UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Física I Vía Internet 2008
Profesor: Nelson Zamorano
Profesores Auxiliares: Fernando Becerra, Francisco Gutiérrez, Jacob Saravia
Tarea 1.2
19 de Mayo

TRIGONOMETRÍA

::Fecha de entrega
Lunes 26 de Mayo

::Objetivos
:: Familiarizarse con el cálculo de áreas y perímetros.
:: Definir correctamente las Funciones Trigonométricas en un Círculo y un Triángulo
:: Entender y aplicar conceptos y propiedades de las funciones trigonométricas.

::Contenidos
1. Áreas y Perímetros
2. Radianes
3. Funciones Trigonométricas
4. Identidades Trigonométricas

Instrucciones Generales

Es muy recomendable que Ud. visite los siguientes links, pues le serán de gran ayuda para reforzar los conocimientos que requiere para abordar los problemas propuestos:

- http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/t11radianes.htm
- http://w3.cnice.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Funciones_trigonometricas/Funcion_seno.htm
- http://w3.cnice.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Funciones_trigonometricas/Funcion_coseno.htm
- http://w3.cnice.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Funciones_trigonometricas/Funcion_tangente.htm

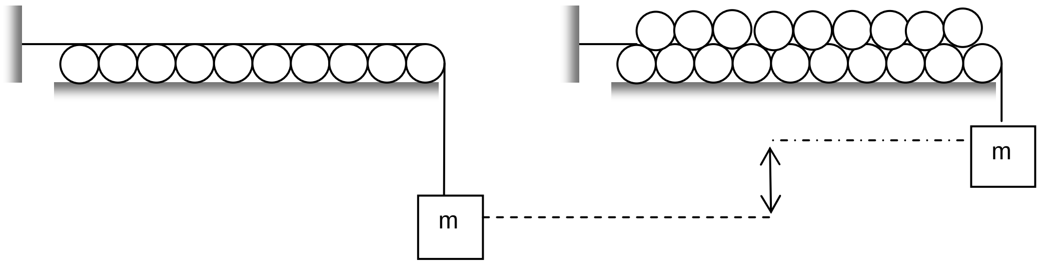
Es importante que usted trabaje con cada uno de los applets que ahí se encuentran, hasta que logre visualizar cada materia que se pretende reforzar y la entienda por completo. Se recomienda además la lectura de textos de Matemática de nivel introductorio que tenga a su alcance, el capítulo VIII "*Complemento Matemático*" del libro Introducción a la Mecánica del Profesor Nelson Zamorano, y material que encuentre en Internet, en caso que lo estime necesario, para dominar a cabalidad los temas de esta parte del curso.

Si tiene alguna inquietud o algo no le queda claro, no dude en plantear sus consultas en el foro del curso, o directamente al profesor auxiliar durante la hora de Chat.

Una vez finalizada su lectura, trabaje en los problemas que siguen. Indique claramente cómo los resolvió, además de sus desarrollos y cálculos intermedios. Adjunte todo en un directorio en el módulo *Tareas*, de la página del curso, de preferencia escaneando sus hojas de resolución y generando documentos de formato *doc* (Microsoft Word) o *pdf* (Adobe Acrobat Reader).

PROBLEMA # 1

Se tiene un conjunto de **n** cilindros alineados sobre una superficie plana y tocándose los vecinos. Los cilindros tienen radio **R**. Amarrando a estos cilindros se encuentra una cuerda inextensible de largo **L**. Un extremo de la cuerda está fijo y del otro cuelga una masa **m** sólo para mantener la cuerda tensa. Suponga que **(n-1)** cilindros idénticos se instalan sobre la base en la forma que señala la figura.



a) ¿Cuánto sube el extremo libre de la cuerda?

Usted puede resolver el problema como más le acomode, pero incluimos algunas indicaciones que pueden ser útiles:

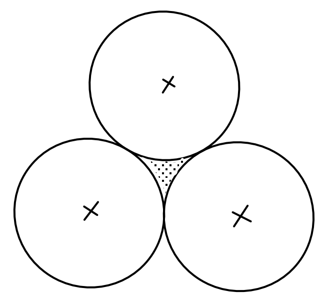
La cuerda no tiene espesor y va pegada a los cilindros en la zona ocupada por ellos. Además, la cuerda llega horizontal y tangente al primer cilindro (el de más a la izquierda), después sigue el arco de ése cilindro hasta el punto de contacto con el cilindro superior, desde allí se pega al superior hasta el siguiente punto de contacto con el inferior... y así sucesivamente.

Para calcular el camino recorrido por la cuerda, debe evaluar el arco de circunferencia en cada caso.

Como indicación general, no se incomode con el dato de n ó (n-1) cilindros. En un comienzo sólo necesita ver qué sucede con tres cilindros: uno arriba y dos abajo. Resuelva este caso primero y después examine el de n cilindros.

b) Encuentre el volumen que queda "atrapado" entre todos los cilindros, si se sabe que cada cilindro tiene un largo **H**.

