Auxiliar N°1 Matemáticas II

Cristobal Quiñinao

2 de enero de 2008

Los conceptos de lógica proposicional no son más que una formalización de un lenguaje creado para dar solidez a los argumentos matemáticos, los cuales serán trascendentes en la construcción de una teoría cosistente e inequívoca.

Asumiendo este punto de partida, y recordando que cualquier cosa creada por el hombre lleva inherente un grado de incertidumbre (que más tarde veremos en forma de contradicciones) podemos decir que una proposición lógica, que denotaremos por letras minúsculas tales como $p, q, r, s, \ldots$, será una frase que puede tomar los valores verdadero o falso. Un ejemplo de ello será decir que la frase *"Los profesores auxiliares de Matemáticas II están desquiciados"* será representada por la proposición p y queda a criterio del lector darle un grado de certeza a p.

También costruimos operaciones binarias[1] $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ las cuales quedarán determinadas por sus tablas de verdad, esto es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Finalmente si introducimos el concepto de negación (será usual escribirlo como $\neg p$ o simplemente con una barra sobre la proposición negada), estaremos en condiciones de crear proposiciones lógicas mucho más complejas.

[1] Al utilizar la palabra binaria nos referimos a operaciones que sólo incluyan dos proposiciones simples

Problema 0.- Construya la tabla de verdad de la proposición $\overline{p}\ \vee q$ y compárela con la del $\Rightarrow$

Solución.- La tabla de verdad es simplemente:

p	q	$\overline{p}\ \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

la cual es exactamente la tabla de verdad del implica hacia la derecha. Se deduce que ambas expresiones son equivalentes.

Problema 1.- Si $p \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow F$ deduzca el valor de verdad de

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \wedge q)] \wedge (r \Rightarrow q)$$

Solución.- Reemplazando adecuadamente en la expresión anterior se tiene

$$[\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{V \Rightarrow F} \Rightarrow \underbrace{(\overline{p} \wedge q)}_{\overline{V} \wedge F}] \wedge \underbrace{(r \Rightarrow q)}_{F \Rightarrow F}$$

recurriendo a las tablas de verdad básicas esto se reduce a

$$[\underbrace{(V \Rightarrow F)}_{F} \Rightarrow \underbrace{(F \wedge F)}_{F}] \wedge \underbrace{(F \Rightarrow F)}_{V}$$

esto es

$$[\underbrace{F \Rightarrow F}_{V}] \wedge V$$

y como $V \wedge V$ es verdadero se concluye que la expresión completa es cierta.

Problema 2.- Asuma que $p \Leftrightarrow V$, $q \Leftrightarrow F$, r y s son proposiciones indeterminadas. Deduzca el valor de verdad de

$$(q \vee r) \Rightarrow \overline{(\overline{p} \vee \overline{r})}$$

y de

$$\overline{[p \vee ((\overline{p} \wedge q) \wedge q)]} \Rightarrow [(\overline{q} \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow s)]$$

Solución.- Aunque este problema se ve un poco más complejo, basta que notemos el siguiente detalle:

$$(F \vee r) \Leftrightarrow r$$

esto pues si hacemos la tabla de verdad:

F	r	$F \vee r$
F	V	V
F	F	F
F	V	V
F	F	F

notamos que las últimas dos columnas son exactamente iguales. Usando esto en la proposición inicial

$$\underbrace{(q \vee r)}_{F \vee r} \Rightarrow \overline{(\overline{p} \vee \overline{r})}$$

análogamente $(F \vee \overline{r}) \Leftrightarrow \overline{r}$, y así:

$$\underbrace{(q \vee r)}_{F \vee r} \Rightarrow \overline{\underbrace{(\overline{p} \vee \overline{r})}_{F \vee \overline{r}}}$$

aplicando lo anterior:

$$\underbrace{F \vee r}_{r} \Rightarrow \overline{\underbrace{F \vee \overline{r}}_{r}}$$

lo cual es trivialmente cierto.

Por su parte la otra proposición:

$$\overline{[p \vee ((\overline{p} \wedge q) \wedge q)]} \Rightarrow [(\overline{q} \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow s)]$$

si trabajamos sólo con el lado izquierdo del implica:

$$\overline{[p \vee (\underbrace{\underbrace{(\overline{p} \wedge q)}_{F \wedge F}}_{F} \wedge q)]}$$

luego

$$\overline{[p \vee \underbrace{(F \wedge q)}_{F}]}$$

y como $p \Leftrightarrow V$, se concluye que:

$$\overline{\underbrace{[p \vee F]}_{V}}$$

finalmente tanto $F \Rightarrow F$, como $F \Rightarrow V$ son ciertas, y con ello concluimos que independiente del valor que tome el lado derecho del implica la proposición seguira siendo V.