Matemáticas I

Equipo Mat I-EdV

Departamento de Ingeniería Matemática y, Centro de Modelamiento Matemático (CNRS UMI 2807) FCFM, U. de Chile

Índice general

Índice de figuras v

Capítulo 1. Vectores y Geometría Analítica (Axel Osses) 1
1.1. Introducción 1
1.2. Vectores 2
1.3. Geometría Analítica (...continuará) 11

Bibliografía 13

Índice de figuras

1.1. Sistema de coordenadas y vector posición. 2
1.2. Vector desplazamiento. 2
1.3. Paralelogramo. 3
1.4. Suma geométrica de vectores. 4
1.5. Resultante de fuerzas que arrastran un peso. 5
1.6. Suma analítica. 5
1.7. Ponderación de un vector. 5
1.8. Ponderación de un vector. A cada coordenada se le aplica un factor α. 6
1.9. Resta de vectores. 7
1.10Punto medio. 9
1.11Razón $m : n$. 9
1.12Transversales de gravedad. 11

CAPíTULO 1

Vectores y Geometría Analítica (Axel Osses)

"La fascinación del espíritu nace de un justo equilibrio entre belleza y utilidad"

1.1. Introducción

La geometría nace en Babilonia y el antiguo Egipto hacia el 2700 a.C.[1] por la necesidad de medir terrenos agrícolas, para la construcción de edificaciones y por intereses astronómicos. Los sacerdotes egipcios llamaban "cosas oscuras" a este conocimiento que les era secreto, pero que ya hacia el 600 a.C. fue adquirido por los griegos. De este tiempo son Tales de Mileto (640–550 a.C.) y Pitágoras (569–500 a.C.). Ellos acuñaron el nombre *geometría* o "medida de las tierras" y la desarrollaron enormemente integrándola a su filosofía y arte como lo demuestran las ideas de Platón (429–328 a.C.) y Aristóteles (384–322 a.C).

Posteriormente, en la Universidad de Alejandría en el delta del Nilo, los griegos cultivaron esta disciplina hasta su madurez que queda plasmada como *geometría plana* en la obra "Elementos" de Euclides (330–275 a.C.) y en los trabajos de Arquímides (287–212 a.C.) en cuerpos curvos. A este mismo periodo se debe el estudio de la cónicas por Apolonio, de la *geodesia* o medida de la Tierra por Eratóstenes y de la *trigonometría* por Hiparco de Nicea, siendo el último de la saga el griego Pappus antes de la conquista de Alejandría por los árabes. Mucho de este conocimiento desapareció con el incendio de la Biblioteca de Alejandría, pero las obras fundamentales, como los "Elementos" de Euclides se tradujeron al árabe y se estudiaron durante siglos en Bagdad y Alejandría, mientras en Europa, luego de la caída de los romanos (476 d.C.) habría que esperar para que este conocimiento, junto al de la aritmética y álgebra provenientes del oriente (India y China) se asimilara[2] en los monasterios pre-renacentistas del siglo XII y se integrara definitivamente al desarrollo cultural europeo y de occidente.

La obra de Euclides mejorada por el francés Legendre en 1794 fue definitivamente renovada por René Descartes (1596–1650) quien daría un paso importante en 1637 al sentar en su obra "La Geometrie" las bases de la *geometría analítica* y que junto al cálculo diferencial de Liebnitz y Newton conformarían lo que actualmente se conoce como *geometría diferencial*. Todo esto conformaría la llamada *geometría euclidiana*. La negación del postulado de las paralelas de Euclides llevaría posteriormente al estudio de las llamadas *geometrías no euclidianas*: el italiano Saccheri en 1733, el ruso Lobachevski en 1830, el húngaro Bolyai en 1832 y el alemán Riemann en su tesis de 1854.

[1] 1700 a.C. manuscrito de Ahmes, museo británico, se cree adaptación de un manuscrito 1000 años más antiguo.

