

Apéndice del curso Matemáticas III: Función Exponencial y Logaritmo

Extracto tutorías Introducción al Cálculo

15 de enero de 2008

Introducción

Recuerdo

Sabemos lo siguiente para la sucesión

$$a_n = (1 + h_n)^n$$

- 1 Si $\lim h_n \in (-2, 0)$ entonces $\lim a_n = 0$.
- 2 Si $\lim h_n \notin [-2, 0]$ entonces $\lim a_n$ no existe.
- 3 Si $\lim h_n = 0$ y $\lim nh_n = 0$ entonces $\lim a_n = 1$.
- 4 Si $\lim h_n = 0$, $h_n < 0$ y $\lim \frac{1}{nh_n} = 0$ entonces $\lim a_n = 0$.
- 5 Si $\lim h_n = 0$, $h_n > 0$ y $\lim \frac{1}{nh_n} = 0$ entonces $\lim a_n$ no existe.
- 6 $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, donde e es un número mayor que 2 y menor que 4.

Esta semana

Ahora veremos que usando un argumento similar al utilizado para $h_n = \frac{1}{n}$, es posible probar que para $x \in \mathbb{R}$ la sucesión $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ es convergente.

Definición.

La función exponencial

Definición

La función exponencial está definida mediante la expresión:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Proposición

El dominio de la función exponencial es $\mathbb{R}$.

Demostración

Veremos que la sucesión $\left(s_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$ es creciente a partir de $n_0 = \lceil -x \rceil + 1$ y acotada superiormente. En virtud del Teorema de las Sucesiones Monótonas, la sucesión $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge a $\sup \{s_n : n \geq n_0\}$.

Definición.

La sucesión (s_n) es creciente.

(s_n) es creciente

La demostración hace uso de las siguientes afirmaciones que son fáciles de verificar.

$$\frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)} = \frac{n}{(n+x)} \frac{(n+1+x)}{(n+1)} = \frac{(n+x)}{(n+x)} \frac{(n+1)-x}{(n+1)} = 1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}. \quad (1)$$

y

$$\frac{x}{(n+1)(n+x)} = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+x}\right) < \frac{1}{n+1} < 1, \text{ para } n+x > 0 \quad (2)$$

Para probar que (s_n) es creciente a partir de $n_0 = [| -x |] + 1$ veremos que $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq 1$, para $n \geq n_0$.

Al reemplazar los valores de s_{n+1} y de s_n en $\frac{s_{n+1}}{s_n}$ y aplicar (1) se obtiene.

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \left(\frac{n+x}{n}\right).$$

Aplicando la desigualdad de Bernoulli (I) para $h = -\frac{x}{(n+1)(n+x)}$, que según (2) es > -1 , se obtiene

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \left(\frac{n+x}{n}\right) = 1.$$

Definición.

La sucesión (s_n) es acotada superiormente.

(s_n) es acotada superiormente

Como ya hemos dicho, basta con probar que existen M y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$s_n \leq M.$$

Dado $x \in \mathbb{R}$ sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\left|\frac{x}{kn}\right| < \frac{1}{n}$, es decir, $\frac{x}{kn} \in (-1, \frac{1}{n})$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli (III) para $u = \frac{x}{kn}$ tenemos que

$$\left(1 + \frac{x}{kn}\right)^n \leq \frac{1}{1 - n\frac{x}{kn}} = \left(\frac{k}{k-x}\right).$$

Ya vimos que la sucesión es creciente a partir de $n_0 = [| -x |] + 1$. Entonces, para $n \geq n_0$, $s_n \leq s_{kn}$. Tomando $M = \left(\frac{k}{k-x}\right)^k$ concluimos que para $n \geq n_0$

$$s_n \leq s_{kn} = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn} \leq \left(\frac{k}{k-x}\right)^k.$$

Definición.**Producto de exponenciales****Proposición**

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Demostración

Como $1 + \frac{x+y}{n} = \frac{n+x+y}{n}$, $1 + \frac{x}{n} = \frac{n+x}{n}$ y $1 + \frac{y}{n} = \frac{n+y}{n}$ se tiene que

$$\frac{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+x+y)}{(n+x)(n+y)}\right)^n = \left(1 - \frac{xy}{(n+x)(n+y)}\right)^n \rightarrow 1.$$

La igualdad se obtiene mediante manipulaciones algebraicas y la convergencia que ya fue analizada la semana anterior. En el lado izquierdo podemos aplicar álgebra de límites para concluir que

