Complemento matemático

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

VIII

Capítulo I

COMPLEMENTO MATEMATICO

I.1. INTRODUCCION

La Física intenta conocer las leyes que rigen el comportamiento de la naturaleza. Con este objeto propone y analiza diversos modelos matemáticos simplificados que simulan situaciones que ocurren a nuestro alrededor. El propósito de esta búsqueda es encontrar un modelo matemático que, con un **mínimo** de suposiciones, nos permita entender un gran número de hechos experimentales.

Un ejemplo en esta dirección lo constituyen las leyes de Newton –incluyendo su ley de gravitación universal–, introducidas en 1687. Con este conjunto de ecuaciones, Newton logró explicar en forma simultánea fenómenos aparentemente desconectados entre sí, como el movimiento de los planetas en la esfera celeste o la caída de una manzana en la tierra.

Con las leyes de Newton, los fenómenos celestes y aquellos que ocurren a nuestro alrededor quedan descritos con una sola ley física, cuya validez es[1] universal. Este es el objetivo de la física.

Por otra parte, los modelos simples que uno puede analizar en detalle y entender, no abarcan todos los fenómenos que uno observa. El mundo real es muy complejo. Es preciso adoptar una estrategia para entender esta multitud de hechos. Esta consiste en seleccionar los más relevantes, aquellos en los cuales hay una característica que lo destaca del resto y proceder a estudiarlo. Dependiendo de las preferencias del investigador, se recurre al Laboratorio, a una simulación en el computador o a un estudio teórico.

Si nos ubicamos en el Laboratorio, los experimentos se organizan y diseñan de modo

[1] A partir de 1914 se conoce otra teoría, la Relatividad General, que explica observaciones que no están contenidas en el esquema desarrollado por Newton.

que el fenómeno que uno desea investigar se destaque nítidamente con respecto a cualquier otro. Una vez logrado esto, podemos estudiar su respuesta a la variación de un parámetro externo, como la temperatura, un campo magnético, la presión... etc. Eventualmente (no siempre), con estos datos uno puede desarrollar una teoría que explique este fenómeno y que, en el caso ideal, permita, a partir de ella, predecir otros resultados –aún desconocidos– que puedan ser verificados a través de este experimento. Este último paso constituye la prueba de fuego de cualquier teoría. Si sus predicciones no coinciden con los resultados experimentales esperados, simplemente debemos reformular la teoría, por convincente que ésta parezca.

Como una forma de ilustrar, con un par de casos, cuándo una cierta característica es más importante que otra en una situación concreta, incluimos dos ejemplos a continuación.

Si nosotros pudiéramos escribir aquí las ecuaciones que gobiernan la propulsión de una bacteria en su medio, junto con aquéllas que gobiernan el movimiento de los planetas en el espacio, veríamos que lucen muy diferentes. Sin embargo, sabemos que las mismas leyes gobiernan ambas situaciones. Lo que sucede, es que las **aproximaciones** hechas al plantear cada uno de estos casos son distintas. En la propulsión de las bacterias, la viscosidad del medio en que se mueven es fundamental, de hecho es lo más importante, más relevante incluso que la masa de la bacteria misma; en cambio para determinar la trayectoria de un planeta lo crucial es la posición relativa del Sol y del resto de los planetas. En este caso la viscosidad es despreciable.

Otro ejemplo, que estaremos en condiciones de calcular durante este curso, es la caída de una bolita de acero desde un metro de altura (por fijar una distancia). En este caso la viscosidad del aire es **irrelevante** (su efecto es muy pequeño). En cambio, si es lanzada desde una altura de 2.000 m, la viscosidad del aire determinará la máxima velocidad que la bolita alcance en su caída.

Podemos afirmar que todas las leyes físicas son un conjunto de aproximaciones. Mientras mejor la aproximación, mayor es el número de fenómenos incluidos.

En efecto, hoy día sabemos que las leyes de Newton constituyen una muy buena aproximación para describir el comportamiento del mundo que nos rodea. Sabemos que la Relatividad General es una aproximación aún mejor para describir los efectos de la atracción gravitacional.

Por ejemplo, de acuerdo a la Relatividad General, dos relojes idénticos ubicados a distinta altura sobre la superficie de la tierra, funcionarán a un ritmo diferente, el reloj situado a mayor altura se adelantará con respecto al situado sobre la superficie de la tierra. Esta fue una de las predicciones de la teoría de gravitación de Einstein y que ha sido verificada con gran precisión.

