Ecuación de una circunferencia¹

Consideremos la ecuación:

$$ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0.$$

En donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Nuestro objetivo es ver en qué caso podemos reconstruir la ecuación centro-radio de una circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Supongamos que $a, b \neq 0$, lo cual es razonable ya que de lo contrario en la ecuación no habría participación de x^2 o de y^2 , no pudiendo ser una circunferencia. Así, la ecuación puede ser escrita como

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \left(y^2 + \frac{d}{c}y \right) + e = 0.$$

Lo que haremos a continuación es sumar y restar coeficientes necesarios para que las expresiones asociadas a x y a y en la ecuación sean el *cuadrado de un binomio*. Para ello usaremos la siguiente técnica llamada **completación de cuadrados**:

Completación de cuadrados:

Dados $x, A \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 + Ax &= x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Así, nuestra ecuación queda:

$$\begin{aligned} a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \left(y^2 + \frac{d}{c}y + \frac{d^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4c^2} \right) + e &= 0 \\ \Leftrightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c \left(y + \frac{d}{2c} \right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} + \frac{d^2}{4c^2} - e. \end{aligned}$$

Suponemos ahora que $a = c$, para dividir la ecuación por dicho valor (notar que cambiaremos a c por a , para simplificar la escritura):

$$\begin{aligned} \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right) \right)^2 + \left(y - \left(-\frac{d}{2a}\right) \right)^2 &= \frac{b^2}{4a^3} + \frac{d^2}{4a^3} - \frac{e}{a} \\ \Leftrightarrow \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right) \right)^2 + \left(y - \left(-\frac{d}{2a}\right) \right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^3} + \frac{d^2}{4a^3} - \frac{e}{a}} \right)^2. \end{aligned}$$

Notar que el último paso sólo será válido si $\frac{b^2}{4a^3} + \frac{d^2}{4a^3} - \frac{e}{a} \geq 0$. Y listo!, tenemos la ecuación de la circunferencia.

Queda como ejercicio, reconocer el centro y radio de la circunferencia obtenida.

¹Mat. I, Escuela de Verano UChile 2008. Prof.: Rodolfo Carvajal