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(x) \exp(y)} = 1.$$

Definición.**Acotamiento y Ceros****Proposición**

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) > 0.$$

En consecuencia la función exponencial es acotada inferiormente y no tiene ceros. Además,

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$

Demostración

Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$. Si $\exp(a) = 0$, para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces se obtiene la siguiente contradicción:

$$1 = \exp(0) = \exp(a) \exp(-a) = 0.$$

- La igualdad $\exp(x) \exp(-x) = \exp(0) = 1$ implica $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.
- La igualdad previa permite usar el producto de exponenciales convenientemente para obtener la conclusión:

$$\exp(x - y) = \exp(x) \exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Definición.**Desigualdad Fundamental****Proposición**

La función exponencial satisface lo siguiente.

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

Para todo $x < 1$,

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Demostración

La sucesión (s_n) es creciente a partir de $n_0 > |x|$ y converge a $\exp(x)$. Entonces

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n_0}\right)^{n_0}.$$

Además, $\frac{x}{n_0} > -1$. Entonces

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n_0}\right)^{n_0} \geq 1 + n_0 \frac{x}{n_0} = 1 + x.$$

Como $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$, para $x < 1$ se tiene que:

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Definición.**Propiedades****Proposición**

Sea $(a_n) \rightarrow a$. Entonces

$$\lim \exp(a_n) = \exp(a).$$

Demostración

Primero consideremos el caso $a = 0$. Usando las desigualdades fundamentales se obtiene el siguiente acotamiento:

$$1 + a_n \leq \exp(a_n) \leq \frac{1}{1 - a_n}.$$

Por álgebra de límites los extremos convergen a 1. Por el Teorema del Sandwich $\lim \exp(a_n) = 1 = \exp(0)$. Para $a \neq 0$, la multiplicación de exponenciales y lo ya visto, aplicado a $(a_n - a)$, implican:

$$\lim \exp(a_n) = \lim (\exp(a_n - a) \exp(a)) = \lim \exp(a_n - a) \lim \exp(a) = \exp(a).$$

Ejemplos

De lo anterior concluimos, en especial, que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\lim \exp\left(\frac{x}{n}\right) = 1.$$

Definición.**Propiedades****Proposición**

Sea $(a_n) \rightarrow 0$, $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim \frac{\exp(a_n) - 1}{a_n} = 1.$$

Demostración

Con las desigualdades fundamentales se obtiene el siguiente acotamiento:

$$a_n = 1 + a_n - 1 \leq \exp(a_n) - 1 \leq \frac{1}{1 - a_n} - 1 = \frac{a_n}{1 - a_n}.$$

Para $a_n > 0$ se obtiene

$$1 \leq \frac{\exp(a_n) - 1}{a_n} \leq \frac{1}{1 - a_n}.$$

Para $a_n < 0$ se obtiene

$$\frac{1}{1 - a_n} \leq \frac{\exp(a_n) - 1}{a_n} \leq 1.$$

Entonces, para $a_n \neq 0$ se obtiene

$$\frac{1}{1 + |a_n|} \leq \frac{\exp(a_n) - 1}{a_n} \leq \frac{1}{1 - |a_n|}.$$

Por álgebra de límites los extremos convergen a 1. Por el Teorema del Sandwich $\lim \frac{\exp(a_n) - 1}{a_n} = 1$.

Definición.**Crecimiento e Inyectividad****Proposición**

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y).$$

En consecuencia la función exponencial es estrictamente creciente.

Demostración

Usando el producto de exponenciales y la desigualdad $\exp(y - x) \geq 1 + y - x$, se obtiene:

$$\exp(y) = \exp(x) \exp(y - x) \geq \exp(x) (1 + y - x) > \exp(x).$$

Consecuencias

■ La función exponencial es inyectiva.

■ Para todo $x > 0$,

$$\exp(x) > \exp(0) = 1.$$

■ Para todo $x < 0$,

$$\exp(x) < \exp(0) = 1.$$

Definición.**Función exponencial y exponentes****Propiedad**

Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ y si $n > 0$, $\exp\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)}$.

Demostración

El producto de exponenciales permite probar

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\exp(nx) = \exp(x + \cdots + x) = (\exp(x))^n$
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, se tiene que $(\exp(x))^{\frac{1}{n}} = (\exp(n \cdot \frac{x}{n}))^{\frac{1}{n}} = \left((\exp(\frac{x}{n}))^n\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$.

Consecuencias

- Para todo $x < 0$, $\exp(x) < 1$. Entonces,

$$\lim \exp(nx) = \lim (\exp(x))^n = 0.$$

Definición.