[2] 1120 d.C. Atelbardo de Bath, monje inglés, traduce los "Elementos" de Euclides al latín.

1.2. Vectores

Para dar cuenta de las nociones del espacio plano, como son por ejemplo distancias, lugares, figuras e incluso movimiento, necesitaremos un *sistema de referencia* o *sistema de coordenadas cartesianas*. Cada punto A tiene asociadas dos coordenadas $A = (x, y)$. El trazo dirigido del origen al punto A o *vector posición* lo denotamos por

$$\vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

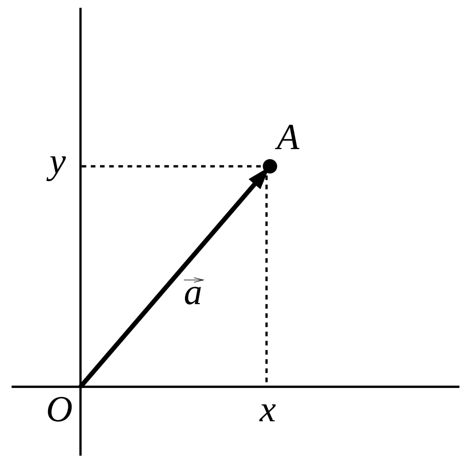

FIGURA 1.1. Sistema de coordenadas y vector posición.

1.2.1. Vector desplazamiento e igualdad de vectores. Así como un vector puede indicar *posición* respecto de un origen dado, por ejemplo, el vector posición que apunta en cada momento del Sol a la Tierra, un vector también es útil para indicar *desplazamientos*. Sean A y B dos puntos cualesquiera del plano, entonces el trazo dirigido con origen en A y término en B se llama *vector desplazamiento* o *vector libre* $\vec{AB}$.

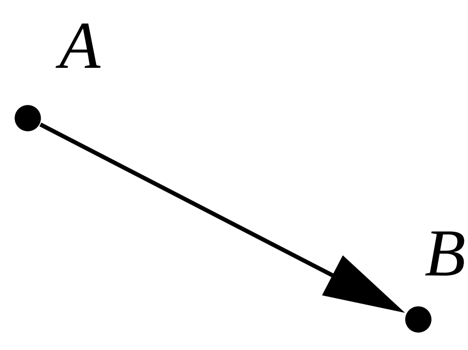

FIGURA 1.2. Vector desplazamiento.

1.2.2. Módulo de un vector. El módulo del vector desplazamiento $\vec{AB}$ es por definición la longitud del segmento AB.

1.2.3. Dirección de un vector. Si $A \neq B$, la dirección de un vector desplazamiento $\vec{AB}$ hace referencia a la dirección de recta que contiene al segmento AB.

1.2.4. Sentido de un vector. Si $A \neq B$, el sentido de un vector desplazamiento $\vec{AB}$ es uno de los dos posibles en la dirección dada.

1.2.5. Igualdad de vectores. Para entender cabalmente la noción de igualdad de vectores, utilicemos un *paralelogramo*, que es por definición un cuadrilátero de lados opuestos paralelos. Consideremos por ejemplo el paralelogramo $ABCD$ de la figura. Por geometría elemental y congruencia de triángulos, se puede probar que los lados opuestos del paralelogramo son además de igual longitud.

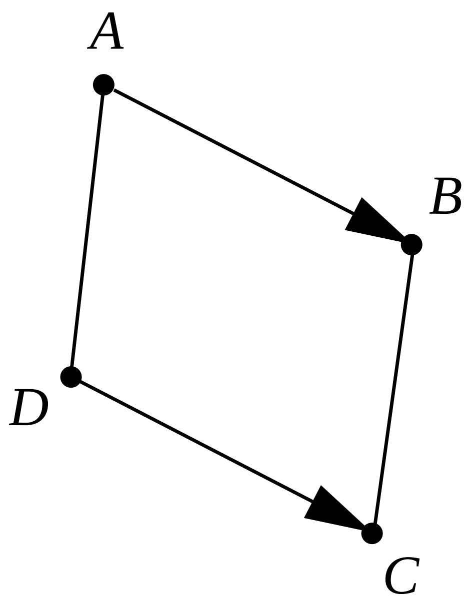

FIGURA 1.3. Paralelogramo.

