Física I Vía Internet 2008
Profesor: Nelson Zamorano
Profesores Auxiliares: Fernando Becerra, Francisco Gutiérrez, Jacob Saravia
Tarea 1.4
2 de Junio

GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ESTIMACIONES

::Fecha de entrega
Lunes 9 de Junio

::Objetivos
:: Familiarizarse con el uso de coordenadas cartesianas.
:: Utilizar funciones de rectas y parábolas, deduciendo algunas de sus propiedades principales.
:: Entender el contexto en el que es válido una aproximación y explorar su rango de validez.
:: Utilizar aproximaciones numéricas para estimar raíces y expresiones matemáticas.

::Contenidos
1. Rectas y parábolas.
2. Calculo de raíces.
3. Aproximaciones numéricas.
4. Análisis dimensional.

Instrucciones Generales

Es muy recomendable que Ud. visite los siguientes links, pues le serán de gran ayuda para reforzar los conocimientos que requiere para abordar los problemas propuestos:

- http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/4.4.html
- http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/4.5.html
- http://mate-alceda.blogspot.com/2008/04/funcin-cuadrtica-la-parbola.html

Se recomienda además la lectura de textos de Matemática de nivel introductorio que tenga a su alcance, el capítulo VIII "*Complemento Matemático*" del libro Introducción a la Mecánica del Profesor Nelson Zamorano, y material que encuentre en Internet, en caso que lo estime necesario, para dominar a cabalidad los temas de esta parte del curso.

Si tiene alguna inquietud o algo no le queda claro, no dude en plantear sus consultas en el foro del curso, o directamente al profesor auxiliar durante la hora de Chat.

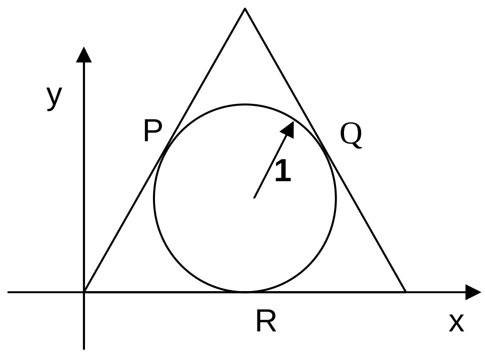
Una vez finalizada su lectura, trabaje en los problemas que siguen. Indique claramente cómo los resolvió, además de sus desarrollos y cálculos intermedios. Adjunte todo en un directorio en el módulo *Tareas*, de la página del curso, de preferencia escaneando sus hojas de resolución y generando documentos de formato *doc* (Microsoft Word) o *pdf* (Adobe Acrobat Reader).

PROBLEMA # 1

1. Dados dos puntos **P(2, -3)** y **Q(1, 5)**, en el sistema cartesiano XY:

a) Calcule la distancia entre ellos. Interprete geométricamente su resultado.
b) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos. Interprete geométricamente.
c) Escriba la ecuación de una recta perpendicular a **PQ** y que pase por el origen.

La figura representa un triángulo equilátero formado por tres rectas que se intersectan en cada vértice, con uno de ellos siendo el origen del sistema de coordenadas. Además, hay una circunferencia de radio unitario inscrita en él.



d) Encuentre la ecuación de cada una de las rectas.
e) Determine la ecuación de la circunferencia.
f) Encuentre la ecuación de la parábola que pasa por los puntos P, Q y R.

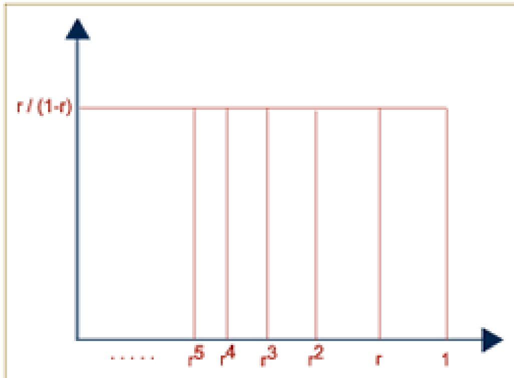
2. Si decidiera lanzar una piedra con cierta inclinación respecto al suelo, debido al efecto de la gravedad este proyectil tendrá una trayectoria particular, que quedará descrito por la siguiente función, considerando como origen el punto de lanzamiento: $\mathbf{y_L = ax^2 + bx + c}$, con a < 0.

a) Considere una parábola que satisface la ecuación $\mathbf{y_L}$, levantando la restricción que “a” sea negativo. Grafique diferentes casos para esta función, estudiando el signo de cada uno de los parámetros (positivo, negativo, igual a cero) y estudie otros casos que considere que sean relevantes para analizar. Explique brevemente sus conclusiones respecto a concavidades, simetrías y otros factores relevantes.

b) A partir de la ecuación para $\mathbf{y_L}$, en el caso **a < 0**, determine analíticamente el punto máximo al cual puede llegar la piedra a lo largo del eje vertical (eje y).