Biyectividad

Proposición

La función $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es sobreyectiva.

Demostración

Para $y > 0$ sean

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \exp(x) \leq y\} \text{ y } s = \sup A.$$

(1) A es no vacío: como $\lim \exp(-n) = 0$, sabemos que existe n tal que $\exp(-n) < y$. Entonces, $-n \in A$.

(2) A tiene cota superior: como $\lim \exp(-n) = 0$, sabemos que existe m tal que $\exp(-m) < \frac{1}{y}$. Si $x > m$ entonces $\exp(x) > \exp(m) > y$, es decir, $x \notin A$. Por lo tanto, m es cota superior de A .

De (1) y (2) concluimos que A tiene supremo s .

Veamos ahora que $\exp(s) = y$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

$s + \frac{1}{n}$ no pertenece a A ya que es mayor que s . Con esto $\exp(s + \frac{1}{n}) > y$.

$s - \frac{1}{n}$ no es cota superior de A ya que es menor que s . Con esto existe $x \in \mathbb{R}$ con $s - \frac{1}{n} < x$ y $\exp(x) \leq y$.

Por la monotonía de la función exponencial, $\exp(s - \frac{1}{n}) < y$.

Haciendo uso del producto de exponenciales se obtiene el siguiente acotamiento.

$$\exp(s) \exp\left(-\frac{1}{n}\right) = \exp\left(s - \frac{1}{n}\right) < y < \exp\left(s + \frac{1}{n}\right) = \exp(s) \exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

Sabemos que $\lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \exp\left(-\frac{1}{n}\right) = 1$. Aplicando el Teorema del Sandwich se concluye que $\exp(s) = y$.

Definición de Logaritmo natural.

Definición

La función $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es inyectiva y sobreyectiva en consecuencia biyectiva. Su función inversa se llama función logaritmo natural o de Nepper.

$$\begin{aligned} \ln : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \ln(x) = \exp^{-1}(x). \end{aligned}$$

Observaciones

- Para todo $x \in (0, \infty)$, $\exp(\ln(x)) = x$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$. En particular, $\ln(e) = 1$ y $\ln(1) = 0$.
- La función $\ln$ es estrictamente creciente pues es la inversa de una función estrictamente creciente.
- El único cero de la función $\ln$ es 1 .
- $\ln$ no es acotada ni superior ni inferiormente: $\ln(0, \infty) = \mathbb{R}$.

Suma y diferencia de logaritmos

Proposición

 $\forall x, y \in (0, \infty),$

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy) \text{ y } \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Demostración

Sean $u = \ln(x)$ y $v = \ln(y)$. Al aplicar el producto de exponenciales:

$$\ln(x) + \ln(y) = u + v = \ln(\exp(u + v)) = \ln(\exp(u) \exp(v)) = \ln(xy).$$

Del mismo modo

$$\ln(x) - \ln(y) = u - v = \ln(\exp(u - v)) = \ln\left(\frac{\exp(u)}{\exp(v)}\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Observación

Se obtiene que

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x).$$

Desigualdad Fundamental

Proposición

La función logaritmo natural satisface las siguientes desigualdades.

Para todo $x \in (0, \infty)$,

$$\ln(x) \leq x - 1$$

y

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x).$$

Demostración

La primera es directa al tomar $x = \exp(u)$ y aplicar la desigualdad $1 + u \leq \exp(u)$.

La segunda se obtiene de la primera al evaluar $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$ y recordar que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

Propiedades

Proposición

Sea $(a_n) \rightarrow a > 0$ entonces

$$\lim \ln(a_n) = \ln(a).$$

Demostración

Primero consideremos el caso $a = 1$. Usando las desigualdades fundamentales se obtiene el siguiente acotamiento:

$$1 - \frac{1}{a_n} \leq \ln(a_n) \leq a_n - 1.$$

Por álgebra de límites los extremos convergen a 0. Por el Teorema del Sandwich $\lim \ln(a_n) = 0 = \ln(1)$. Para $a \neq 1$ se aplica la suma de logaritmos y lo ya visto a la sucesión $(\frac{a_n}{a})$, y se obtiene

$$\lim \ln(a_n) = \lim \ln\left(\frac{a_n}{a} \cdot a\right) = \lim \left(\ln\left(\frac{a_n}{a}\right) + \ln(a)\right) = \ln(a).$$

Ejemplos

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = 0.$$

$$\lim \ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = 0$$

Propiedades

Proposición

Sea $(a_n) \rightarrow 0$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1.$$