Es fácil ver entonces que los vectores desplazamiento $\vec{AB}$ y $\vec{DC}$ tienen igual *longitud, dirección y sentido*. Aunque no tienen el mismo origen diremos que ambos vectores son el mismo vector, pero con el origen desplazado. A esto se le llama igualdad geométrica de vectores.

De manera equivalente, podemos considerar dos vectores desplazamiento iguales si coinciden cuando los trasladamos al origen. Esto es, una vez trasladados al origen, es claro que dos vectores serán iguales si el punto al que apuntan es el mismo, esto es si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores posición de $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ respectivamente, entonces, por igualdad de pares ordenados, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

A esto se le llama *igualdad algebraica* de vectores.

1.2.6. Suma de vectores. Si nos desplazamos de A a B y luego de B a C, es natural pensar que el desplazamiento total es el vetor que va de A a C. Esto es

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

En el paralelogramo $ABCD$ de antes, esto se ve así:

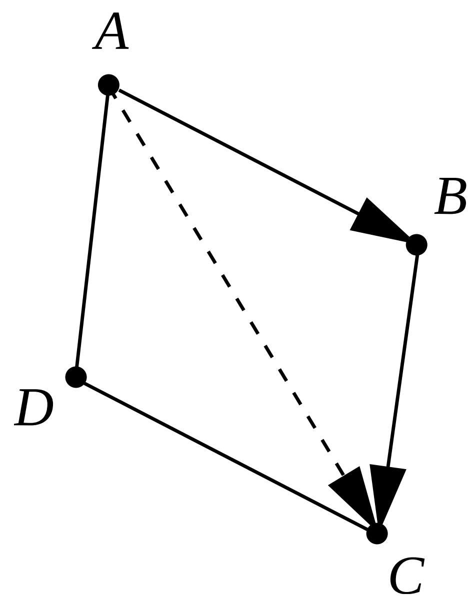

FIGURA 1.4. Suma geométrica de vectores.

donde el vector suma resulta seguir una de las diagonales del paralelogramo.

Otra forma de verlo es así, donde luego de desplazar paralelamente $\vec{BC}$ hasta $\vec{AD}$, ahora miramos los dos vectores desde un mismo origen común A. En este caso la suma sigue siendo la misma, y correspondería por ejemplo a la fuerza resultante de arrastrar un peso en dos direcciones diferentes.

Es fácil ver de la siguiente figura que se cumple para los vectores por el origen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que la suma de vectores es conmutativa y asociativa.

1.2.7. Ponderación de vectores. Siguiendo con la idea de fuerzas, si duplicamos la magnitud de una fuerza, o la reducimos a la mitad, solamente estamos cambiando la longitud del vector fuerza por un factor, sin variar su dirección ni su sentido. A este factor lo llamaremos *ponderador* o *escalar* y lo denotaremos preferentemente por una letra griega para diferenciarlo de los vectores. Lo que decimos corresponde a ponderadores positivos $\alpha = 2$, $\alpha = 1/2$. Geométricamente, esto se muestra en la figura siguiente:

Podemos también cambiar el sentido de la fuerza, sin variar su dirección, esto corresponde a ponderadores negativos $\alpha < 0$.

