

Matrices y Sistemas Lineales (Rodolfo Carvajal)

“Yo no busqué a la teoría de matrices. De alguna manera ella me busco a mí.”—Olga Taussky Todd en *American Mathematical Monthly*.

2.1. Introducción

El concepto matemático de *matriz* es una de esas nociones que ha estado presente en la humanidad desde tiempos ancestrales, pero que no fue formalizada hasta hace muy poco tiempo. En este caso, hasta el año 1850.

El origen de las matrices está en el estudio de la resolución de ecuaciones simultáneas (o sistemas de ecuaciones). Un importante libro chino de entre el 300 a.C. y 200 d.C., *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, de Chiu Chang Suan Shu, da el primer ejemplo conocido de métodos matriciales para resolver dichos sistemas.

En el séptimo capítulo de dicho libro, llamado “Mucho y no suficiente”, el concepto de *determinante* aparece, casi dos milenios antes de ser supuestamente inventado por el matemático japonés Seki Kowa en 1683 o su contemporáneo alemán Gottfried Leibnitz¹.

Otros usos de arreglos de números del estilo de las matrices aparecen en el capítulo ocho, “Métodos de arreglos rectangulares”, en donde da un método para resolver sistemas de ecuaciones, usando un tablero de conteo, el cual es matemáticamente idéntico al método moderno conocido como *eliminación Gaussiana*, descrito por Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

El término *matriz* es introducido en 1850 por el matemático inglés James Joseph Sylvester. Una anécdota tragicómica de Sylvester cuenta que tuvo una breve carrera en la Universidad de Virginia, la cual terminó cuando un estudiante, que había estado leyendo el periódico durante una de sus cátedras, lo insultó y Sylvester lo golpeó con una varilla. El estudiante colapsó en *shock* y Sylvester pensó (equivocadamente) que lo había matado, yéndose de la ciudad.

La consolidación de las matrices como una importante teoría matemática se debe en gran parte al trabajo de la matemática Olga Taussky Todd (1906-1995), quien comenzó a usar matrices para analizar vibraciones en aviones durante la Segunda Guerra Mundial y se transformó en una pionera en teoría en matrices.

Las matrices tiene también protagonismo en el arte. En el famoso cuadro de Alberto Durero “La Melancolía” se puede apreciar una matriz *mágica*, un tipo de matriz con interesantes características matemáticas. Así también, en el *Templo de la Sagrada Familia*, diseñado por Antoni Gaudí en Barcelona, se encuentran presentes matrices mágicas como parte de la onamentación de la basílica.

¹A Leibnitz también se le atribuye la invención del Cálculo Diferencial, independiente pero simultáneamente con Isaac Newton

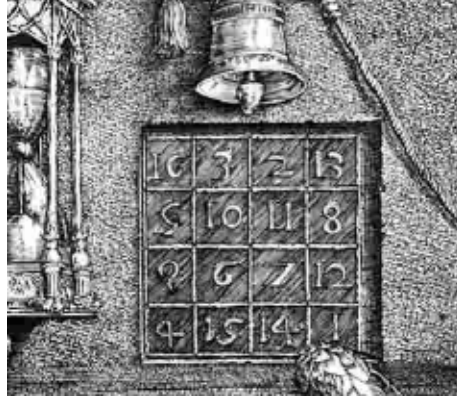


FIGURA 2.1. Detalle de “La Melancolía”.

Así, desde su primera aparición en China, las matrices han permanecido siendo importantes herramientas matemáticas. Hoy son usadas no sólo para resolver sistemas de ecuaciones, si no que también para describir la mecánica cuántica detrás de la estructura atómica, diseñar los gráficos de juegos de computador, analizar relaciones entre entes de diversos tipos, graficar complicados pasos de baile y hasta para jugar Sudoku.

2.2. Matrices

Una **matriz** A de m filas y n columnas, es una tabla de doble entrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

en los $a_{i,j}$ son números reales que llamamos *coeficientes*. Los número i y j son *índices* que indican la posición en la matriz de cada elemento.

Notamos también la matriz como $A = (a_{i,j})$ y denominamos $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad a_{1,3} = 3, \quad a_{2,2} = -1.$$

2.2.1. Igualdad de matrices. Diremos que dos matrices son iguales si coinciden sus dimensiones (número de filas y columnas) y sus coeficientes.