De hecho, estos resultados se usan hoy para corregir las señales recibidas desde los satélites en órbita encargados de mantener una escala de tiempo uniforme en nuestro planeta. Las correcciones introducidas modifican el intervalo de tiempo entre cada señal recibida en tierra, para compensar el adelanto introducido por el satélite debido a su altura. Son en realidad muy pequeñas pero la precisión lograda en la medición del tiempo es tal, que las hace necesarias. (También se incluyen correcciones debidas a la Relatividad Especial para compensar la velocidad relativa del satélite con respecto a la base.)

La Geometría es una herramienta importante en la formulación y análisis de los problemas que interesa estudiar en Física, así como también lo es el cálculo. De hecho, esta herramienta matemática fue desarrollada por Newton (simultáneamente con Leibnitz) precisamente para poder formular sus leyes en forma precisa. Comenzaremos dando un breve repaso de Geometría y de los conceptos básicos de Trigonometría, posteriormente introduciremos nociones de cálculo haciendo énfasis en las aproximaciones y en el cálculo de áreas bajo una curva, que son los procedimientos más requeridos en Física.

I.2. SERIES

Suponemos conocidos los elementos básicos de Matemática y Geometría . En esta sección estudiaremos algunas series que usaremos más adelante y que probablemente no es una materia conocida para algunos de los alumnos.

I.2.1. Sucesiones

(**Ref.: Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica**, G. Thomas, Cap. XVI).

Una *sucesión* es un conjunto de símbolos

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$$

que están en correspondencia biunívoca (es decir $1 \leftrightarrow 1$) con la sucesión ordenada de los números naturales. Los símbolos $a_1, a_2, ...$ se denominan términos de la sucesión, de forma que el término *enésimo* es a_n, y se designa con la notación $\{a_n\}$.

Ejemplo

El término genérico $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, designa la sucesión

$$1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4, ...\ \{1/n\}\ ...$$

El término genérico $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$, designa la sucesión

$$1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8, ...\ \left\{1/2^{n-1}\right\}, ...\square$$

¿Qué sucede si n crece indefinidamente? ¿Cuál es el valor de a_n en dicho caso?

En este caso, si es posible asociar a la sucesión $\{a_n\}$ un número L, tal que la diferencia $|L - a_n|$ sea tan pequeña como se quiera, para todos los valores de n suficientemente grande, diremos que el *límite* de la sucesión $\{a_n\}$ es L, y lo escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{I.1}$$

Mediante la frase:$|L-a_n|$ *es arbitrariamente pequeño para valores grandes de* n, queremos decir que para cualquier número positivo ϵ, corresponde un subíndice N tal que:

$$|L - a_n| < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad n > N. \tag{I.2}$$

O sea, todos lo términos que siguen al N–ésimo, están comprendidos entre $(L - \epsilon)$ y $(L + \epsilon)$.

Si tal límite no existe, entonces diremos que la sucesión es *divergente*.

I.2.2. Series

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=1}^{3}(2^n) &\equiv 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14,\\
\textstyle\sum_{n=1}^{3}(1) &\equiv 1 + 1 + 1 = 3,\\
\textstyle\sum_{k=1}^{n}(a^k) &\equiv a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n,\\
\textstyle\sum_{k=4}^{6}(a^k) &\equiv a^4 + a^5 + a^6, \qquad \text{donde a es un número arbitrario.}
\end{aligned}$$

Definición:

El símbolo griego *sigma* $\equiv \sum$ indica que el sumando $[(a^k)$ en el último ejemplo$]$ toma cada uno de los valores que debe recorrer **k** partiendo desde el límite inferior hasta llegar al límite superior a través de los enteros. Como se indica, el sumando se suma tantas veces como el número de enteros que recorra **k**.

El límite superior en los dos primeros ejemplos es 3 y en el tercero no se deja explícito, n puede tomar cualquier valor entero. k lleva la contabilidad de los términos incluidos en la suma y el valor más alto que toma es n (va desde k = 1 hasta k = n, con n un número entero).

Es fácil demostrar la siguiente propiedad de las sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{k=n} C\, a_k = C \sum_{k=1}^{k=n} a_k, \tag{I.3}$$

donde C es una constante que no depende de k. En palabras, cada vez que tenemos un factor que se repite en cada uno de los términos de la sumatoria, lo podemos sacar como factor común en frente de la sumatoria.

