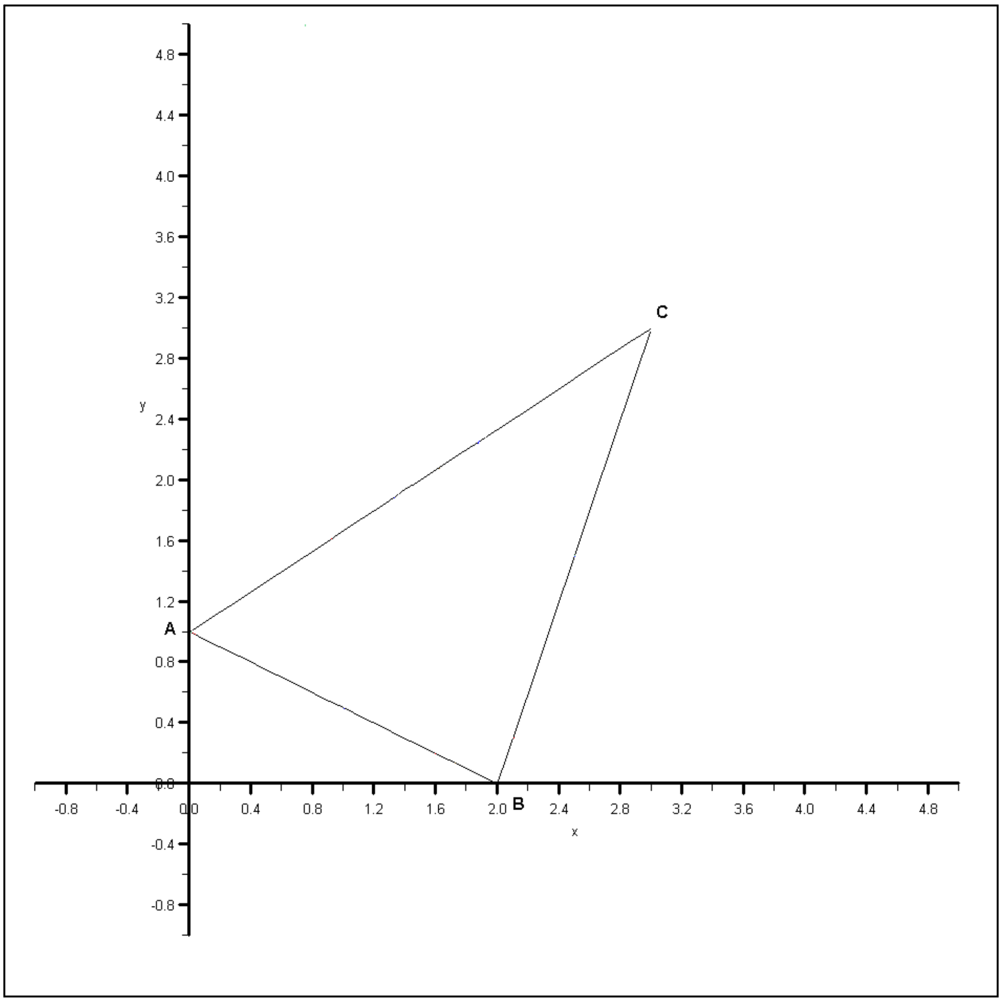
Profesor: Rodolfo Carvajal
Auxiliares: Alex Becerra, Mauricio Quezada, Nicolás Gotschlich.