Formalmente, dadas $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{m',n'}(\mathbb{R})$,

$$A = B \Leftrightarrow (m = m'), (n = n') \text{ y } (\text{Para todos } i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} = b_{i,j})$$

2.2.2. Suma de matrices. Podemos definir, a partir de la suma en los reales, la suma de matrices. Dadas $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la **matriz suma** es:

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Es importante notar que la suma sólo se puede realizar entre matrices que tengan las mismas dimensiones.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como ejercicio, pruebe que las siguientes propiedades se satisfacen para la suma de matrices:

1. (Conmutatividad) $A + B = B + A$.
2. (Asociatividad) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

2.2.3. Ponderación de matrices. Dado un número real λ y una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, definimos la *ponderación de A por λ* como la matriz:

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

2.2.4. Matriz nula. Notemos que si ponderamos una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ cualquiera por el número real $\lambda = 0$, obtenemos:

$$0 \cdot A = (0 \cdot a_{i,j}) = (0).$$

Es decir, se obtiene una matriz cuyos coeficientes son todos nulos. A esta matriz la llamaremos *matriz nula* y la denotamos por $\mathbf{0}$.

Notemos que la matriz nula satisface que para toda matriz A (de las mismas dimensiones):

$$A + \mathbf{0} = A.$$

2.2.5. Matriz opuesta. Ahora, si en lugar de usar el ponderador 0, usáramos el ponderador $\lambda = -1$ obtenemos:

$$(-1)A = (-a_{i,j}).$$

A esta matriz la llamaremos *opuesta de A* y la denotaremos por $-A$. Notemos que satisface

$$A + (-A) = (a_{i,j} + (-a_{i,j})) = (0) = \mathbf{0}.$$

Es decir, $-A$ es la opuesta para la operación suma de A .

2.2.6. Matrices cuadradas. Un tipo de matrices especial es aquel en el que $m = n$, es decir el número de filas es igual al número de columnas de la matriz. Estas matrices se dicen *cuadradas*.

Ejemplos:

Son cuadradas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación: A partir de ahora trataremos sólo con matrices de 2×2 , es decir con 2 filas y 2 columnas. Gran parte de lo que haremos a continuación puede ser generalizado a matrices cuadradas más grandes, pero eso escapa al ámbito de este curso.

2.2.7. Producto matriz-vector. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y un vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, definimos el *producto* entre A y $\vec{x}$ como el vector:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

2.2.8. Producto de matrices. Dadas dos matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, definimos el *producto* entre ellas como la matriz:

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

Importante: El producto de matrices **NO** es conmutativo, es decir que no es necesariamente cierto que $AB = BA$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.9. Matriz identidad. Definimos la *matriz identidad* como:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, es aquella matriz que sólo tiene unos en su diagonal y ceros en el resto de sus coeficientes.

Una propiedad importante que satisface la matriz identidad es que es un neutro para el producto, o sea dada cualquier matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se tiene:

$$AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = A.$$

Y es fácil verificar que también $IA = A$.

2.2.10. Inversa de una matriz. No hacemos a continuación, dada una matriz A , la siguiente pregunta:

¿Existe una matriz B tal que $AB = BA = I$?

La respuesta **no** es siempre afirmativa, por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y existiese $B = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}$ tal que $AB = I$, se tendrá:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2w & y + 2z \\ 2x + 4w & 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero mirando las igualdades en las coordenadas $(1, 1)$ y $(2, 1)$:

$$\begin{aligned}x + 2w &= 1 \\2x + 4w &= 0,\end{aligned}$$

y multiplicando la segunda ecuación por $1/2$, nos queda

$$\begin{aligned}x + 2w &= 1 \\x + 2w &= 0.\end{aligned}$$

Y este último par de ecuaciones no tiene solución en x, w , es decir no es posible que exista tal matriz B .

Así, si para una matriz A existe una matriz B tal que $AB = BA = I$, diremos que A es *invertible* y que B es *inversa* de A .