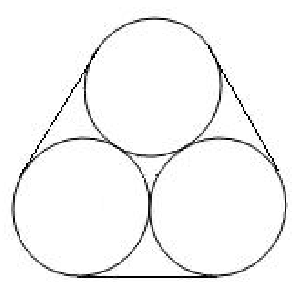
En la figura, puede ver la vista lateral del volumen encerrado por tres cilindros.



c) Determine, en función de los datos del problema, la altura de la estructura medida respecto al piso.

d) En el transporte de este complejo sistema se utilizaron dos cuerdas: con cada una de ellas se amarró un extremo de los cilindros. Los cilindros se transportaron de la misma forma como se describe en el enunciado del problema, es decir, **n** cilindros abajo y **(n-1)** cilindros arriba. Calcule el largo que debe tener cada cuerda.

En la figura, puede ver la vista lateral, para el caso de tres cilindros, la configuración del sistema.



PROBLEMA # 2

El objetivo de este problema es definir las funciones trigonométricas y demostrar algunas propiedades simples de ellas. Previamente, será necesario definir el concepto de radián:

1. Con un compás, dibuje un círculo en un papel. No olvide marcar el centro. Corte varios trozos de hilo, todos con un largo igual al radio de la circunferencia.

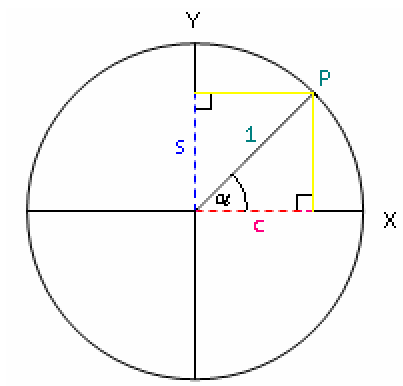
a) ¿Cuántos de estos trozos de hilo se necesitan para cubrir el largo de la circunferencia? O puesto de otro modo, ¿cuántos radios caben en el largo de la circunferencia?

b) Mida el ángulo que subtiende uno de estos trozos de cuerda. Esto es por definición UN RADIÁN. Repita las operaciones anteriores para una circunferencia de mayor radio que la anterior. Ahora, compare el valor del ángulo subtendido por el radio en ambos casos.

c) Dado que el ángulo medido en radianes se obtiene a partir de la razón entre dos segmentos, ¿cuál debe ser la dimensión de un radián?

d) Encuentre una equivalencia entre grados y radianes. Es importante explicar claramente cómo la obtiene.

2. Para definir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, no necesariamente en un triángulo rectángulo (como debe estar acostumbrado), se empieza por situar dicho ángulo en una circunferencia de radio unitario en un plano cartesiano cuyo origen se encuentra justamente en el centro de esta circunferencia, como vemos en la figura:



Así vemos que el punto de intersección P, tendrá coordenadas (c,s), de estas proyecciones se pueden definir las siguientes funciones: $c = \cos\alpha$, $s = \operatorname{sen}\alpha$.

Para este ejercicio debe considerar que los ángulos están medidos en radianes y en sentido antihorario (contrario al movimiento de las manecillas del reloj). Por convención, así definimos que los ángulos sean *positivos*.

a) Utilizando sólo geometría básica y proyección en los ejes X e Y como en la figura anterior, demuestre que para cualquier ángulo se tiene lo siguiente:

i. $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

ii. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

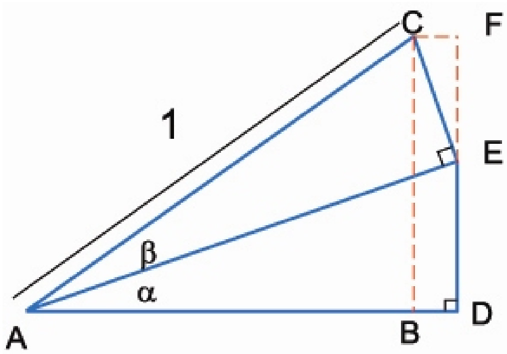
iii. $\operatorname{sen}(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

iv. $\cos(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

v. $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

b) Si ahora la circunferencia tiene radio “R”, muestre cuánto valen las proyecciones del punto P en los ejes X e Y, es decir, cuál sería el valor del seno y coseno de cualquier ángulo. ¿Cómo determinaría geométricamente el valor de la tangente?

c) A partir de la siguiente figura, deduzca <u>geométricamente</u> las siguientes propiedades:



$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\text{sen}(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$$

3. Considere un rectángulo ABCD, tal que BC = 3AB. Los puntos P y Q sobre el lado BC, son tales que BP=PQ=QC. Pruebe, a partir de las relaciones dadas en el enunciado y en la figura, que $\alpha+\beta=\gamma$.