Profesor: Rodolfo Carvajal
Auxiliares: Alex Becerra, Mauricio Quezada, Nicolás Gotschlich.

Pauta Pregunta 1 Control #1

(i) Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Sabiendo que el origen es el punto (0 ,0), la circunferencia pedida resulta fácil de calcular, y su ecuación es:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=1^2$$
$$\boxed{x^2+y^2=1}$$

(ii) Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2,3), (2,-1) y (4,1).

Escribiendo la ecuación de una circunferencia de la forma: $x^2+y^2+c\cdot x+d\cdot y+e=0$
Como los tres puntos señalados pertenecen a la circunferencia, cumplen su ecuación y se obtienen las siguientes ecuaciones:

- Al reemplazar (2,3) : $4+9+2\cdot c+3\cdot d+e=0$ (1)
- Al reemplazar (2,-1) : $4+1+2\cdot c-d+e=0$ (2)
- Al reemplazar (4,1) : $16+1+4\cdot c+d+e=0$ (3)

Haciendo (1)+ -1*(2) se obtiene:

$$8+4\cdot d=0$$
$$\boxed{d=-2}$$

Haciendo (3)+ -1*(2) se obtiene:

$$12+2\cdot c+2\cdot d=0$$
$$12+2\cdot c+2\cdot(-2)=0$$
$$2\cdot c=-8$$
$$\boxed{c=-4}$$

Y al reemplazar los valores de c y d en la ecuación (2) se obtiene:

$$4+1+2\cdot(-4)-(-2)+e=0$$
$$5-8+2+e=0$$
$$\boxed{e=1}$$

Por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos pedidos es:

$$\boxed{x^2+y^2-4\cdot x-2\cdot y+1=0}$$

(iii) Las circunferencias descritas arriba se intersectan en dos puntos P y Q. Encuéntrelos.

Para encontrar los puntos se debe hacer un sistema con las ecuaciones de ambas circunferencias, el que resulta:

$$x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 2 \cdot y + 1 = 0 \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

De (2) : $y^2 = 1 - x^2$, reemplazando esta expresión en (1):

$$x^2 + 1 - x^2 - 4 \cdot x - 2 \cdot y + 1 = 0$$
$$-4 \cdot x - 2 \cdot y + 2 = 0$$
$$y = 1 - 2 \cdot x \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$x^2 + (1 - 2 \cdot x)^2 = 1$$
$$x^2 + 1 - 4 \cdot x + 4 \cdot x^2 = 1$$
$$5 \cdot x^2 - 4 \cdot x = 0$$

Aplicando la solución de una ecuación de segundo grado se obtienen dos resultados:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5 \cdot 0}}{2 \cdot 5}$$
$$x = \frac{4 \pm 4}{10}$$
$$\boxed{x_1 = \frac{4+4}{10} = \frac{4}{5}}$$
$$\boxed{x_2 = \frac{4-4}{10} = 0}$$

Reemplazando los valores de x obtenidos en la ecuación (3) se pueden calcular las ordenadas de los puntos de intersección:

$$y_1 = 1 - 2 \cdot x_1 = 1 - 2 \cdot \frac{4}{5}$$
$$\boxed{y_1 = \frac{-3}{5}}$$
$$y_2 = 1 - 2 \cdot x_2 = 1 - 2 \cdot 0$$
$$\boxed{y_2 = 1}$$

Por lo tanto los puntos de intersección son (4/5,-3/5) y (0,1).

(iv) Determine el foco F de la parábola de ecuación $y=-\frac{1}{4}x^2+x-2$

Para obtener el foco de la parábola se debe tener las coordenadas del vértice (x_0,y_0) y el parámetro p, así el foco F es (x_0,y_0+p).

Completando cuadrados se busca llegar a una ecuación de la forma: $(y-y_0)=\frac{1}{4\cdot p}(x-x_0)^2$

Desarrollando la ecuación del enunciado.

$$
\begin{aligned}
&y=-\frac{1}{4}x^2+x-2\\
&-4\cdot y=x^2-4\cdot x+8\\
&-4\cdot y=x^2-4\cdot x+2^2-2^2+8\\
&-4\cdot y=(x-2)^2-4+8\\
&-4\cdot y-4=(x-2)^2\\
&-4\cdot(y+1)=(x-2)^2\\
&\boxed{(y+1)=\frac{-1}{4}(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

De esa ecuación es fácil reconocer que el vértice es (2,-1) y p vale -1; por lo tanto el foco es:

F = (2,-1+-1) = (2,-2)

(v) Establezca la ecuación vectorial de la recta que une los centros de las circunferencias encontradas en las partes (i) y (ii).

El centro de la circunferencia de (i) es el origen (0,0); por lo que solo falta calcular el centro de la circunferencia de (ii), que al completar cuadrados sobre su ecuación se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2-4\cdot x-2\cdot y+1=0\\
&x^2-4\cdot x+y^2-2\cdot y+1=0\\
&x^2-4\cdot x+2^2-2^2+y^2-2\cdot y+1^2-1^2+1=0\\
&(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+1=0\\
&(x-2)^2+(y-1)^2=4
\end{aligned}
$$

De donde es fácil ver que el centro es (2,1).

El vector director de la recta es:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y al tomar uno de los dos puntos se obtiene la recta:

$$\vec{L} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \vec{L} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$