En ambos casos, analíticamente lo que hacemos es:

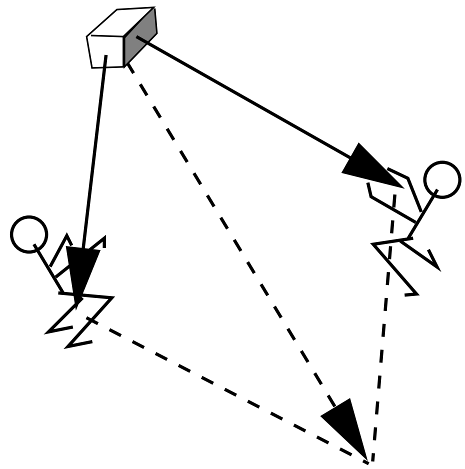

Figura 1.5. Resultante de fuerzas que arrastran un peso.

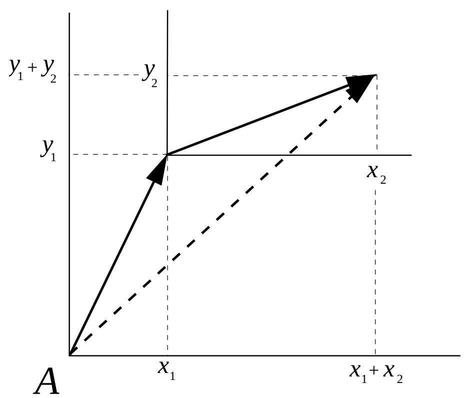

Figura 1.6. Suma analítica.

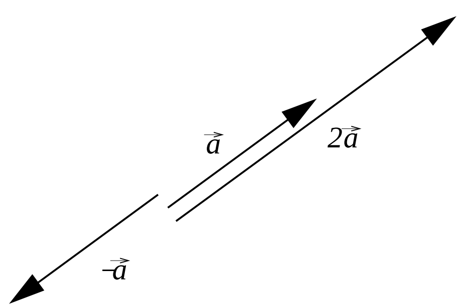

Figura 1.7. Ponderación de un vector.

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

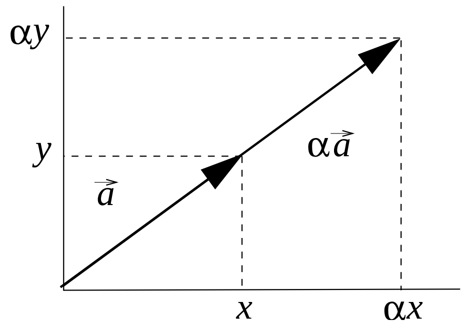

FIGURA 1.8. Ponderación de un vector. A cada coordenada se le aplica un factor α.

Esto incluye el caso particular en que $\alpha = 0$, en cuyo caso se obtiene el *vector nulo*:

$$0\vec{a} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el caso $\alpha = 1$ que deja invariente al vector:

$$1\vec{a} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y para el caso $\alpha = -1$ se obtiene lo que se conoce como el *vector opuesto*

$$(-1)\vec{a} = \vec{-a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Notar que vector y opuesto dan como resultante el vector nulo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o en notación más condensada

$$\vec{a} + \vec{-a} = \vec{0}$$

y que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o en notación más condensada

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Puede el lector verificar también en forma analítica la asociatividad siguiente:

$$(\alpha)\beta\vec{a} = (\alpha\beta)\vec{a}$$

y la distributividad tanto para vectores como para escalares:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

1.2.8. Vectores paralelos. Dos vectores se dicen paralelos si tienen igual dirección. De forma equivalente, dos vectores son paralelos si uno es ponderación del otro, con un ponderador no nulo, esto es:

$$\vec{a}||\vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{existe } \alpha \neq 0 \text{ tal que } \vec{a} = \alpha\vec{b}$$

Llevándolo a forma analítica esto es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{existe } \alpha \neq 0 \text{ tal que } x_1 = \alpha x_2,\ y_1 = \alpha y_2$$

eliminando α se obtiene la condición de paralelismo[3] siguiente[4]:

$$x_1\, y_2 - x_2\, y_1 = 0.$$

1.2.9. Tres puntos colineales. Tres puntos A, B, C se dicen colineales si $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ son paralelos. Notar que los dos vectores comparten un punto común.