Pauta Ejercicio Recuperativo

Con los puntos entregados en el enunciado; el triangulo sobre el cual se trabajara que definido de la siguiente manera:



- Vectores Directores y ecuaciones de las rectas que definen los lados del triángulo:

    - Lado AB

      Vector director: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

      Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

      Ecuación Cartesiana:

      $$2\lambda = x \Leftrightarrow \lambda = \frac{x}{2}$$
      $$y = 1-1\cdot\lambda$$
      $$y = -\frac{x}{2}+1$$

    - Lado BC

      Vector director: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

      Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{BC}:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

      Ecuación Cartesiana:

      $$x = 2+\lambda \Leftrightarrow \lambda = x-2$$
      $$y = 3\lambda$$
      $$y = 3x-6$$

    - Lado AC

      Vector director: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

      Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{AC}:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

      Ecuación Cartesiana:

      $$x = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{x}{3}$$
      $$y = 1+2\lambda$$
      $$y = 1+\frac{2x}{3}$$

- Medianas:
    - Mediana del lado AB

      Punto medio de AB= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

      Director de la mediana= $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

      Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{M_C} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

      Ecuación Cartesiana:

      $x = 3 + 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{x-3}{2}$

      $y = 3 + \dfrac{5}{2} \cdot \left(\dfrac{x-3}{2} \right)$

      $y = \dfrac{5}{4} x - \dfrac{3}{4}$

    - Mediana del lado BC

      Punto medio de BC= $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

      Director de la mediana= $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

      Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{M_A} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

      Ecuación Cartesiana:

      $x = \dfrac{5}{2} \beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{2}{5} x$

      $y = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{5} x \right)$

      $y = 1 + \dfrac{x}{5}$

- Mediana del lado AC

  Punto medio de AC= $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Director de la mediana= $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{M_B}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Ecuación Cartesiana:

  $y = 2\gamma \Leftrightarrow \gamma = \dfrac{y}{2}$

  $x = 2 - \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{y}{2} \right)$

  $y = 8 - 4x$

Punto de Intersección:

Intersectando las rectas $\overrightarrow{M_C}$ con $\overrightarrow{M_B}$ se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{4} \\ y = 8 - 4x \end{array} \right|$$

$5x - 3 = 32 - 16x$

$x = 5/3$

$y = 4/3$

Falta verificar que el punto encontrado pertenezca a la recta $\overrightarrow{M_A}$, para concluir que las tres mediatrices se intersectan en un punto. Reemplazando los valores obtenidos en $\overrightarrow{M_A}$:

$y = 1 + \dfrac{x}{5}$

$\dfrac{4}{3} = 1 + \dfrac{(5/3)}{5} = 1 + \dfrac{5}{15}$

$\dfrac{4}{3} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$

Por lo tanto, las tres medianas se intersectan en un punto, más específicamente para este problema, se intersectan en $P = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

- Mediatrices:

  - Mediatriz del lado AB

    Punto medio de AB= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

    Vector director= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

    Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{M_{AB}}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

    Ecuación Cartesiana:

    $x = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = x - 1$

    $y = \frac{1}{2} + 2(x-1)$

    $y = 2x - \frac{3}{2}$

  - Mediatriz del lado BC

    Punto medio de BC= $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

    Vector director= $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

    Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{M_{BC}}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

    Ecuación Cartesiana:

    $x = 5/2 - 3\beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{x - 5/2}{3}$

    $y = \frac{3}{2} + \frac{5/2 - x}{3}$

    $y = \frac{7}{3} - \frac{x}{3}$

- Mediatriz del lado AC

  Punto medio de AC= $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Vector director= $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

  Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{M_{AC}}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

  Ecuación Cartesiana:

  $$x = 3/2 - 2\gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{3/2 - x}{2}$$

  $$y = 2 + 3 \cdot \left(\frac{3/2 - x}{2} \right)$$

  $$y = \frac{17}{4} - \frac{3x}{2}$$

Punto de Intersección:

