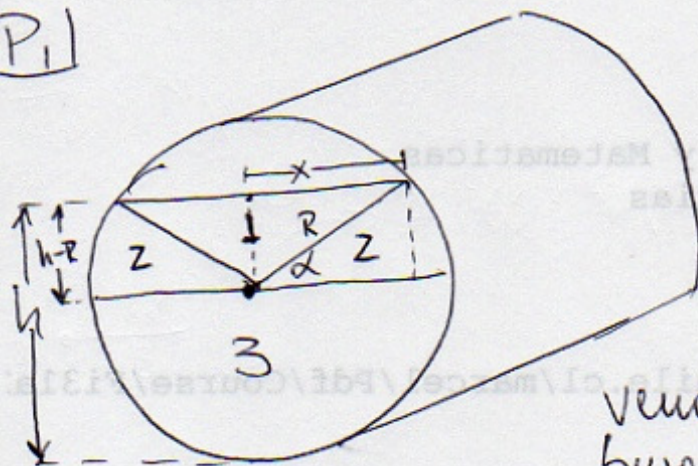


Control 1:

P1)



Para calcular el volumen, vamos a ver el área de la superficie comprendida por el agua en uno de los tapas del cilindro, y luego esto lo vamos a multiplicar por h que vendría siendo la profundidad en el dibujo. Es decir, el volumen será $A \cdot h$, donde

el área A se calculará como la suma de las áreas A_1 , A_2 y A_3 .

Empecemos por lo más sencilla:

A_3 Corresponde al área de un semicírculo, luego si tenemos la fórmula indicada para este cálculo, tenemos:

$$A_3 = \frac{\pi R^2}{2}$$

A_1 Este es el área de un triángulo, que usando la fórmula $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ y usando la notación de la figura, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{base} = 2x \\ \text{altura} = (h-R) \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = \frac{2x(h-R)}{2} = x(h-R)$$

¿Cómo se calcula x ? Usamos el teorema de Pitágoras para un triángulo chiquitito correspondiente a la mitad del triángulo:

$$\begin{aligned} (h-R)^2 + x^2 &= R^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - (h-R)^2 \\ x^2 &= R^2 - h^2 + 2hR - R^2 \\ \Rightarrow x &= \sqrt{2Rh - h^2} \end{aligned}$$

Luego reemplazando esto, tenemos:

$$A_1 = (h-R)\sqrt{2Rh - h^2}$$

A₂ Ahora para calcular esto "sólo" hacemos uso de la fórmula para el área de un sector circular

$$A_2 = \frac{\alpha R^2}{2} \quad \left[\text{Ojo! en esta definición el ángulo se encuentra en radianes, y en este curso los usamos} \right]$$

Ahora falta conocer el valor de α (que en ninguna parte del enunciado nos lo dan como dato), pero esto, usamos la definición del seno para este ángulo $\text{sen } \alpha = \frac{h-R}{R}$

Ojo! aquí no hemos despejado el valor de α , sino el de sen α , para despejar el valor de α usamos las llamadas: funciones inversas

$$\Rightarrow \alpha = \arcsen\left(\frac{h-R}{R}\right)$$

Luego $A_2 = \frac{R^2}{2} \arcsen\left(\frac{h-R}{R}\right)$

• Entonces, resumiendo tenemos: $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$\Rightarrow A = (h-R)\sqrt{2Rh-h^2} + \frac{R^2}{2} \arcsen\left(\frac{h-R}{R}\right) + \frac{\pi R^2}{2}$$

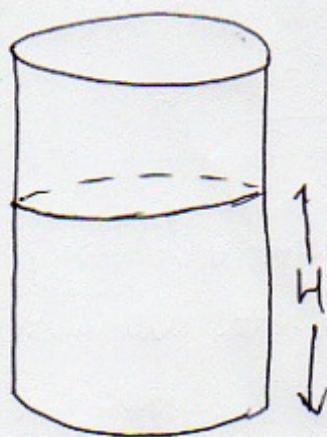
luego el volumen es: $V = A \cdot h$

$$\Rightarrow \boxed{V = h \left[(h-R)\sqrt{2Rh-h^2} + \frac{R^2}{2} \arcsen\left(\frac{h-R}{R}\right) + \frac{\pi R^2}{2} \right]}$$

Este volumen representa el volumen que ocupa el líquido dentro del cilindro.