1.2.10. Resta de vectores. Consideremos el triángulo siguiente formado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Es claro que si operáramos con vectores tal como se hace para los números reales se tendría:

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$

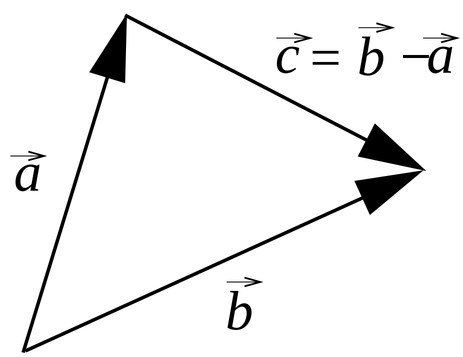

FIGURA 1.9. Resta de vectores.

A través de la resta de vectores, veamos ahora la utilidad de ver los vectores de forma algebraica. Utilizando las propiedades vistas hasta ahora[5] el despeje de $\vec{c}$ se hace paso por paso así:

---

[3] Más adelante se leerá esta expresión como "determinante nulo".

[4] Esto también se puede ver de la condición de que las pendientes de ambos vectores son iguales: $y_1/x_1 = y_2/x_2$.

[5] Propiedades llamadas de Espacio Vectorial.

$$\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{c} &= \vec{b} \\
\vec{c}+\vec{a} &= \vec{b} \qquad /(\text{usando conmutatividad...}) \\
(\vec{c}+\vec{a})+(-\vec{a}) &= \vec{b}+(-\vec{a}) \qquad /(\text{sumando opuesto a ambos lados...}) \\
\vec{c}+(\vec{a}+(-\vec{a})) &= \vec{b}+(-\vec{a}) \qquad /(\text{por asociatividad...}) \\
\vec{c}+\vec{0} &= \vec{b}+(-\vec{a}) \qquad /(\text{por opuesto...}) \\
\vec{c} &= \vec{b}+(-\vec{a}) \qquad /(\text{por neutro...})
\end{aligned}$$

de donde es natural definir la resta como la suma del opuesto, al igual que para los números reales:

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$

esto es, analíticamente, la resta de vectores queda:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}$$

Verifique geométricamente que la resta en un paralelogramo corresponde a otra de sus diagonales.

Notar que con la definición de resta se tiene automáticamente que

$$\alpha(\vec{a}-\vec{b})=\alpha\vec{a}-\alpha\vec{b}, \qquad (\alpha-\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}-\beta\vec{a}$$

1.2.11. Punto medio y razón. El vector posición $\vec{m}$ correspondiente al punto medio M entre los puntos A y B, cuyos vectores posición son respectivamente $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dado por:

$$\vec{m}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

calculando (y omitiendo paréntesis cada vez que se pueda por asociatividad) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}) \\
&= \vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a} \qquad /(\text{por distributividad...}) \\
&= \vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} \qquad /(\text{por conmutatividad...}) \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} \qquad /(\text{por distributividad...}) \\
&= \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} \qquad /(\text{restando...}) \\
&= \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}
\end{aligned}$$

analíticamente, si $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$, entonces

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$

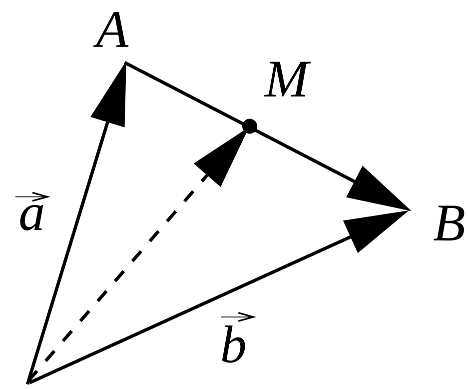

FIGURA 1.10. Punto medio.