Para demostrarlo debemos usar la siguiente propiedad de los números: $C\,a_1 + C\,a_2 + C\,a_3 = C\,\{a_1 + a_2 + a_3\}$. Esta es la sumatoria anterior con $k = 3$.

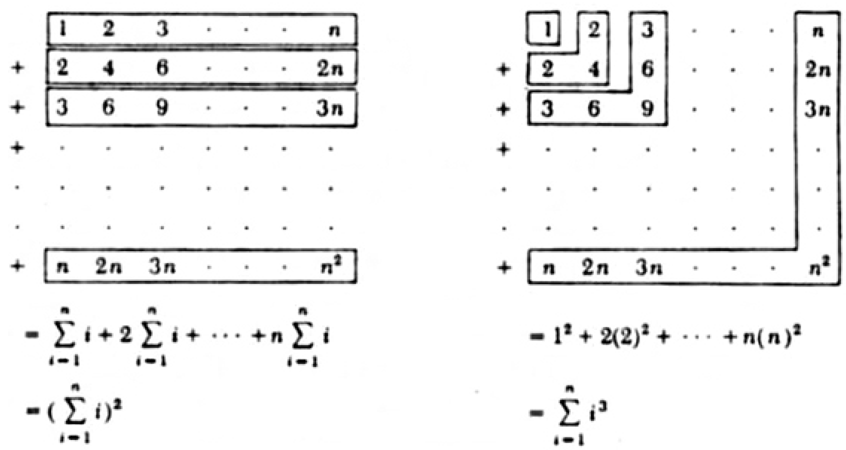


Figura I.1: (The College Mathematics Journal, Vol. 62, # 5, Dec. 89.)

Demuestre la siguiente igualdad entre sumatorias:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (i)^3.$$

Solución

A continuación se incluye una demostración ingeniosa que hace uso del método gráfico para demostrar la igualdad.

Se escribe el mismo arreglo de números uno al lado de otro, como se indica en la Figura anterior. (No es natural, por supuesto, que a uno se le ocurra espontáneamente este tipo de demostración, es necesario mucho trabajo y un poco de ingenio).

La idea consiste en sumar los números de los arreglos agrupados en forma diferente, de manera que reflejen a cada una de las sumatorias propuestas. Como los números en ambos arreglos son iguales, el valor de la suma debe ser el mismo; de esta forma demostramos la igualdad entre ambas sumas.

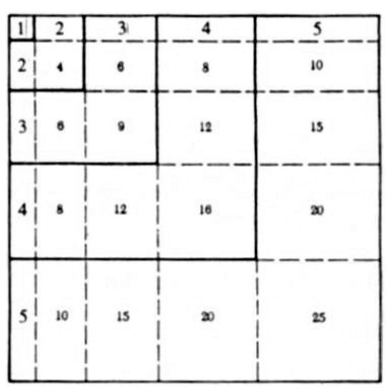
En esta Figuras se suman, en ambos casos, los números de acuerdo a la caja que los contiene (rectangular o formando un ángulo recto). El valor de la suma de cada una de las cajas se indica al pie de la misma Figura.

En el caso del arreglo ubicado a mano izquierda, se ha sacado –usando la regla de factorización recién descrita– un factor común en cada una de las sumatorias individuales, que corresponde al número $2, 3, 4 ... n$, de acuerdo a la posición del rectángulo horizontal. En seguida uno puede darse cuenta que es posible sacar la sumatoria de i como factor común:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + 3\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + ... + n\ \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) = \left\{\sum_{i=1}^{i=n}(i)\right\}[1 + 2 + 3 + ... + n] = \left[\sum_{i=1}^{i=n} i\right]^2$$

Dejamos como ejercicio comprobar que los términos al pie de la Figura de la derecha corresponden, efectivamente, a la suma de los números encerrados dentro de cada uno de los cajas en forma de ángulo recto.

