

P2 GUIA #2 RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

$$1) L_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad L_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

VEAMOS PUNTO POR PUNTO:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: \text{ EN } L_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SE VE SI EL
PUNTO PERTENECE
A LA RECTA, PARA
ALGÚN λ

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 1 &= 0 \\ -\lambda \cdot 1 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \lambda = 0$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ PERTENECE A L_1 , SI $\lambda = 0$

$$\text{EN } L_2: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 + \mu &= 1 \rightarrow \mu = -1 \\ -1 + \mu &= 1 \rightarrow \mu = 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{matrix} \diagup \\ \diagdown \end{matrix} \neq$$

CONTRADICCIÓN.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ NO PERTENECE A L_2

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}: \text{ EN } L_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= 3 \rightarrow \lambda = 2 \\ 1 - \lambda &= 0 \rightarrow \lambda = 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{matrix} \diagup \\ \diagdown \end{matrix} \neq$$

CONTRADICCIÓN

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO PERTENECE A L_1

EN L_2 :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 + m = 3 \rightarrow m = 1$$

$$-1 + m = 0 \rightarrow m = 1$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ PERTENECE A L_2
SI $m = 1$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$: EN L_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$1 + \lambda = -1 \rightarrow \lambda = -2$$

$$1 - \lambda = 3 \rightarrow \lambda = -2$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ PERTENECE A L_1
SI $\lambda = -2$

EN L_2 :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 + m = -1 \rightarrow m = -3$$

$$-1 + m = 3$$

$$m = 4$$

$\Rightarrow$ CONTRADICCIÓN

CONTRADICCIÓN.

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ NO PERTENECE
A L_2

$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ EN L_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$1 + \lambda = -1$$

$$\rightarrow \lambda = -2$$

$$1 - \lambda = -4$$

$$\lambda = 5$$

$\Rightarrow$ CONTRADICCIÓN

CONTRADICCIÓN.

$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ NO

PERTENECE
A L_1

EN L_2 :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-1 = 2 + m \rightarrow m = -3$$

$$-4 = -1 + m \rightarrow m = -3$$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ PERTENECE A L_2

2) RESOLVEMOS EL SISTEMA

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O SEA $1 + \lambda = 2 + m$

$1 - \lambda = -1 + m$

$2 = 1 + 2m$

$1 = 2m \rightarrow$

$\boxed{m = \frac{1}{2}}$

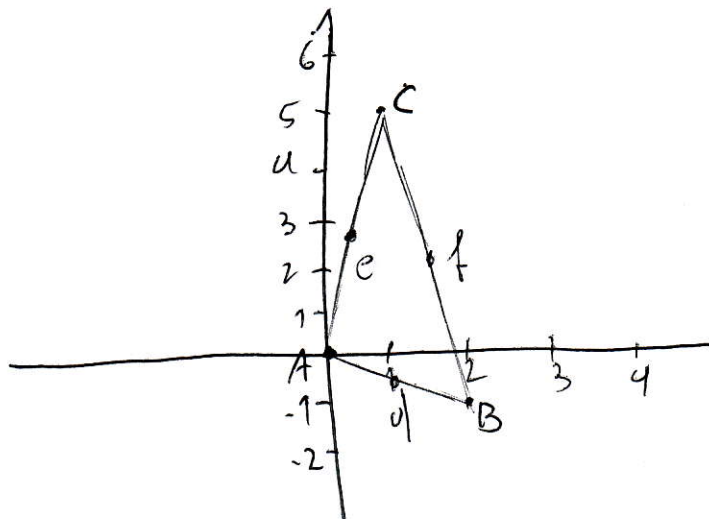
$\lambda = 2 - m = 2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

COORDENADAS

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

P5 $A = (0, 0)$ $B = (2, -1)$ $C = (1, 5)$

1) ECUACIONES VECTORIALES DE LAS RECTAS QUE UNEN LOS VERTICES CON EL PUNTO MEDIO DEL LADO OPUESTO



PUNTOS MEDIOS DE CADA LADO

LADO AB: $\vec{d} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

LADO AC: $\vec{e} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

LADO CB: $\vec{f} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

RECTA QUE UNE $\vec{d}$ con $\vec{e}$: $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$

