n+1} - a_{n+2})^2 + (a_{n+2} - a_n)^2 + (a_{n+3} - a_{n+1})^2 = (a_n - a_{n+3})^2.$$

101. (MEDIO) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia tal que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n = a + bN + cN^2$ con $a, b, c \in\ \mathbb{R}$.

   Encuentre una fórmula para el termino a_n y deduzca que tipo de secuencia es (aritmética, geométrica, armónica).

102. (MEDIO) Encuentre una progresión aritmética de modo que $\forall N \in \mathbb{N}$, la suma de N términos sea $2N + 3N^2$.

103. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión aritmética tal que para dos valores fijos $N, M \in \mathbb{N}$,$a_N = M$ y $a_M = N$. Encuentre el valor de a_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

104. (MEDIO) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión geométrica y $a, c \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 = 1$ y $\forall N \in \mathbb{N}$, $a_{2N} = a \cdot a_{2N+1}$ y $a_{2N-1} = c \cdot a_{2N}$.

   $\forall N \in \mathbb{N}$, encuentre el valor de $\sum\limits_{n=1}^{2N} a_n$.

105. Se dice que tres números a_1, a_2 y a_3 están en progresión armónica cuando:

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3}.$$

   a) Si a^2, b^2 y c^2 están en progresión aritmética entonces $b + c$, $a + c$, $a + b$ están en progresión armónica.

   b) Si a, b, c están en progresión armónica muestre que $\frac{a}{a-b} = \frac{a+c}{a-c}$..

106. (MEDIO) Decimos que una secuencia a_1,a_2,...,a_n,... es armónica si cada grupo de tres términos consecutivos están en progresión armónica.

   Muestre que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es progresión armónica entonces:

   a) $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$,...,$\frac{1}{a_n}$,... es aritmética. ¿La recíproca es cierta?

b) Si $a_m = n$ y $a_n = m$ con $n, m \in \mathbb{N}$ entonces $a_{m+n} = \frac{nm}{n+m}$.

c) $(m-r)a_m a_r + (r-n)a_n a_r + (n-m)a_n a_m = 0$

107. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ si se divide el plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$) en regiones utilizando n rectas. Se pueden colorear las regiones utilizando solo dos colores de modo que las regiones que comparten un borde no tienen el mismo color.

108. Pruebe que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ todo tablero cuadrado de $2n$ al que se le extrae un casillero (en cualquier parte) puede ser cubierto por tableros de 2 por 2 al que se les extrae un casillero.

109. Se quieren colocar n pesos en estampillas en un sobre utilizando solo sellos de 5 y 12 pesos. Pruebe que esto es siempre posible si $n \geq 44$.

110. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n-1} + 1$ es múltiplo de 4.

b) $3^{2n} + 7$ es múltiplo de 8.

c) 8^{n-1} es múltiplo de 7.

d) $5^{2n-1} + 1$ es múltiplo de 6.

e) $9^n - 1$ es múltiplo de 8.

f) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ es múltiplo de 133.

g) $2^{2n} - 3n - 1$ es múltiplo de 9.

h) $2^{4n} - 1$ es múltiplo de 15.

i) $n(n+1)(n+5)$ es múltiplo de 6.

j) $n(n+1)$ es múltiplo de 2.

k) $n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 3.

l) $n^5 - n$ es múltiplo de 30.

m) $n(n^2-1)(3n+2)$ es múltiplo de 24.

n) $4^n + 15n - 1$ es múltiplo de 9.

ñ) $n^3 - n$ es múltiplo de 3.

o) $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3.

p) $6^{n+1} + 4$ es múltiplo de 5.

q) $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es múltiplo de 13.

r) $n^2 - n + 2$ es múltiplo de 2.

s) $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13

111. En cada uno de los siguientes casos escriba las sumas como sumatorias y demuestre, usando inducción, que el enunciado es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

b) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

d) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

f) $2^n > n$.

g) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

h) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1}$.

i) $3 + 4 + 5 + \ldots + (n + 2) = \frac{n(n+5)}{2}$.

j) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$.

k) $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{4^n-1}{3}$.

l) $1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$, donde r es una constante distinta de 1.

m) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$.

n) $3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = n(n + 2)$.

ñ) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

o) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

p) $4 + 3 + 2 + \ldots + (5 - n) = \frac{n(9-n)}{2}$.

q) $-2 - 3 - 4 - \ldots - (n + 1) = -\frac{n(n+3)}{2}$.

r) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

s) $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \ldots + (2n - 1) \cdot 2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$.

t) $\frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n}$.

u) $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$. a y r son constantes, $r \neq 1$.