Intersectando las rectas $\overrightarrow{M_{AB}}$ con $\overrightarrow{M_{BC}}$ se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{3} - \frac{x}{3} \end{array} \right|$$

$$2x - 3/2 = 7/3 - x/3$$

$$12x - 9 = 14 - 2x$$

$$x = 23/14$$

$$y = 25/14$$

Falta verificar que el punto encontrado pertenezca a la recta $\overrightarrow{M_{AC}}$, para concluir que las tres mediatrices se intersectan en un punto. Reemplazando los valores obtenidos en $\overrightarrow{M_{AC}}$:

$$y = \frac{17}{4} - \frac{3x}{2}$$

$$\frac{25}{14} = \frac{17}{4} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{23}{14} \right)$$

$$\frac{25}{14} = \frac{17}{4} - \frac{69}{28} = \frac{17 \cdot 7 - 69}{28}$$

$$\frac{25}{14} = \frac{119 - 69}{28} = \frac{50}{28} = \frac{25}{14}$$

Por lo tanto, las tres mediatrices se intersectan en un punto, más específicamente para este problema, se intersectan en $Q=\begin{pmatrix}23/14\\25/14\end{pmatrix}$.

- Alturas:
  - Altura del lado AB

    Vector director= $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

    Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{h_C}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

    Ecuación Cartesiana:

    $3+\gamma=x\Leftrightarrow\gamma=x-3$

    $y=3+2\cdot(x-3)$

    $y=2x-3$

  - Altura del lado BC

    Vector director= $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

    Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{h_A}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

    Ecuación Cartesiana:

    $-3\alpha=x\Leftrightarrow\alpha=-x/3$

    $y=1-\frac{x}{3}$

  - Altura del lado AC

    Vector director= $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

    Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{h_B}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

    Ecuación Cartesiana:

    $3\beta=y\Leftrightarrow\beta=y/3$

    $2-2\cdot\left(\frac{y}{3}\right)=x$

    $y=3-\frac{3x}{2}$

Punto de Intersección:

Intersectando las rectas $\overrightarrow{h_C}$ con $\overrightarrow{h_A}$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = 1 - \dfrac{x}{3} \end{array}\right|$$

$$6x - 9 = 3 - x$$

$$x = 12/7$$

$$y = 3/7$$

Falta verificar que el punto encontrado pertenezca a la recta $\overrightarrow{h_B}$, para concluir que las tres alturas se intersectan en un punto. Reemplazando los valores obtenidos en $\overrightarrow{h_B}$:

$$y = 3 - \frac{3}{2}x$$

$$\frac{3}{7} = 3 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{12}{7}\right)$$

$$\frac{3}{7} = 3 - \frac{36}{14} = \frac{42 - 36}{14}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

Por lo tanto, las tres alturas se intersectan en un punto, más específicamente para este problema, se intersectan en $R = \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$.

- Recta de Euler:

A modo de resumen, los puntos obtenidos son:

Intersección de Alturas: R = (12/7 , 3/7)

Intersección de Medianas: P=(5/3 , 4/3)

Intersección de Mediatrices: Q= (23/14 , 25/14)

A continuación se determinara una recta que pasa por lo puntos Q y R, para posteriormente verificar si P pertenece a la recta obtenida. En caso de pertenecer los tres puntos serán colineales:

Recta que pasa por Q y R (Recta de Euler):

Vector Director: $\begin{pmatrix} 23/14 \\ 25/14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/14 \\ 19/14 \end{pmatrix}$

Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{R_{EULER}} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/14 \\ 19/14 \end{pmatrix}$

Ecuación Cartesiana:

$$x = \frac{12}{7} - \lambda \frac{1}{14}$$
$$\lambda = 24 - 14x$$
$$\frac{3}{7} + \frac{19}{14} \cdot (24 - 14x) = y$$
$$\boxed{y = 33 - 19x}$$

Ahora se verifica si el punto P pertenece a la recta encontrada:

$$y = 33 - 19x$$
$$4/3 = 33 - 19 \cdot (5/3)$$
$$\frac{4}{3} = 33 - \frac{95}{3} = \frac{99-95}{3} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto los tres puntos pertenecen a la recta, es decir, son colineales.

A continuación se muestra un gráfico que contiene al triangulo y a sus componentes utilizadas en este problema (alturas, medianas y mediatrices), donde se observa claramente que los puntos de intersección son colineales: