Control 1

Prof. Álvaro Núñez   Prof. Aux: Patricio Cubillos
Valeska Valdivia

6 de enero de 2008

Problema 1: Estimaciones

a) Primero estimamos cuanto contiene el lapiz en el tubo.

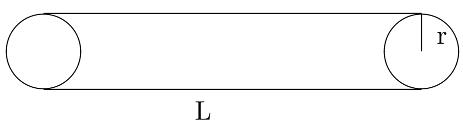

Figura 1: Volumen en el tubo

Nos damos valores del radio y largo de este, y lo escribimos en el mismo sistema de unidades:
L $\approx$ 10 cm = 10^{-1} m
r $\approx$ 2 mm = 2 $\times 10^{-3}$ m

Con lo que el volumen contenido será:

$$V = \pi r^2 \times L \approx 3 \times (2 \times 10^{-3} m)^2 \times 10^{-1} m$$
$$\approx 1{,}2 \times 10^{-6}\ m^3$$

b) El trazo máximo se logra cuando el espesor es el minimo posible (5000 Å), simplificando el problema y considerando que el trazo tiene siempre un ancho, largo y espersor constante, podemos estimar el volumen de tinta, el que debe ser identico al anterior:

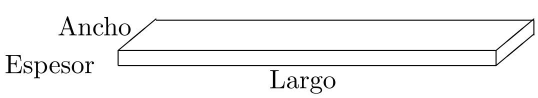

Figura 2: Volumen escrito

Ancho $\approx$ 0.5 mm = 5 $\times$ 10^{-4} m
Espesor $\approx$ 5000 Å = 5 $\times$ 10^{-7} m

El volumen será:

V = Ancho × espesor × Largo

$$\begin{aligned}
\Rightarrow V &= (5\times 10^{-4} m)\times(5\times 10^{-7} m)\times Largo\\
\Rightarrow V &= 2{,}5\times 10^{-10} m^2\times Largo\\
\Rightarrow Largo &\approx \frac{1{,}2\times 10^{-6}\ m^3}{2{,}5\times 10^{-10} m^2}\\
\Rightarrow Largo &\approx 5\times 10^3\ m
\end{aligned}$$

Por lo que el largo máximo será aproximadamente del orden de unos cuantos kilometros.

c) Ahora para un lapiz que rinde unos 2 km:

V = Ancho × espesor × Largo

Ancho ≈ 0.5 mm = 5 × 10^{-4} m

Largo ≈ 3 × 10^3 m

$$\begin{aligned}
\Rightarrow V &= (5\times 10^{-4}\ m)\times(3\times 10^{3}\ m)\times Espesor\\
\Rightarrow V &= 1{,}5 m^2\times Espesor\\
\Rightarrow Espesor &\approx \frac{1{,}2\times 10^{-6}\ m^3}{1{,}5\ m^2}\\
\Rightarrow Espesor &\approx 10^{-6}\ m
\end{aligned}$$

Adi que el espesor del trazo será del orden de 10^{-6} m o unos 10^4 Å.

Problema 2: Movimiento Planetario

Llamaremos H a la distancia que se desvia hacia el sol luego de 1 segundo (H ≪ R).

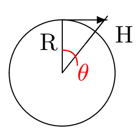

Figura 3: Trayectoria

Como el tiempo es muy corto el angulo que avanza es pequeño, por lo que podemos usar las aproximaciones vistas en clases, veamos primero para la Tierra:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{R_T}{R_T+H}\\
\Rightarrow \cos\theta &= \frac{1}{1+H_T/R_T}\\
\Rightarrow \cos\theta &\approx 1-\frac{H_T}{R_T}
\end{aligned}$$

Y ademas la aproximacion del coseno: $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, resulta:

$$H_T = \frac{R_T \theta^2}{2}$$

Este angulo en un movimiento circunferencial es proporcional al tiempo que ha viajado, con lo que:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{t}{T}$$

con t=1 seg, T=periodo del planeta, asi que:

$$H_T = \frac{2\pi^2 R_T}{(T_T/seg)^2}$$

Asi que solo queda saber cuanto es el periodo en segundos y el valor de 1 unidad astronomica:

$$\begin{aligned}
1 \text{ año} &= 60 \times 60 \times 24 \times 365\, seg \\
&= 900 \cdot 4 \times 24 \times 365\, seg \\
&\approx 1000 \cdot 4 \times \frac{100}{4} \times \frac{1000}{3}\, seg \\
\Rightarrow 1 \text{ año} &\approx 3 \times 10^7\, seg \qquad \text{Resultado exacto 31536000 seg} \\
\\
1 \text{ UA} &= \text{velocidad luz} \times 8 \text{ minutos} \\
&= 3 \times 10^8 m/seg \cdot 8 \times 60\, seg \\
\Rightarrow 1 \text{ UA} &\approx 1{,}5 \times 10^{11}\, m \qquad \text{Resultado exacto } 1.44 \times 10^{11} \text{ m}
\end{aligned}$$

entonces para la Tierra resulta:

$$\begin{aligned}
H_T &\approx \frac{2\pi^2 \cdot 1{,}5 \times 10^{11}\, m}{(3 \times 10^7\, seg/seg)^2} \\
H_T &\approx 3 \times 10^{-3}\, m = 3\, mm \qquad \text{Resultado exacto 2.8 mm}
\end{aligned}$$