112. Pruebe que el cuadrado de un número entero nunca es de la forma $3n - 1$ con $n \in \mathbb{N}$.

113. Pruebe que todo entero y su cubo al ser divididos por 6 tienen el mismo resto.

114. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, n impar:

a) $n^5 - n$ es múltiplo de 240.

b) $n^2 - 1$ es múltiplo de 8.

115. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $(2n)!$ es divisible por $n! \cdot (n + 1)!$.

b) $(3(n + 1))!$ es divisible por $(n + 1)! \cdot (n + 2)! \cdot (n + 3)!$.

116. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

117. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ se tiene que $x^n - 1$ es divisible por $x - 1$.

118. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall h \geq -1$, $1 + nh \leq (1+h)^n$.

119. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{r+1}{r}$ es entero. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{r^n+1}{r^n}$ es entero.

120. Dado $n \in \mathbb{N}$ y x_1, x_2, ..., $x_n > 0$ pruebe que:

$$\frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

121. Sea $m \in \mathbb{N}$ $x, y \in \mathbb{N}$. Muestre que $x \equiv_m y$ si y sólo si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n \equiv_m y^n$.

122. Dado $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}$ pruebe que:

    a) $x^n - y^n$ es divisible por $(x - y)$.
    HINT: Muestre que:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

    b) Si n es impar entonces $x^n - y^n$ es divisible por $(x + y)$.
    HINT: Piense en el caso anterior.

    c) Si $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$

123. Demostrar que todo número natural $n \geq 24$ se puede expresar como la suma de cincos y sietes.

124. Para $n \in \mathbb{N}$, probar que $n - 2 < \frac{n^2-n}{12}$.

125. Sea $p(n) =$" $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}$". Demostrar que la veracidad de $p(n)$ implica la veracidad de $p(n+1)$ para todo $n \geq 1$.
¿Es verdadera $p(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.?

126. Probar que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $(n-2) \cdot 180$ grados.

127. Muestre que para $q(n) =$"$n^2 - n + 41$ es un número primo", $q(1)$ es verdadera pero $q(n) \Rightarrow q(n-1)$ es falso.

128. Muestre que para $q(n) =$"$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = (n^2 + n + 2)$" se tiene que $q(n) \Rightarrow q(n+1)$ pero que $q(1)$ es falso.

129. (DIFICIL) A la edad de un año, una pareja (macho y hembra) de comadrejas da origen a dos nuevas parejas de comadrejas y en cada año posterior produce 6 nuevas parejas de comadrejas. Suponga que las comadrejas no mueren y que se comienza con un par de comadrejas recién nacidas, es decir $a_0 = 1$.

   a) Determine una relación de recurrencia para a_n, la cantidad de comadrejas al final del año n.

   b) Demuestre por inducción que:

$$a_n = \frac{1}{5}\left[4^{n+1} - (-1)^{n+1}\right]$$

130. (DIFICIL) Sea $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{6a_n^2}{a_n^2+8}$, para $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $a_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

131. Supongamos que Ud. recibe una carta de una "cadena", con la lista de los nombres y direcciones de 6 personas. La carta le pide que envie \$1000 a la persona que encabeza la lista. Además, Ud. debe hacer una nueva carta casi idéntica a la recibida, los únicos cambios son suprimir en la lista de nombres el primero de ellos y agregar al final de la lista el nombre suyo al final. Esta carta reformada tiene que enviarla a cinco amigos suyos, distintos de los que aparecen en la carta reformada. La carta original promete a Ud. que recibirá dentro de pocas semanas la cantidad de \$15.625.000.
Aunque estas "cadenas" nunca funcionan Ud. podría encontrar entretenido verificar si la promesa de la carta original es correcta, bajo el supuesto que Ud. y todos los receptores de las cartas siguieran las instrucciones, es decir, no "rompieran la cadena".
Podemos llamar c_k a la cantidad de cartas en el eslabón k, siendo la carta que Ud. recibió el eslabón 0, es decir $c_0 = 1$. Las cartas que Ud. envía corresponden al primer eslabón, así $c_1 = 5$, la cantidad de cartas enviadas por sus amigos es c_2, etc.

   a) ¿Cuál es la relación entre c_k y c_{k+1}?

   b) Verifique por inducción que $c_k = 5^k$.

   c) ¿De que eslabón son los receptores de cartas que deberían enviar a Ud. \$1000 cada uno?

132. En una hoja de papel se tiene n rectas distintas dibujadas de borde a borde, de modo que todo par de rectas tiene un punto en común (que no está en el borde de la hoja) y no hay tres (o más) que concurran en un mismo punto.

   a) Si a_k es la cantidad de regiones en que queda dividida la hoja al tener k rectas. ¿qué relación hay entre a_k y a_{k+1}?

   b) Determine a_n en términos de n, sin referencia a a_{n-1}.