El mismo resultado puede ser obtenido usando geometría. Para ello debemos pensar que $\left[\sum_{i=1}^{i=n} i\right]^2$, corresponde al *área de un terreno cuadrado* que tiene $\sum_{i=1}^{i=n} i$ metros (por dar una unidad de longitud) por lado. A continuación se dibuja el terreno a escala (la longitud 5, por ejemplo, tiene cinco unidades de largo) y se calcula el área en forma diferente. El número indicado dentro del cuadrado (o rectángulo), corresponde al valor del área de dicha figura; pero en lugar de sumar las áreas en forma arbitraria, las sumamos añadiendo franjas en forma de ángulo recto, es decir aquellas encerradas entre dos líneas continuas sucesivas que tienen la forma señalada. Nuevamente, con este método se verifica la igualdad propuesta. □



Las series descritas anteriormente son finitas, pero el límite superior puede ser un número tan grande como uno quiera. En este caso el valor de la serie (es decir, el valor que toma la suma de todos los términos) debe ser un número **finito** para que sea de alguna utilidad.

En muchos de los casos de interés en física la serie (o la suma) no termina nunca, es decir el límite superior es infinito (∞). En este caso, si la serie está bien definida (es decir, su suma es finita), ocurre que al escribirla explícitamente, cada uno de los términos que van agregándose – a partir de un cierto valor de **k**–, van tomando rápidamente valores (absolutos) más y más pequeños de manera que la serie tiende a un límite finito. Es decir, se acerca tanto como uno quiera (dependiendo del número de términos que se sumen) a un cierto valor finito, que se denomina el límite de la serie.

Hagamos contacto con nuestra definición de sucesión, para definir formalmente las series.

Si $a_1,\ a_2,\ a_3, ...a_n, ...$ es una *sucesión* cualquiera de números o funciones, entonces mediante el símbolo

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

representaremos una sucesión deducida a partir de la primera y que llamaremos *serie.* (Sólo se diferencia de la definición utilizada en los primeros ejemplos en el número de elementos de la suma. Era finito en el primer caso y ahora es más general, puede ser infinito.)

Definimos S_n como la sucesión de sumas parciales de la serie como sigue

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n. \end{aligned}$$

El término enésimo de la sucesión S_n es la suma de los n primeros términos de la serie $\{a_n\}$.

Si esta sucesión posee un límite cuando n crece indefinidamente –de acuerdo a la definición dada anteriormente [**??**]–, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{I.4}$$

S es el valor de la secuencia S_n cuando $n \to \infty$. También podemos decir que la serie $\{S_n\}$ *converge* a S.

Si por el contrario la serie $\{S_n\}$ diverge, es decir, cada uno de las sumas parciales aumenta su valor continuamenten a medida que n crece, entonces definimos la serie $\{S_n\}$ como una serie divergente.

En física, a este nivel, sólo nos interesan las series convergentes, puesto que son las únicas a las cuales les podemos asignar un significado concreto (un número).

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de series, tanto finitas como infinitas.

El concepto de serie infinita con su respectivo límite asociado, no es trivial y requiere bastante maduración para lograr entender su significado. Hemos querido introducirla al comienzo del curso y trabajar con algunas de ellas, porque más tarde las necesitaremos. Proporcionan, además, una posibilidad de utilizar el computador para convencerse de algunos resultados cuyas demostraciones analíticas van más allá de este curso.

A continuación estudiaremos una de las series más usadas en física. Su interés radica en su uso en las aproximaciones en la forma que indicaremos aquí.

La serie es

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... \tag{I.5}$$

Esta serie está definida si la suma correspondiente tiene un valor finito. En este caso, si $|x| < 1$. $|x|$ indica el valor absoluto de x.

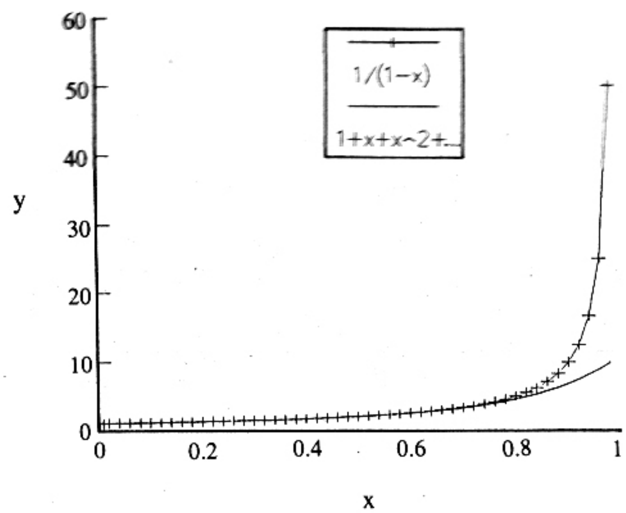


Figura I.2: Comparación entre la función 1/(1 - x) (gráficada con +) y la aproximación polinomial, que incluye hasta potencias de orden 10 (línea continua). En la aproximación, se corta la serie infinita, manteniendo sólo los primeros términos.