De forma similar se puede obtener el punto el vector posición $\vec{r}$ del punto R que separa el segmento AB en la razón m es a n como

$$\vec{r} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$$

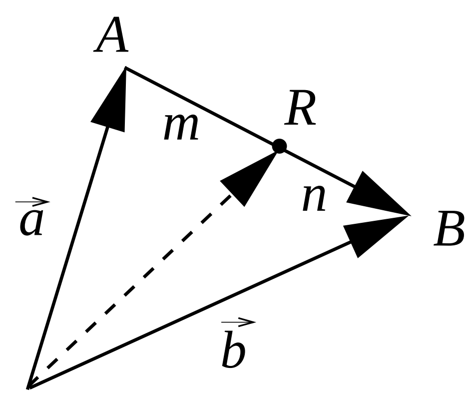

FIGURA 1.11. Razón $m : n$.

1.2.12. Producto punto de vectores. Se define el siguiente producto entre dos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1\, y_2 + y_1\, y_2$$

Notar que el producto punto no es un vector, sino que un número real que puede se negativo, positivo o nulo.

Verificar las siguientes propiedades:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a}$$

1.2.13. Vectores perpendiculares. Dos vectores se dicen perpendiculares si su producto punto es nulo, esto es

$$\vec{a} \perp \vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

esto es la condición de perpendicularidad es la siguiente[6]

$$x_1\, x_2 + y_1\, y_2 = 0$$

1.2.14. Cálculo del módulo de un vector. Vectores unitarios. Veremos más adelante que para calcular el módulo de un vector debemos calcular la raíz (positiva) del producto punto del vector consigo mismo, esto es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Un vector unitario es un vector de módulo 1:

$$\vec{a} \text{ es unitario} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\vec{a}| = 1$$

1.2.15. Problemas de triángulos definidos en forma vectorial. Dos problemas clásicos son:

1. Demostrar que un triángulo con uno de sus lados diámetro de una circunferencia y el vértice opuesto sobre la misma circunferencia es necesariamente rectángulo.

   Desde el centro de la circunferencia, llamar a un radio $\vec{a}$ y al otro radio opuesto $-\vec{a}$. Al vector que va del centro al vértice opuesto C del triángulo llamarlo $\vec{c}$. Entonces verificar que:

   $$(-\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

   usando que el radio es igual, esto es que $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{c}$.
2. Demostrar que las transversales de gravedad se intersectan en la razón 1:2.

   Hacerlo por ejemplo en el triángulo de la figura definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hay que mostrar que

   $$\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)$$

1.2.16. Temas de cierre.

a) Ecuación vectorial de la recta
b) Independencia lineal
c) Dimensión superior y/o fraccionaria
d) Estructura de espacio vectorial

---

[6] Esta condición puede obtenerse de la regla "producto de pendientes igual -1" ya que corresponde a $\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2} = -1$.

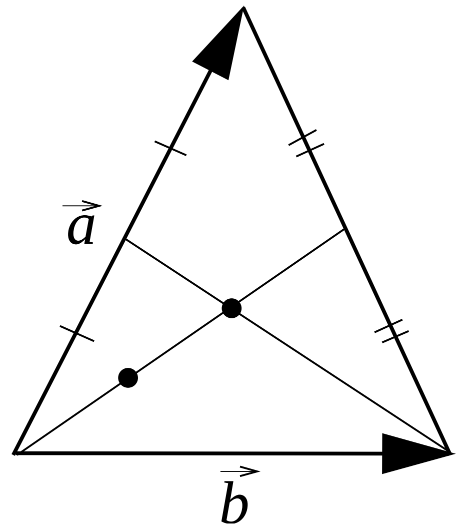

FIGURA 1.12. Transversales de gravedad.

1.3. Geometría Analítica

(...continuará)

Bibliografía

[1] J.E. Thompson *Geometría*, col. Matemáticas al alcance de todos, traducción de la obra original en inglés: "Geometry for a practical man", D. Van Nostrand Co., New York, Ed. Uthea, México, México, 1961. Fue la fuente del resumen histórico.