
ESCUELA DE VERANO 2008 - MATEMÁTICAS

Profesores: Rodolfo Carvajal, Juan Peypouquet, Jaime González, Axel Osses.

GUÍA #1: Vectores

Problema 1. Dibuje los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en un sistema de coordenadas. Calcule los nuevos vectores $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{c} + \vec{d}$, $\vec{z} = \vec{a} + \vec{c}$ y grafíquelos.

Problema 2. Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\lambda = 3$ entonces ¿cuánto vale $\lambda \vec{a}$? Grafique.

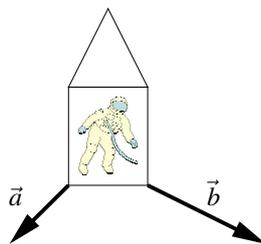
Problema 3. Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Represente los vectores indicados en el plano: \vec{u} , \vec{v} , $2\vec{u}$, $-4\vec{v}$, $\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ y $3\vec{u} + 4\vec{v}$.

Problema 4. Los puntos A , B , C y D tienen los siguientes vectores posición: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ y $\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calcule las coordenadas de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} y compruebe que **no** son paralelos.

Problema 5. Con los vectores posición $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ se asocia a cada x el punto M tal que $\overrightarrow{CM} = \alpha \vec{u}$. Escriba las coordenadas de M en términos de α . ¿Para qué valor de α se obtiene a M sobre el trazo AB ?

Problema 6. El cohete de la figura, tiene dos propulsores orientados según los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Estos propulsores funcionan independientemente, generando un empuje sobre la nave de la forma $\vec{e} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.



1. Encuentre las coordenadas del vector \vec{e} en términos de α y β .
2. Para qué valores de α y β , el empuje \vec{e} es vertical e igual a $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.
3. Si $\beta = 2$, ¿Es posible propulsar la nave en forma horizontal?

Problema 7. Dados los puntos $A = (1, 1)$, $B = (7, -2)$, $C = (6, 5)$ y $D = (3, 6)$ calcule:

E punto medio de AB

F punto medio de BD

G punto medio de CD

H punto medio de AC

Grafique en una misma figura los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$.

Compruebe que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HG} &= \overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{EH} &= \overrightarrow{FG}.\end{aligned}$$

Deduzca de esto que $EFGH$ es un paralelogramo.

Problema 8. Considere los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encuentre las coordenadas de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} . ¿Son colineales los puntos A , B y C ?

Problema 9. Determine si los puntos P , Q y R son colineales sabiendo que $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\vec{r} = \begin{pmatrix} 31 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Problema 10. Se sabe que los puntos P , Q y R son colineales donde $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ x \end{pmatrix}$. Para determinar el valor de x , proceda de las siguientes dos formas:

1. **Método gráfico:** Dibuje los puntos P y Q , dibuje la recta que pasa por esos puntos y busque donde debiera estar el punto R .
2. **Método analítico:** Escriba las coordenadas de los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{QR} . Con esto determine el valor de $x - 3$ de modo que los vectores sean paralelos. Finalmente obtenga el valor de x .

Problema 11. Encuentre los valores para x e y que garantizan que A , B y M son colineales, sabiendo que $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

Problema 12. Obtenga el producto punto de cada par de vectores dado:

$$i) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad iii) \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 13. Demuestre que el triángulo con vértices $P = (4, 1)$, $Q = (1, 0)$ y $R = (3, -6)$ es un triángulo rectángulo.

Problema 14. Determine el módulo de los siguientes vectores:

$$i) \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ii) \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad iii) \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Verifique el valor obtenido gráficamente, midiendo el largo de cada vector con una regla.

Problema 15. Encuentre x tal que el módulo del vector de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}$ sea 5.

Problema 16. Encuentre y tal que el módulo del vector $\begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix}$ sea 32.

Problema 17. Un punto del plano tiene primera coordenada (abscisa) 3 y se encuentra a la misma distancia de los puntos $(1, 1)$ y $(-2, 5)$. ¿Cuál es la segunda coordenada (ordenada) del punto?

Problema 18. Encuentre Q de manera que \overrightarrow{PQ} sea un vector de misma dirección y sentido que $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ pero cuya magnitud sea 1.

Problema 19. Encuentre Q' de manera que $\overrightarrow{PQ'}$ sea un vector de misma dirección, sentido opuesto a $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y cuya magnitud sea 15.

Problema 20. Considere el triángulo cuyos vértices son $A = (0, 0)$, $B = (b, 1)$ y $C = (0, c)$. Suponiendo conocido el valor de b , y sabiendo que el ángulo en B es recto, calcule las coordenadas de C . Si D es el punto medio de AC , compruebe que la distancia de D a B es igual a la distancia de D a A .

Problema 21. Considere el triángulo ABC cuyos vértices son $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$ y $C = (5, 6)$.

1. Se definen los puntos P y Q mediante las relaciones $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Encuentre las coordenadas de los vectores posición \vec{p} y \vec{q} .
2. Se define el punto R , en términos del real α , mediante la relación $\overrightarrow{BR} = \alpha\overrightarrow{BC}$. Encuentre las coordenadas del vector posición \vec{r} en términos de α .
3. ¿Para qué valor de α el vector \overrightarrow{AR} es paralelo al vector \overrightarrow{PQ} ?

Problema 22. Encuentre la longitud del segmento \overline{PQ} donde $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 9)$.

Problema 23. Un punto del plano tiene primera coordenada (abscisa) 3 y se encuentra a la misma distancia de los puntos $(1, 1)$ y $(-2, 5)$. Cuál es la segunda coordenada (ordenada) del punto.

Problema 24. Dados tres vectores del plano \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} tales que:

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \quad (\text{o bien } |\vec{a}| = |\vec{b}|) \text{ y } \vec{c} = -\vec{b},$$

demuestre que:

$$(\vec{c} - \vec{a}) \perp (\vec{b} - \vec{a})$$

Indicación: puede hacer la demostración utilizando las propiedades del producto punto o bien utilizando operaciones con coordenadas $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Problema 25. Se sabe que los vectores \vec{u} y \vec{v} verifican $\vec{u} \cdot \vec{u} = 2$, $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{2}{3}$. Calcule los productos siguientes: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$, $\vec{u} \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$, $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 4\vec{v})$, $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$, $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$.
¿Es posible encontrar α que cumpla $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \alpha\vec{v}) = 0$? ¿O que cumpla $\|\alpha\vec{u}\| = 1$? ¿O bien $\|\vec{u} + \alpha\vec{v}\| = 1$?

Problema 26. ✕ Pruebe que si \vec{u} y \vec{v} son vectores ortogonales en el plano, entonces $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$.

Problema 27. ✕ Probar usando vectores que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Indicación: Sin pérdida de generalidad, considere un sistema de referencia con origen en el centro de la semicircunferencia y con uno de los ejes coordenados sobre el diámetro.