Nota
Rigurosamente se debe escribir:

$$
\begin{aligned}
S_n &\equiv \textstyle\sum_{k=0}^{k=n} x^k \equiv \sum_{k=0}^{n} x^k \\
S_\infty &= \lim_{n\to\infty}(\textstyle\sum_{k=0}^{n} x^k)
\end{aligned}
$$

S$_n$ constituye una *sucesión* de números identificadas con n. El límite de esta sucesión para $n \to \infty$ (es decir para un **n** mayor que cualquier **n** que Ud. se pueda imaginar) se obtiene al verificar que a medida que **n** aumenta la suma se aproxima a un valor fijo que no depende de **n**. Este es el valor de S_∞. Debe ser un valor finito, de otra manera, como ya se señaló, el resultado no tiene ningún significado matemático. Verifiquemos que para $|x| < 1$, la serie anterior, con todos sus términos incluidos, se puede escribir en forma analítica:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = 1/(1 - x). \tag{I.6}$$

Hay muchas formas de obtener esta identidad. Podemos comprobar este resultado graficando con un computador las siguientes dos funciones (ver Figura **??**) :

$$
\begin{aligned}
y(x) &= 1/(1 - x), \qquad \text{y} \\
S_{10} &= 1 + x + x^2 + ... + x^{10}.
\end{aligned}
$$

En todo caso esta no es una demostración. Podría suceder que la serie es divergente (es decir aumenta su valor) muy lentamente, y de este modo inducirnos a error. Para evitar esta posibilidad, demostraremos esta igualdad mediante el uso de métodos geométricos. Usaremos el triángulo rectángulo de la Figura **??**

Se construye la siguiente estructura sobre el triángulo rectángulo: A partir del cateto más pequeño, que se toma de largo unitario (por definición, o si Ud. quiere, lo construye con dicho lado unitario) se construye un cuadrado perfecto. Con esto se genera un segmento (ver Figura) de largo r, a partir del cual se genera otro cuadrado de lado $r < 1$ como indica la Figura. Sucesivamente se construyen los cuadrados r^2, r^3... etc.

De la Figura , vemos que hay dos triángulos semejantes: $\Delta ADB \sim \Delta COA$, esto implica que existe una proporcionalidad entre sus lados correspondientes, que se indica a continuación

$$\frac{1}{(1 - r)} = \frac{(1 + r + r^2 + r^3 + ...)}{1}.$$

Con este último paso completamos la demostración.

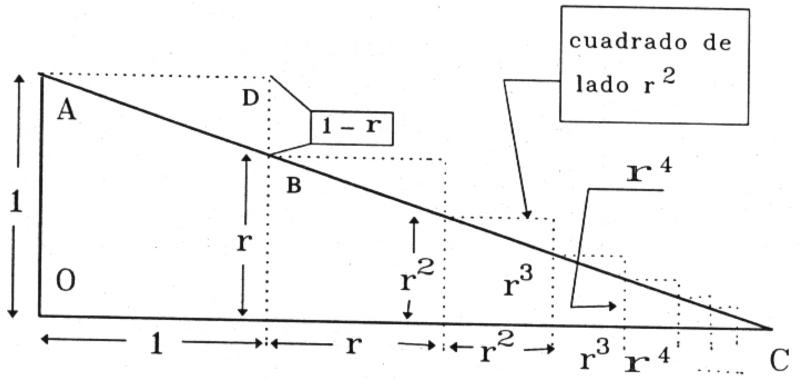


Figura I.3: La semejanza entre el ΔOAC y el ΔADB permite demostrar la igualdad propuesta. A partir de OA, que hacemos unitario, se construye un cuadrado, este genera el segmento de longitud r, que genera otro cuadrado...

El valor que puede tomar $r < 1$ se puede elegir arbitrariamente. Basta comenzar con un cuadrado de lado unitario y dividir uno de los lados de tal forma que uno de los segmentos tenga una longitud r.