133. Una "Torre de Hanoi" es un juego consistente de n anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero A, B, C, alineadas de izquierda a derecha, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en la estaca A, apilados de mayor a menor, el más grande en la base, es decir, formando una pila cónica. El juego consiste en trasladar los anillos a la estaca C, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que cada vez se puede mover un solo anillo para ubicarlo en otra estaca y si en esta hay otros anillos ellos deben ser de menor diámetro, es decir, en cada etapa del juego en cada estaca debe haber una pila cónica.

   a) Determine una recurrencia para a_n, el número mínimo de movimientos para lograr el objetivo.

   b) Conjeture una fórmula para a_n y demuéstrela por inducción.

   La observación clave es que para mover el anillo más grande desde A hasta C, debemos primero mover los $(n-1)$ anillos restantes desde A a B y luego desde B a C.

134. (DIFICIL) S_n es un conjunto formado por n números distintos. Se trata de obtener una relación de recurrencia para a_n, la cantidad de comparaciones entre pares de números que están en S_n, para determinar el mayor de todos ellos. Es claro que $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. En el caso general se propone el siguiente algoritmo (procedimiento). Si n es par, podemos calcular M_1, el mayor de los números en la primera mitad de S_n; después calculamos M_2, el mayor de los números en la segunda mitad de S_n; finalmente, hacemos las comparaciones entre M_1 y M_2, para así obtener el mayor elemento de S_n. Si n es impar, separamos S_n en un número aislado cualquiera y 2 mitades iguales del resto. En estas 2 mitades elegimos M_1 y M_2 como en el caso anterior y comparamos el mayor de ambos con el número aislado separado antes, para así obtener en mayor número de S_n.

   a) Encuentre a_n para n par y para n impar.

   b) Considere un algoritmo que recorra S_n de manera ordenada y que compare cada elemento nuevo con el mayor de los anteriores. Encuentre el número de comparaciones b_n que se realizaría con este algoritmo y compárelo con a_n

   c) Adapte ambos algoritmos al caso de tener que obtener el mayor y el menor número de S_n y compare su eficiencia, en cuanto al número de comparaciones que realiza cada uno.

135. Una persona debe subir una escala de n peldaños, cada paso de ella puede abarcar un peldaño o dos peldaños. Se trata de establecer una relación de recurrencia para a_n la cantidad de maneras distintas de ascender la escala de n peldaños. Es fácil ver que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$. Note que para

calcular a_4 podemos razonar así: si el primer paso abarca un peldaño, el resto del recorrido (3 peldaños) se puede hacer de a_3 maneras; si el primer paso abarca 2 peldaños, el resto del ascenso (2 peldaños) se puede hacer de a_2 maneras, luego $a_4 = a_3 + a_2$.

a) Exprese a_n en términos de a_{n-1} y a_{n-2} para $n \geq 3$.

b) Demuestre por inducción que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

136. Probar las siguientes identidades:

a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

b) $n\binom{n-1}{k} = (n-k)\binom{n}{k}$

c) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$

d) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

137. Determinar el valor de n si $\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n+1}{3}} = \frac{5}{6}$

138. Calcular el término central de $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}x^{-2})^6$

139. En el desarrollo de $(x^2 + \frac{1}{x})^{18}$ encuentre:

a) El término constante.

b) El término central.

c) El valor del coeficiente de x^6.

140. Utilice el teorema del binomio para demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$$

141. Sean p y q dos reales no negativos tal que $p + q = 1$. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$

142. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ el producto de n naturales consecutivos es divisible por $n!$.

143. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

b) $2^{n+1} > 1 + (n+1)\sqrt{2^n}$

c) $(n!)^3 < n^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$

d) $(n!)^2 \geq n^n$

e) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \leq (n+1)^n$

f) $1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot (2n-1)! > (n!)^n$

144. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ y con eso calcule $\sum\limits_{n=1}^{N} n$.

145. Encuentre el valor de las siguientes sumas:

a) $\sum\limits_{n=5}^{9} (-1)^n \cdot (n^2 - 9)$

b) $\sum\limits_{n=-5}^{5} \frac{4}{n(n+2)}$

146. Encuentre el valor de las siguientes sumas:

a) $\sum\limits_{n=0}^{N} \left[4n(n^2+1) - (6n^2+1)\right].$

b) $\sum\limits_{n=1}^{N} n(n+2)(n+3)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{N} (3n-1)(3n+2)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{N} n(n+2)(n+1)^2$

e) $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{n^2(n^2-1)}{4n^2-1}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(n+2)}{n(n+1)(n+3)}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(2n+3)}{n(n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

i) $\sum\limits_{n=1}^{N} n(n^2-1)$

j) $\sum\limits_{n=1}^{N} (n-1)(N-n)$

k) $\sum\limits_{n=1}^{N} (n-1)(n+1)(n+2)$

l) $\sum\limits_{n=1}^{N} (n+1)^2 \cdot n!$

m) $\sum\limits_{n=1}^{N} (n-1)(n^2+1) \cdot n!$

n) $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!}$

ñ) $\sum\limits_{n=1}^{N} ((n+3)(n+3)! + 3 \cdot 2^n - n(n+1))$

147. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una progresión aritmética de paso d. Encuentre una fórmula para $S_N^3 = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^3$ y muestre que $\forall N \in \mathbb{N}$ es divisible por $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$.