Ahora para los otros planetas podemos aprovechar el calculo ya hecho:

$$\begin{aligned}
H_V &= \frac{2\pi^2 R_V}{(T_V/seg)^2} \qquad \text{dividiendo por } \mathrm{H}_T \\
\Rightarrow \frac{H_V}{H_T} &= \left(\frac{R_V}{R_T}\right) \cdot \left(\frac{T_V}{T_T}\right)^{-2} \\
\Rightarrow H_V &= \left(\frac{R_V}{R_T}\right) \cdot \left(\frac{T_V}{T_T}\right)^{-2} \cdot H_T \\
\text{y ademas:} & \\
\Rightarrow H_J &= \left(\frac{R_J}{R_T}\right) \cdot \left(\frac{T_J}{T_T}\right)^{-2} \cdot H_T
\end{aligned}$$

y reemplazando con los datos de la tabla se tiene:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow H_V &\approx (0{,}72)\cdot(0{,}62)^{-2}\cdot 3\,mm\\
&\approx (7/10)\cdot(9/4)\cdot 3\,mm\\
\Rightarrow H_V &\approx 5\,mm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow H_J &\approx (5{,}2)\cdot(11{,}86)^{-2}\cdot 3\,mm\\
&\approx (10/2)\cdot(1/140)\cdot 3\,mm\\
\Rightarrow H_J &\approx 0{,}1\,mm
\end{aligned}
$$

Ahora si queremos verificar que H es proporcional al reciproco de los cuadrados (H $\propto$ R^{-}2), o sea:

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{R_T^2} &= H_T \qquad \text{con k constante, o equivalentemente}\\
\frac{k/R_T^2}{k/R_V^2} &= \frac{H_T}{H_V}\\
\Rightarrow \frac{R_V^2}{R_T^2} &= \left(\frac{R_T}{R_V}\right)\cdot\left(\frac{T_T}{T_V}\right)^{-2}\\
\Rightarrow 1 &= \left(\frac{R_T}{R_V}\right)^3\cdot\left(\frac{T_T}{T_V}\right)^{-2} \qquad \text{de igual manera se debe cumplir para Jupiter}
\end{aligned}
$$

Reemplazando los valores para Venus:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{R_T}{R_V}\right)^3\cdot\left(\frac{T_T}{T_V}\right)^{-2} &= \left(\frac{1}{0{,}7}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{0{,}6}\right)^{-2}\\
&= \left(\frac{1000}{50\cdot 7}\right)\cdot\left(\frac{4}{10}\right)\\
&= \frac{2\cdot 4}{7}\approx 1 \qquad \text{si parece cumplir la relacion, valor exacto 0,98}
\end{aligned}
$$

ahora con Jupiter:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{R_T}{R_J}\right)^3\cdot\left(\frac{T_T}{T_J}\right)^{-2} &= \left(\frac{1}{5{,}2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{-2}\\
&= \left(\frac{1}{25\cdot 5{,}2}\right)\cdot\left(\frac{140}{1}\right)\\
&= \frac{140}{130}\approx 1 \qquad \text{tambien se acerca, valor exacto 1,001}
\end{aligned}
$$

Problema 3: Esfera en cuneta

Esta es una forma de resolverlo, por supuesto existen otros caminos igual de validos.

la altura H la mediremos desde el suelo hasta el centro de la circunferencia(C)+ desde C hasta el tope:

Figura 4:

fijandose en el poligono ABCD:
es recto en B y en D, $\overline{AC}$ es bisectriz y $\overline{BC} = \overline{CD} =$ R. Entonces

$$\begin{aligned} & \measuredangle BCD = \alpha + \beta \\ \Rightarrow \quad & \measuredangle ACB = (\alpha + \beta)/2 \\ \Rightarrow \quad & R = \overline{AC} \cos((\alpha + \beta)/2) \end{aligned}$$

Viendo ahora el triangulo ACE:

$$\begin{aligned} & \measuredangle CAD = \pi - \pi/2 - (\alpha + \beta)/2 \\ \Rightarrow \quad & \measuredangle ACE = \measuredangle CAD + \beta \\ \Rightarrow \quad & \measuredangle ACE = \pi/2 - (\alpha - \beta)/2 \\ \Rightarrow \quad & \overline{CE} = \overline{AC} \sin(\pi/2 - (\alpha - \beta)/2) \\ \Rightarrow \quad & \overline{CE} = \overline{AC} \cos((\alpha - \beta)/2) \\ \Rightarrow \quad & \overline{CE} = R \frac{\cos((\alpha - \beta)/2)}{\cos((\alpha + \beta)/2)} \end{aligned}$$

la altura restante por sobre eso es simplemente R, con lo que se obtiene:

$$H = R \left[1 + \frac{\cos((\alpha - \beta)/2)}{\cos((\alpha + \beta)/2)} \right]$$