Si r es muy pequeño con respecto a 1, es decir $r << 1$ entonces

$$\frac{1}{1-r} \simeq (1+r), \tag{I.7}$$

porque al multiplicar un número pequeño por sí mismo, se hace aún más pequeño. Comprobemos esto numéricamente: si $r = 10^{-3} = ,001$, entonces $r^2 = 10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-6} = ,000001$ y podemos ver que es realmente despreciable con respecto al primer término.

Esta última es una de las aproximaciones más frecuentes en el desarrollo de los problemas físicos.

Ejemplo

Dado un número real, arbitrario q, y un número entero N, se pide encontrar el valor de la siguiente suma:

$$S = \sum_{n=0}^{N} q^n = q^\circ + q^1 + q^2 + ... + q^N$$

A partir de la expresión encontrada aquí recuperar el resultado obtenido para la serie anterior.

Podemos encontrar el valor de S multiplicando ambos lados de la sumatoria por q,

$$q \bullet S = S + q^{N+1} - 1,$$

despejando S de esta ecuación, tenemos

$$S = (1 - q^{N+1})/(1 - q) = 1 + q^1 + q^2 + ... + q^N. \tag{I.8}$$

Hemos encontrado el valor de S sin necesidad de sumar cada uno de los términos de la serie. Este resultado es válido para todos los valores de $q \neq 1$. Supongamos que $|q| < 1$ y hagamos crecer el valor de N indefinidamente, es decir, tomemos el valor límite de $N \to \infty$. En otras palabras, damos a N un valor muy grande, mayor que cualquier otro que uno pueda imaginar. En este caso

$$\lim_{N\to\infty} q^{N+1} = 0.$$

Este resultado se puede aceptar si uno medita acerca de lo que sucede si tomamos indefinidamente el producto de un número, menor que la unidad por sí mismo. Por ejemplo, no importa lo pequeño que sea el número (positivo) que Ud. pueda imaginar (llamémosle ϵ, para ser específico), uno siempre puede encontrar un valor de N suficientemente grande, que haga $q^{N+1} < \epsilon$. (Verifique esta afirmación con una calculadora.)

Así

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... = \frac{1}{1-q}\,, \tag{I.9}$$

coincidiendo con lo demostrado anteriormente, usando sólo geometría.

Ejemplo

La fracción decimal periódica $0,317317317...$, representa un número *racional.*

a) Escriba este número como una suma infinita de términos.

b) Siendo un número racional, es posible escribirlo de la forma p/q. Usando el resultado de la parte a), encuentre el valor de p y q.

a) Primero notamos que este número, por ser una una fracción decimal periódica, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0,317317317... &= 0,317 + 0,000317 + 0,000000317... \\ \text{o de otra forma} & \\ 0,317317317... &= 0,317 + \frac{0,317}{10^3} + \frac{0,317}{10^6}... \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0,317317317... &= 0,317\left\{1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+...\right\}\\
0,317317317... &= 0,317\left\{\frac{1}{1-10^{-3}}\right\}.
\end{aligned}
$$

En la última línea, usamos el resultado obtenido en [**??**]. Para poder expresarla como la razón entre dos enteros debemos escribirla de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
0,317317317... &= \frac{317}{10^3}\left\{\frac{1}{1-10^{-3}}\right\}\\
0,317317317... &= \left\{\frac{317}{10^3-1}\right\} = 317/999.\square
\end{aligned}
$$

Ejemplo

La serie que se incluye a continuación es divergente, a pesar que a simple vista no lo parece.

$$
\begin{aligned}
S &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\\
&= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\ldots\\
a_n &= \tfrac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Usando un computador o una calculadora, encuentre el número mínimo de términos de la serie $\sum 1/n$ que debe sumar, para que su valor sea mayor que 3. (Respuesta: 11) $\square$

Ejemplo

Encuentre el valor de la siguiente suma para $n = 14$.

$$S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \overbrace{111111}^{\text{n–unos}}.$$

Indicación: Haga la suma de los tres primeros términos: $S_3 = 1 + 11 + 111 = 3\cdot 1 + 2\cdot 10 + 1\cdot 100$. En el caso general entonces será $S_n = n\cdot 1 + (n-1)\cdot 10 + ...\square$.

Convergencia de una serie

(Esta sección se puede omitir. Se incluyen al final algunos problemas de convergencia que suponen conocida la materia de esta sección.)