148. Encuentre el valor de n que cumple la ecuación en cada caso:

a) $\binom{n}{2} = 55$

b) $\binom{n}{n-2} = 10$

c) $\binom{n}{3} = \binom{n}{5}$

d) $\binom{16}{n} = \binom{16}{n-4}$

e) $3\binom{n+2}{3} = 5\binom{n+1}{2}$

149. Pruebe las siguientes propiedades. Dado $n \in \mathbb{N}$:

a) $\frac{(2n)!}{n!} = 2^n(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1))$

b) Si $1 < k \leq n-1$, $\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$

c) $1 + \binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{n+2}$

150. Usando el teorema del binomio responda lo siguiente:

a) El total de términos con potencia 6 en x de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$

b) El total de términos con potencia 4 en x de $(x+2y)^{10}$

c) El total de términos constantes (sin potencia de x) de $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$

d) El total de términos con potencia 16 en x de $(x^2 - 2x)^{10}$

e) El total de términos constantes (sin potencia de x) de $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$

f) El total de términos constantes (sin potencia de x) de $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^n$

151. (MEDIO) Muestre que si la potencia x^p aparece en el desarrollo de $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{2n}$ entonces el coeficiente que lo acompaña es $\frac{(2n)!}{\left(\frac{1}{3}(4n-p)\right)! \cdot \left(\frac{1}{3}(2n+p)\right)!}$.

152. Sin desarrollar completamente, utilizando el teorema del binomio, encuentre una expresión simple:

a) $(x+\sqrt{2})^4 + (x-\sqrt{2})^4$

b) $(x+\sqrt{x^2-1})^7 + (x-\sqrt{x^2-1})^7$

c) $(\sqrt{2}+1)^6 - (\sqrt{2}-1)^6$

153. Hallar la suma de los coeficiente del desarrollo de $(1+x)^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

154. Pruebe que la suma de los coeficientes de las potencias pares de x del desarrollo de $(1+x)^n$ es igual a la suma de los coeficientes de las potencias impares de x

155. Dado $n \in \mathbb{N}$ utilizando el teorema del binomio pruebe que:

a) $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

b) $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

156. En el desarrollo de $\left(a\sqrt{a} + \frac{1}{a^4}\right)^n$ el coeficiente del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo en 44 unidades. Hallar el término sin potencias de a en este desarrollo.

157. Determinar el valor de a para que los coeficientes de x^7 y x^6 en el desarrollo de $(x+a)^5 \cdot (x-2a)^3$ sean iguales.

158. (DIFICIL) Sean $N, M \in \mathbb{N}$. Calcule:

a) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} (n+m)^2$

b) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} (n+m)^2$

c) $\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=1}^{n} m$

d) $\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=1}^{M} m$

e) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} n \cdot m$

f) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} n \cdot m$

g) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} [(n+m) \cdot (n-m)]$

h) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} [(n+m) \cdot (n-m)]$

i) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=-n}^{n} |n+m|$

j) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=-n}^{n} (n \cdot m)$

k) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} (1+3^n)$

l) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} 3^{n-m}$

m) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} 3^{n-m}$

n) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{20} 2^{m-n}$

ñ) $\sum_{n=1}^{25} \sum_{m=1}^{100} m^2 \cdot n$

o) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} a^{m+n}$

159. Sea $S = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{n} m \right)$. Muestre que:

a) $S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} n^2 + \frac{N(N+1)}{4}$

b) $S = \frac{N(N+1)^2}{2} - \sum_{n=1}^{N} n^2$

c) Concluya que $S = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

160. Dados $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$. Se define $\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n$, $\overline{a^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n^2$, $\sigma^2(a) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (a_n - \bar{a})^2$. Pruebe que:

a) $\sigma^2(a) = \overline{a^2} - (\bar{a})^2$

b) $\overline{a^2} \geq (\bar{a})^2$

c) $\min_{n=1}^{N} a_n \leq \bar{a} \leq \max_{n=1}^{N} a_n$

d) $\bar{a} = \max_{n=1}^{N} a_n \Rightarrow a_1 = \ldots = a_N$

e) $\bar{a} = \min_{n=1}^{N} a_n \Rightarrow a_1 = \ldots = a_N$

f) $a_1 = \ldots = a_N \Leftrightarrow \overline{a^2} = (\bar{a})^2$.