La inversa de una matriz es única. En efecto, supongamos que B_1 y B_2 son inversas de A , entonces $AB_1 = I = AB_2$. Luego,

$$AB_1 - AB_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow A(B_1 - B_2) = \mathbf{0}$$

Multiplicamos la última ecuación por B_1 ,

$$\begin{aligned}A(B_1 - B_2) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow B_1 A(B_1 - B_2) = B_1 \mathbf{0} \\&\Leftrightarrow I(B_1 - B_2) = \mathbf{0} \\&\Leftrightarrow B_1 - B_2 = \mathbf{0} \\&\Leftrightarrow B_1 = B_2.\end{aligned}$$

De esta manera, denotaremos a la inversa de A por A^{-1} .

2.2.11. Algunas propiedades de la inversa. Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ matrices invertibles, se tienen las siguientes propiedades:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(-A)^{-1} = -A^{-1}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.2.12. Determinante de una matriz. A continuación asociaremos a cada matriz un número que será de gran utilidad para encontrar la inversa de una matriz (si esta existe).

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, definimos el *determinante* de A como el número real:

$$\det(A) = ad - bc.$$

2.2.13. Fórmula para la inversa. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **invertible**, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] &= \frac{1}{ad - bc} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] \\&= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Queda como ejercicio verificar que el producto en donde A participa por la derecha, entrega el mismo resultado.

Observación: Es posible probar que el determinante de hecho caracteriza totalmente la invertibilidad de una matriz. Es decir, sabemos que si $\det(A) \neq 0$, la matriz A es invertible (de hecho podemos encontrar A^{-1} de manera explícita); sin embargo también es cierto que:

Si $\det(A) = 0$, entonces **no** existe inversa para A .

2.3. Sistemas lineales

En esta sección veremos una utilidad concreta de las matrices: La resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Un sistema lineal de ecuaciones de 2×2 , es un par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= e \\ cx_1 + dx_2 &= f, \quad \text{con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Decimos que x_1 e x_2 son las *variables* o *incógnitas* del sistema, mientras que a, b, c, d, e y f son los *coeficientes* del sistema. Una *solución* del sistema es un par de valores para x_1 e x_2 , tales que se satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente.

De hecho ya estamos familiarizados con los sistemas lineales, los usamos por ejemplo para encontrar la intersección de dos rectas en el Capítulo 1.

2.3.1. Forma matricial de un sistema lineal. Notemos que un sistema lineal como el anterior, es equivalente a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

En efecto, si desarrollamos el producto a la izquierda de la igualdad, obtenemos

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

y mirando por coordenadas, recuperamos el sistema lineal.

A esta igualdad la llamamos *forma matricial* del sistema lineal. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es llamada *matriz de coeficientes*, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ el *vector de variables* y $\vec{r} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ el *vector lado derecho*.

2.3.2. Resolución de un sistema usando matrices. Consideremos un sistema lineal en su forma matricial,

$$A\vec{x} = \vec{r}.$$

Si la matriz de coeficientes A fuese **invertible**, podríamos premultiplicar a ambos lados de la ecuación por A^{-1} , obteniendo la ecuación equivalente:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} \vec{x} = A^{-1} \vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1} \vec{r}.$$

Es decir, hemos encontrado una solución para el sistema lineal. Pero debemos notar que esta resolución depende fuertemente de que la matriz de coeficientes sea invertible.

Ejemplo:

Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= -1 \\ x_1 - 3x_2 &= 1.\end{aligned}$$

Su forma matricial es $A\vec{x} = \vec{r}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = -7 \neq 0$, luego A es invertible y

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución del sistema está dada por:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{r} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}.$$

Luego $x_1 = -\frac{2}{7}$ y $x_2 = -\frac{3}{7}$.

Bibliografía

- [1] J.E. Thompson *Geometría*, col. Matemáticas al alcance de todos, traducción de la obra original en inglés: “Geometry for a practical man”, D. Van Nostrand Co., New York, Ed. Uthea, México, México, 1961. Fue la fuente del resumen histórico.
- [2] J.J. O’Connor y E.F. Robertson. *The MacTutor History of Mathematics archive*. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/>.
- [3] S. Smoller. *The History of Matrices*. <http://www.ualr.edu/lasmoller/matrices.html>.