PROBLEMA # 2

1. El rectángulo de la figura tiene una altura igual a $\mathbf{\frac{r}{1-r}}$, con **$0 < r < 1$**, y una base de largo unitario. Considere la subdivisión del rectángulo original en franjas, como se indica en la figura. Utilice esta división para calcular el área del rectángulo de dos modos diferentes y demostrar que se cumple la siguiente igualdad: $\frac{1}{1-r} = 1 + r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots$



2. Haciendo uso de la aproximación matemática que nos dice que: $\mathbf{(1+x)^R \approx 1+Rx}$, válida para ***x* << 1** y cualquier exponente real **R**, es posible calcular muchas expresiones matemáticas que no tienen un valor trivial a simple vista, por ejemplo raíces:

$$\sqrt{102} = \sqrt{100+2} = \sqrt{100\left(1+\frac{2}{100}\right)} = \sqrt{100}\sqrt{1+\frac{2}{100}} = 10\left(1+\frac{2}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Notamos que ahora se satisface la condición del teorema (x << 1), por lo que podemos usar la aproximación:

$$\sqrt{102} = 10\left(1+\frac{2}{100}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 10\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{100}\right) = 10(1+0.01) = 10\cdot 1.01 = 10.1$$

Usando una calculadora, obtenemos que: $\sqrt{102} = 10.0995$.

Inspirándose en el método anterior, se le pide calcular en forma aproximada y <u>sin usar calculadora</u> las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{179}$ b) $\frac{1}{\pi}$ c) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{1}{\sqrt{60.5}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[5]{\pi}}$ f) $\frac{\sqrt[7]{0.18}}{\sqrt[3]{0.0019}}$

3. Examinando el círculo unitario (que se introdujo en la tarea 1.2), ¿qué puede concluir respecto a los valores de sen(α) y cos(α) cuando α es muy pequeño? Recuerde que α tiene que estar medido en radianes para que las definiciones cobren sentido.

   a) Demuestre que: $\mathrm{sen}(15^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ y que $\cos(15^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

   b) Utilizando la aproximación para ángulos pequeños, calcule sen(16^o) y cos(16^o).

   c) Determine el valor aproximado de tan(23^o).

PROBLEMA # 3

En Física, es imprescindible tener un correcto manejo de unidades. Esto es, la respuesta que se da a un problema debe ser consecuente tanto en orden de magnitud como en dimensiones. ¿Recuerda que no es posible en la vida cotidiana sumar "peras" con manzanas"? Aquí es lo mismo, sólo se pueden operar entre sí variables que sean acordes (por ejemplo, longitudes con longitudes, tiempos con tiempos…)

A este procedimiento, lo llamamos Análisis Dimensional y consiste en obtener, a ambos lados de igualdad, las mismas dimensiones. Es un proceso que siempre se debe efectuar para determinar una primera aproximación en el resultado.

Para ejercitar esta idea, se le propone el siguiente problema: a partir de 3 constantes físicas universales, obtener nuevas magnitudes para *tiempo*, *masa* y *longitud*, en función de estos tres valores.

Velocidad de la Luz:	**$c = 299\ 792\ 458\ [m\ s^{-1}]$**
Constante de Gravitación Universal:	**$G = 6.67 \times 10^{-11}\ [m^3\ s^{-2}\ kg^{-2}]$**
Constante de Planck:	**$h = 6.63 \times 10^{-34}\ [kg\ m^2\ s^{-1}]$**

Indicación: a partir de las unidades de cada una de las tres constantes universales, obtenga sus dimensiones y acomódelas adecuadamente para obtener las nuevas expresiones que se piden.

Mediante esta técnica, sólo podemos obtener una relación entre las variables, pero no así su valor real, que naturalmente difiere en una constante. Si definimos como T^*, L^* *y* M^* las nuevas expresiones que se obtienen mediante la combinación de las constantes anteriores, se pueden definir el *tiempo de Planck* $\left(\frac{T^*}{\sqrt{2\pi}}\right)$, la m*asa de Planck* $\left(\frac{M^*}{\sqrt{2\pi}}\right)$ y la *longitud de Planck* $\left(\frac{L^*}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

Obtenga una aproximación para el tiempo, la masa y la longitud de Planck e investigue cuál es el significado físico que tienen y en qué contexto aparecen.