Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Física I Vía Internet 2008
Profesor: Nelson Zamorano
Profesores Auxiliares: Fernando Becerra, Francisco Gutiérrez, Jacob Saravia
Tarea 1.3
26 de Mayo

TRIGONOMETRÍA

::Fecha de entrega
Lunes 2 de Junio

::Objetivos
:: Ejercitar el uso de la trigonometría en problemas geométricos.
:: Determinar puntos críticos en funciones.

::Contenidos
1. Áreas y perímetros de figuras conocidas.
2. Propiedades de las funciones trigonométricas.
3. Teorema del seno y coseno.
4. Optimización de funciones.

Instrucciones Generales

Es muy recomendable que Ud. visite los siguientes links, pues le serán de gran ayuda para reforzar los conocimientos que requiere para abordar los problemas propuestos en la presente guía:

- http://w3.cnice.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Funciones_trigonometricas/Funcion_seno.htm
- http://w3.cnice.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Funciones_trigonometricas/Funcion_coseno.htm
- http://platea.pntic.mec.es/~jalonso/mates/pitagoras.swf
- http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Perímetros_y_áreas

Es importante que usted trabaje con cada uno de los applets que ahí se encuentran, hasta que logre visualizar cada materia que se pretende reforzar y la entienda por completo. Se recomienda además la lectura de textos de Matemática de nivel introductorio que tenga a su alcance, el capítulo VIII "*Complemento Matemático*" del libro Introducción a la Mecánica del Profesor Nelson Zamorano, y material que encuentre en Internet, en caso que lo estime necesario, para dominar a cabalidad los temas de esta parte del curso.

Si tiene alguna inquietud o algo no le queda claro, no dude en plantear sus consultas en el foro del curso, o directamente al profesor auxiliar durante la hora de Chat.

Una vez finalizada su lectura, trabaje en los problemas que siguen. Indique claramente cómo los resolvió, además de sus desarrollos y cálculos intermedios. Adjunte todo en un directorio en el módulo *Tareas*, de la página del curso, de preferencia escaneando sus hojas de resolución y generando documentos de formato *doc* (Microsoft Word) o *pdf* (Adobe Acrobat Reader).

PROBLEMA # 1

1. Con este problema se pretende que usted sea capaz de deducir dos teoremas muy importantes dentro de la trigonometría, y que de ahora en adelante los sepa usar sin necesidad de volver a demostrarlos. Además se busca que usted los analice y entienda en su totalidad, recuerde que la física y matemática no son sólo un puñado de fórmulas.

a) Teorema del coseno.

i. Sea un triángulo ABC *cualquiera*, con ángulos α, β, γ, y lados **a**, **b** y **c**, respectivamente. Demuestre que se cumplen las relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

ii. Interprete y comente para el caso en que el triángulo es rectángulo, es decir, uno de los tres ángulos corresponde a $\frac{\pi}{2}$ radianes. ¿A qué le parece conocido? ¿Qué puede decir entonces del teorema del coseno?

Puede servirle como ayuda separar el problema en dos casos: Triángulo obtusángulo y triángulo agudo.

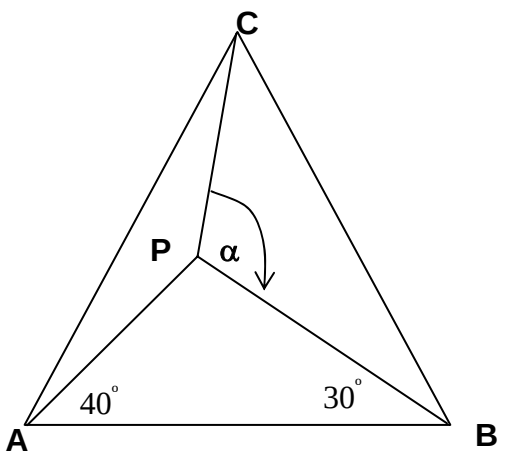
b) Teorema del seno.

Sea un triángulo ABC *cualquiera*, con ángulos $\alpha, \beta, \gamma,$ y lados **a**, **b** y **c**, respectivamente. Demuestre que se cumplen las relaciones:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

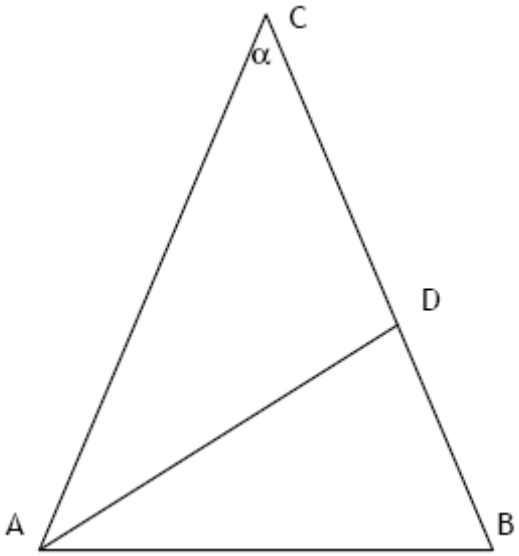
Puede servirle como ayuda separar el problema en dos casos: Triángulo obtusángulo y triángulo agudo.