RECTA QUE UNE $\vec{e}$ con $\vec{f}$: $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

RECTA QUE UNE $\vec{f}$ con $\vec{d}$: $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

2) INTERSECTAMOS $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

O SEA

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{3\lambda_2}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{11\lambda_1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{7\lambda_2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3\lambda_2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow -\frac{6}{2} + \frac{7\lambda_2}{2} = \frac{11\lambda_1}{2}$$

$$11\lambda_1 = 7 \cdot \frac{1}{3} - 6 = \frac{7}{3} - 6 = \frac{7-18}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$\cancel{11}\lambda_1 = -\frac{\cancel{11}}{3}$$

$$\boxed{\lambda_1 = -\frac{1}{3}}$$

REEMPLAZANDO EN CUALQUIER RECTA

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}}}$$

VEAMOS QUE EL PUNTO PERTENECE A LA TERCERA RECTA

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{2} + \lambda_3 \cdot \frac{3}{2} = 1 \rightarrow 3 + 3\lambda_3 = 2$$

$$3\lambda_3 = -1 \rightarrow \boxed{\lambda_3 = -\frac{1}{3}}$$

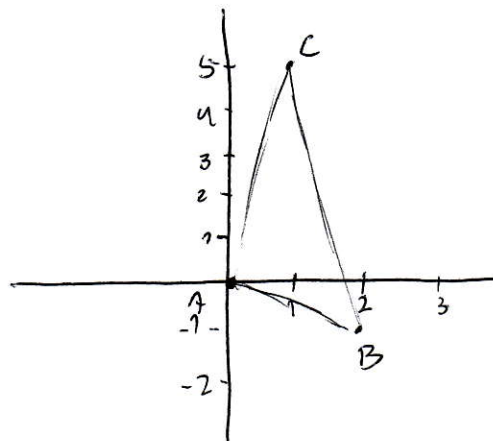
$$2 + \lambda_3 \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

↓

$$1 + \lambda_3 = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{\lambda_3 = -\frac{1}{3}}$$

COMPROBADO!
 $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ PERTENECE
 A LAS
 3 RECTAS

3) VECTORES PERPENDICULARES A CADA LADO



$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CB} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

VECTOR PERPENDICULAR A $\vec{AC}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

// // // $\vec{AB}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

// // // $\vec{CB}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

TOMAMOS ESOS COMO VECTORES DIRECTORES, Y LOS PUNTOS MEDIOS CALCULADOS ANTES COMO VECTORES POSICIÓN:

RECTA PERPENDICULAR A $\vec{AC}$ Y QUE PASA POR SU PUNTO MEDIO

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LO MISMO PARA $\vec{AB}$: $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

LO MISMO PARA $\vec{CB}$: $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) SIMILAR A LA PARTE 2. TOMAMOS $\vec{r}_1$ Y $\vec{r}_2$ Y VEMOS SU INTERSECCIÓN:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} - 5\lambda_1 = 1 + \lambda_2 \quad / \cdot -2 \quad \rightarrow \quad -1 + 10\lambda_1 = -2 - 2\lambda_2$$

$$\frac{5}{2} + \lambda_1 = -\frac{1}{2} + 2\lambda_2$$

SUMAMOS $\frac{3}{2} + 11\lambda_1 = -\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{8}{2} = -11\lambda_1 \quad \boxed{\lambda_1 = -\frac{4}{11}}$

$$\lambda_2 = -5\lambda_1 - \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{4}{11} - \frac{1}{2} = \frac{20}{11} - \frac{1}{2} = \frac{40-11}{22} = \boxed{\frac{29}{22}}$$

PUNTO DE INTERSECCIÓN

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{22} \\ \frac{47}{22} \end{pmatrix}$$

VEAMOS QUE PERTENECE A LA TERCERA RECTA

$$\begin{pmatrix} \frac{51}{22} \\ \frac{47}{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{51}{22} = \frac{3}{2} + 6\lambda_3 \rightarrow \lambda_3 = \frac{3}{22}$$

$$\frac{47}{22} = 2 + \lambda_3 \rightarrow \lambda_3 = \frac{3}{22}$$

✓
COMPROBAMOS
QUE LAS 3
RECTAS
CONCURREN
EN UN PUNTO