Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2008
Matemáticas II

Solución Control 1

1. Sean A y B conjuntos. Pruebe que $A\Delta B = A^c \Delta B^c$. Recuerde que $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

   Solución.- Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\cup B)\backslash(A\cap B) \\ &= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c \\ &= (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c) \\ &= (A^c\cap B^c)^c\cap(A^c\cup B^c) \\ &= (A^c\cup B^c)\cap(A^c\cap B^c)^c \\ &= A^c\Delta B^c \end{aligned}$$

2. Demuestre que para todo entero $n \geq 1$ se tiene que $n^2+13n+6$ es un número par. Recuerde que puede usar inducción.

   Solución.-

   - 1^a **Forma.-** Notamos que:

$$\begin{aligned} n^2+13n+6 &= n^2+n+12n+6 \\ &= n(n+1)+2(6n+3) \end{aligned}$$

     lo cual $\forall n \geq 1$ es par.

   - 2^a **Forma.-** Por inducción:

   (CB) Si $n = 1$ entonces $n^2+13n+6 = 1+13+6 = 20$ el cual efectivamente es par.

   (HI) Suponemos que para n se tiene que $n^2+13n+6$ es par.

   (I) Si reemplazamos en la hipótesis de inducción n por $n+1$

$$\begin{aligned} (n+1)^2+13(n+1)+6 &= n^2+2n+1+13n+13+6 \\ &= (n^2+13n+6)+(2n+14) \end{aligned}$$

   de la hipótesis de inducción deducimos que el primer término es par, y el otro claramente lo es luego concluímos que si la expresión $n^2+13n+6$ entonces $(n+1)^2+13(n+1)+6$ también lo es.

3. En el reino de Beaucheff un hombre se encuentra con 3 personas A, B y C. Se sabe que uno de ellos es un caballero otro un espía y el tercero un ladrón. Además el ladrón siempre miente el caballero nunca miente y el espía a veces miente y a veces dice la verdad.

   Al interrogarlos estos contestan lo siguiente. A dice *"C es un ladrón"*, B dice *"A es un caballero"* y C dice *"Yo soy un espía"*.

   Muestre con argumentos lógicos válidos que existe una sola posibilidad para quien es el caballero, el ladrón y el espía y determínela.

   Solución.- Para cualquier combinación posible uno de los tipos será caballero, ahora:

   - **Si A es Caballero.-** Entonces dice la verdad, de esta forma C es el ladrón, y como éste miente necesariamente B es el espía.
   - **Si B es el Caballero.-** Entonces dice la verdad, así A sería el caballero lo cual es imposible. Se concluye que ninguna combinación que haga a B el caballero puede ser cierta.
   - **Si C es el Caballero.-** Entonces C debe estar diciendo la verdad, con esto se deduce que C es el espía lo cual nuevamente es un sin sentido. Lo anterior implica que tampoco existen combinaciones ciertas si asumimos que C es el caballero.

   Finalmente se concluye que necesariamente A es el caballero y esto implica que C es el ladrón y B es el espía.

   La forma lógica proposicional de resolverlo era definir p, q, r por las proposiciones:

   - $p :=$ " A es el caballero "
   - $q :=$ " B es el caballero "
   - $r :=$ " C es el caballero "

   es claro que las proposiciones son excluyentes, es decir, si una es verdad las otras necesariamente son falsas; y que además una de ellas siempre debe ser verdadera. Ahora:

   - Si $q \equiv V$ entonces $p \equiv V$ lo cual es una contradicción.
   - Si $r \equiv V$ entonces $\sim r \equiv V$ lo cual también es contradictorio.

   Necesariamente $p \equiv V$ y de esto concluímos que C debe ser el ladrón y por ende B el espía.