Ahora vemos el otro caso, en que el cilindro se pone en posición vertical

Nueva posición:



Se busca calcular la nueva altura H .
Vemos qué volumen ocupa ahora el líquido, pero esto usamos la fórmula de volumen de un cilindro

$$V' = A \cdot H \Rightarrow \boxed{V' = \pi R^2 H}$$

Ahora, como es el mismo líquido y la misma cantidad que en el primer caso, ambos volúmenes deben ser iguales, por ende:

$$V = V' \Rightarrow h \left[(h-R) \sqrt{2Rh-h^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin\left(\frac{h-R}{R}\right) + \frac{\pi R^2}{2} \right] = \pi R^2 H$$

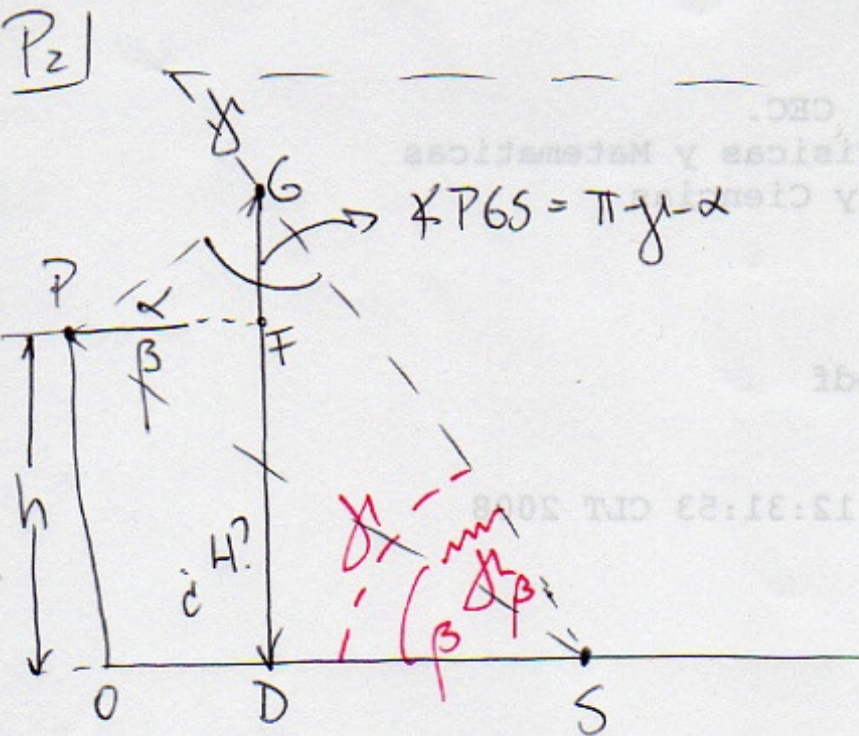
Despejo H :

$$\boxed{H = \frac{h}{\pi R^2} \left[(h-R) \sqrt{2Rh-h^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin\left(\frac{h-R}{R}\right) + \frac{\pi R^2}{2} \right]}$$

Comentarios: El objetivo era medir su capacidad de calcular áreas (y volúmenes) que a la vista parecen complicados, pero que en general pueden ser vistas como sumas de áreas más pequeñas y más manejables (es decir, áreas que se pueden calcular más fácil). Ahora bien, en este caso los cálculos no eran muy sencillos (sencillos) y requerían de trabajo algebraico.

El detalle de despejar el ángulo α no era necesario, bastaba con encontrar una expresión para su valor y de ahí en adelante trabajar con él como si fuera conocido.

Control 1



Primero notemos que ángulos se repiten en la figura, éstos se dibujan con rojo en la figura.

Con estos ángulos se pueden obtener algunos lados. Por ejemplo, si explicamos la definición del seno del ángulo β en el triángulo $\triangle POS$ tenemos:

$$\text{sen } \beta = \frac{OP}{PS} = \frac{h}{PS} \Rightarrow \boxed{PS = \frac{h}{\text{sen } \beta}}$$

Ahora usamos el teorema del seno en el triángulo $\triangle PGS$:

$$\frac{PS}{\text{sen } \angle PGS} = \frac{GS}{\text{sen } \angle GPS} \Rightarrow \frac{\frac{h}{\text{sen } \beta}}{\text{sen}(\pi - \gamma - \alpha)} = \frac{GS}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \Rightarrow \boxed{GS = \frac{h \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen } \beta \text{ sen}(\pi - \gamma - \alpha)}}$$

Ahora usamos la identidad $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen } \theta$, entonces lo anterior queda como:

$$GS = \frac{h \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen } \beta \text{ sen}(\alpha + \gamma)}$$

Ahora, explicamos la definición del seno para el ángulo $\angle GSO$, entonces:

$$\text{sen } \angle GSO = \frac{GD}{GS} \Rightarrow GD = GS \cdot \text{sen } \angle GSO$$

Reemplazamos los datos:

$$\boxed{H = \frac{h \text{ sen}(\alpha + \beta) \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \beta \text{ sen}(\alpha + \gamma)}} //$$

Note: Esto es sólo una forma de tanteos para llegar al resultado, en vez de esto una alternativa era calcular PG , y calcular el triángulo GF para luego sumárselo a h .