Pauta pregunta 3 – Control 2

(i)

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Dada la igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Se obtiene que

$$a^2 = c$$

(ii)
Se tiene la siguiente ecuación matricial

$$X^2 = (-1) \cdot I$$

Pero X tiene una determinada forma, reemplazamos en la ecuación anterior

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del lado izquierdo

$$\begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & -y^2 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la igualdad de matrices se pueden plantear 4 ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -1 \\ 2xy &= 0 \\ -2xy &= 0 \\ -y^2 + x^2 &= -1 \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores solo tomamos dos que sean diferentes y no estén repetidas, es decir, nos queda un sistema no lineal de 2 por 2 con las siguientes ecuaciones

$$x^2 - y^2 = -1 \qquad (1)$$

$$2xy = 0 \qquad (2)$$

De la ecuación (2) podemos concluir que x = 0, ya que en el enunciado nos dicen que $y \neq 0$.
Reemplazando x = 0 en la primera ecuación se llega a

$$y^2 = 1$$

Cuyas soluciones son

$$y_1 = 1,\ y_2 = -1$$

Por lo tanto, las matrices X_1 y X_2 son

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota : Estas soluciones no representan un número real ya que en la parte (i) a cada número real a, se le asocio la matriz aI, que es una matriz diagonal. Las soluciones que se obtuvieron no tienen esa forma y por lo tanto no representan ningún número.

(iii)

Tomemos X_1 y calculemos X_1^{-1}

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(X_1) = 1$$

Damos vuelta los elementos de la diagonal y cambiamos los signos de los elementos de la antidiagonal

$$X_1^{-1} = \frac{1}{\det(X_1)}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, se comprueba que

$$X_1^{-1} = X_2$$