

Control 2
Matemáticas III

VIERNES 12 DE ENERO

Profesor : Pablo Dartnell R.

Auxiliares: Roberto Cortez - Manuel Larenas - Orlando Rivera

(P1) Demuestre usando inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

- (a) $7^n + 5$ es divisible por 6
- (b) $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24
- (c) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

(P2) Sea \mathcal{U} un universo, si $A \subseteq \mathcal{U}$ se define $\varphi_A : \mathcal{U} \longrightarrow \{0, 1\}$ por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

- (a) Calcule $\varphi_\emptyset(x)$, $\varphi_{\mathcal{U}}(x)$, $\forall x \in \mathcal{U}$
- (b) Mostrar que $(\forall x \in \mathcal{U}) \quad \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x) = \varphi_{A \cap B}(x)$
- (c) Probar que $(\forall A, B \subseteq \mathcal{U}) : \quad \varphi_A = \varphi_B \Rightarrow A = B$

Denotamos $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathcal{U} \longrightarrow \{0, 1\} \text{ es función}\}$

- (d) Muestre que $(\forall f \in \mathcal{F})(\exists A \subseteq \mathcal{U})$ tal que $f = \varphi_A$

Se define

$$\begin{array}{ccc} \Gamma : \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ A & \longrightarrow & \varphi_A \end{array}$$

- (e) Pruebe que Γ es biyección.

(P3) (a) Sea A acotado y no vacío tal que $s = \sup(A)$ y sea $B = \{x + 2 \mid x \in A\}$.
Pruebe que existe $t = \sup B$ y que $t = s + 2$.

(b) Sean A, B cjtos. con supremo. Se define $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$.
Mostrar que existe $s = \sup(A + B)$ y que $s = \sup(A) + \sup(B)$.

Tiempo: 3 horas