Demostración

Usando las desigualdades fundamentales se obtiene el siguiente acotamiento:

$$\frac{a_n}{1 + a_n} = 1 - \frac{1}{1 + a_n} \leq \ln(1 + a_n) \leq 1 + a_n - 1 = a_n.$$

Para $a_n > 0$ se obtiene

$$\frac{1}{1 + a_n} \leq \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \leq 1.$$

Para $a_n < 0$ se obtiene

$$1 \leq \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \leq \frac{1}{1 + a_n}.$$

Entonces, para $a_n \neq 0$ se obtiene

$$\frac{1}{1 + |a_n|} \leq \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \leq \frac{1}{1 - |a_n|}.$$

Por álgebra de límites los extremos convergen a 1. Por el Teorema del Sandwich $\lim \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$.

Definición de exponente irracional.

Definición

Sean $a \in (0, \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define

$$a^\alpha = \exp(\alpha \ln a).$$

Consistencia

Como $\exp(n \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^n = a^n$ y $\exp\left(\frac{\ln(a)}{n}\right) = (\exp(\ln(a)))^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$, la definición extiende a $\mathbb{R}$ el significado que habíamos asignado anteriormente a a^α , cuando $\alpha = \pm n$ o $\alpha = \pm \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

Observación

Las siguientes propiedades son consecuencia directa de la definición de a^α .

- 1 $\forall a \in (0, \infty)$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$.
- 2 Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$.
- 3 Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a^\alpha)^{-1} = a^{-\alpha}$.
- 4 Para todo $\alpha, x \in \mathbb{R}$, $(\exp(x))^\alpha = \exp(\alpha x)$, en particular $\exp(\alpha) = e^\alpha$.
- 5 Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Ejemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = 0$$

Función a^x

Definición

Para $a > 0$ se define la función a^x por la fórmula

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Propiedades

- 1 Su dominio es $\mathbb{R}$.
- 2 Para $a > 0$ y $a \neq 1$, la función a^x es estrictamente monótona, en particular es inyectiva.
 - Para $a \in (0, 1)$, $\ln(a) < 0$. Entonces la función a^x es estrictamente decreciente.
 - Para $a > 1$, $\ln(a) > 0$. Entonces la función a^x es estrictamente creciente.
- 3 La función $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es biyectiva: para todo $y \in (0, \infty)$, $x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ satisface que $a^x = y$.

Logaritmos con base $a > 0$, $a \neq 1$.

Definición

Sea $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$. Se define la función logaritmo en base a por:

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Observación

La función $\log_a$ es estrictamente creciente si $a > 1$.

La función $\log_a$ es estrictamente decreciente si $a \in (0, 1)$.

La función $\log_a$ es la inversa de la función a^x .

Observación

Para cualquier $(x_n) \rightarrow x > 0$ se tiene que

$$\log(x_n) = \frac{\ln(x_n)}{\ln(a)} \rightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \log_a(x).$$

Función Logaritmo natural.

Logaritmos con base $a > 0$, $a \neq 1$.

Propiedades

- (Suma de Logaritmos) Para todo $x, y, a \in (0, \infty)$ y $a \neq 1$ se cumple que $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$.
- (Cambio de base) Para todo $x, a, b \in (0, \infty)$ y $a, b \neq 1$ se cumple que $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Demostración

En el primer caso es suficiente con recordar la definición de $\log_a$ y usar la suma de logaritmos naturales:

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y).$$

En el segundo caso, usamos que:

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \frac{1}{\frac{\ln(b)}{\ln(a)}} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Resumen

Definición

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones. Decimos que (a_n) es *significativamente menor que* (b_n) , y lo denotamos por $(a_n) \in o(b_n)$ o $a_n = o(b_n)$, si

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Observación

Note que una sucesión (a_n) es nula si y sólo si $a_n = o(1)$.

Resumen

Usando la notación $o(\cdot)$, podemos resumir lo que sabemos de las sucesiones más comunes.

- $\ln^\alpha(n) = o(\ln^\beta(n))$, $\alpha < \beta$. En particular, $\ln^\alpha(n) = o(1)$, $\alpha < 0$.
- $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$.
- $n^\alpha = o(n^\beta)$, para $\alpha < \beta$. En particular, $n^\alpha = o(1)$, $\alpha < 0$.
- $n^\alpha = o(a^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a > 1$.
- $a^n = o(b^n)$, para todo $0 < a < b$.
- $a^n = o(n!)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $n! = o(n^n)$.