2. Encuentre el valor del ángulo α en el triángulo de la Figura. El triángulo es isósceles y el valor del ángulo en el vértice es de 80°. A partir de A se traza una recta que hace un ángulo de **40°** con la base del triángulo. Lo mismo se hace a partir de B, pero en este caso el ángulo que se forma es de **30°**. En la intersección de estas dos rectas, el punto P, se traza una recta hasta el vértice. Suponga que los lados AC y BC tienen un largo unitario



PROBLEMA # 2

a) En un triángulo isósceles ABC, en el cual AC = BC, y el ángulo en el vértice C vale α, se ha trazado la bisectriz del ángulo BAC, que corta al lado BC en el punto D, de tal manera que AD=AB=CD. Demuestre que: $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.



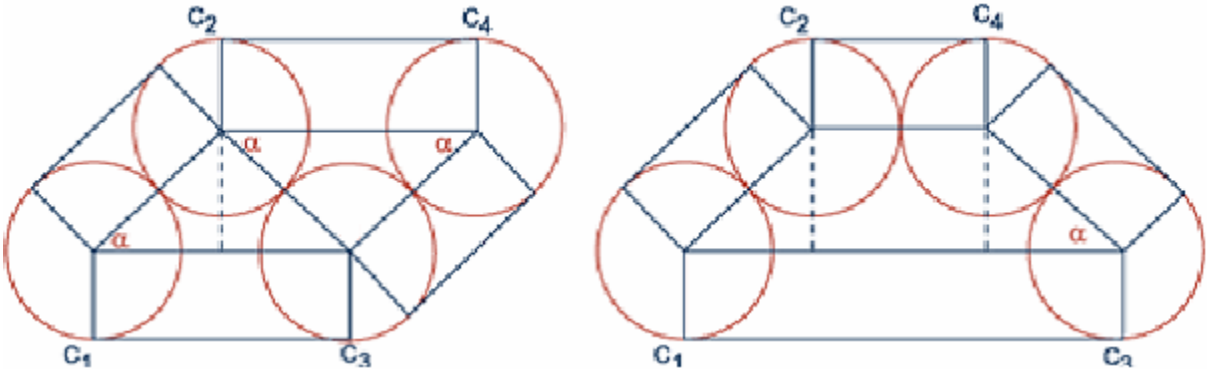
Recuerde que hemos puesto énfasis en la búsqueda de simetrías (tarea 1.1) y triángulos rectángulos (tarea 1.2). Quizás sea apropiado en este problema entonces, intentar encontrar triángulos isósceles.

b) Inspirándose en la parte (a) de este problema, determine geométricamente (esto es, sin usar identidades trigonométricas, evidentes o no evidentes, ya conocidas por usted) el seno y coseno de todos los ángulos múltiplos de 18^o. ¿Cuántos valores debe calcular? Justifique apropiadamente su respuesta (antes de realizar el cálculo).

PROBLEMA # 3

1. Determine el área máxima que encierra una cuerda tensa que amarra los cuatro círculos de radio unitario, de la figura.

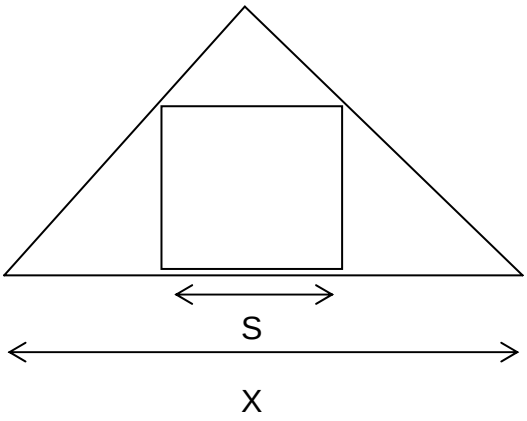
La configuración de los círculos es la siguiente: si los denominamos como C_1, C_2, C_3 y C_4, debe cumplirse que C_i sea tangente a C_{i+1}, donde el índice "i" identifica a cada uno de los círculos dependiendo del valor que adopta i=1, 2 ó 3. Además la curva cerrada que genera la cuerda debe ser cóncava. Con estas restricciones, tenemos tres formas de agrupar las circunferencias. Una es la directa: las cuatro circunferencias están alineadas. Las otras dos se señalan en la figura.



a) Demuestre que el área de una de las figuras es: $Área_1 = \pi + 4 + 8 \cos \alpha \ [1 + \text{sen } \alpha]$. ¿A cuál de las dos figuras corresponde este valor?

b) ¿Cuál es el valor del área encerrada por la cuerda en la otra configuración?

c) Encuentre el valor del ángulo α para el cual el área encerrada por la cuerda es máxima. Para ello, construya un gráfico del área en términos del ángulo y estudie el comportamiento de dicha función. Indique cuál de las dos configuraciones es la que puede generar el máximo valor para el área.

d) Imagínese una configuración adicional a las tres mencionadas (por ejemplo, tres esferitas en línea y una de ellas fuera de la alineación de las otra tres). Explique por qué razón esta cuarta configuración no fue incluida.

2. Demuestre que la expresión para el lado S de un cuadrado inscrito en un triángulo de área dada (y por lo tanto fija) es: $S(x) = \dfrac{2Ax}{x^2 + 2A}$, donde **A** es el área del triángulo, y **x** el largo de la base de este triángulo. Calcule, haciendo un gráfico, el valor de x que maximiza el valor de S.