¿Cómo sabemos que una suma infinita converge? (Es decir, que la suma de los infinitos términos que la componen, da como resultado un número finito).

Este es un problema difícil, y aquí sólo daremos una **receta** que será de utilidad en muchas ocasiones, pero no estudiaremos más a fondo el tema porque nos interesan principalmente aquellas series que tienen un límite.

El criterio de convergencia que usaremos es el siguiente: Tome el término a_{n+1} y a_n de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ...,$$

ahora,para valores grandes de n, calcule la razón:

$$\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid$$

Si no consideramos los términos proporcionales a $1/n^2$, o más pequeños, y la fracción a_{n+1}/a_n adopta la siguiente expresión

$$\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = (1 - \frac{s}{n}), \tag{I.10}$$

entonces afirmamos que **la serie converge en valor absoluto si** $s > 1$. (Converge absolutamente, puesto que tomamos el valor absoluto de (a_{n+1}/a_n).)

La frase "no consideramos los términos proporcionales a $1/n^2$ y más pequeños", indica que en el resultado uno ignora (no escribe) todos los términos que son más pequeños o iguales en valor a $1/n^2$.

Ejemplo

Estudiemos la siguiente serie, que resulta ser divergente:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} S = & \quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n+1} + \ldots, \\ a_n = \tfrac{1}{n}, & \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{n+1}, \\ a_{n+1}/a_n = & \quad n/(n+1) = (n+1-1)/(n+1), \\ = & \quad 1 - 1/(n+1) \end{aligned}$$

Si n es un número muy grande entonces $n \sim (n+1)$.

$$a_{n+1}/a_n \sim (1 - 1/n)$$

De acuerdo al criterio mostrado, $s = 1$ y para que la serie converja s debe ser **mayor** que la unidad, por lo tanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n$$

no converge. Esto indica que al sumar un número suficientemente grande de términos de la serie podemos obtener como resultado un número tan grande como uno pueda imaginar.

Ejercicio

Calcule 1/110,847 y 1/110,846. Si la calculadora es capaz de distinguir entre ellos, inténtelo con un denominador mayor, hasta encontrar el límite en el cual no puede distinguir entre números consecutivos.

$$\begin{aligned} 1/(n+1) & \sim 1/n \\ \tfrac{1}{(n+1)} & = \tfrac{1}{[n(1+1/n)]} = \tfrac{1}{n} \bullet \tfrac{1}{[1+1/n]} \\ & \simeq \tfrac{1}{n} \bullet [1 - \tfrac{1}{n}] \simeq 1/n + O(1/n^2) \end{aligned}$$

En la última línea hemos usado la aproximacion demostrada anteriormente. La expresión $O(1/n^2)$ indica en palabras que $1/(n+1)$ es igual a $1/n$ con un error del orden de $1/n^2$.

I.3. LAS SERIES MAS USADAS.

I.3.1. El binomio y el número e.

Una de las series que se presenta frecuentemente, es el desarrollo de de un binomio. La potencia enésima de un binomio es:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + ... \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-\alpha)!}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\end{aligned} \tag{I.11}$$

La expresión que aparece en esta última línea es una forma compacta para representar la fórmula del binomio y contiene la expresión $n!$ *n factorial* que será definida a continuación. Conviene desarrollar esta suma para los casos más conocidos como una forma de familiarizarse con su significado.

- Esta serie tiene sólo $n+1$ términos **si** n es un entero. En este caso la suma termina cuando $\alpha = n$. Si n no es un entero, la suma prosigue hasta infinito.
- Corresponde al desarrollo usual del cuadrado de un binomio si $n = 2$, al cubo de un binomio si $n = 3$ ...
- Aquí sólo consideraremos el caso $n > 0$.
- 3!, se lee: tres factorial y es una denominación para el siguiente producto:

$$\begin{aligned} 3! &\equiv 3\cdot 2\cdot 1, \\ 1! &\equiv 1, \\ 0! &\equiv 1 \text{ (por definición).}\end{aligned}$$

En general

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \tag{I.12}$$

$n!$ es un número que crece rápidamente. Compruébelo calculando 10! en un computador.

Probablemente la serie más célebre es la siguiente:

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \tag{I.13}$$

Donde la letra **e** define, por convención, al número irracional $e = 2,71828...$ El valor de **e** se obtiene de la serie anterior si ponemos $x = 1$:

$$e^1 \equiv e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = 2,71828... \tag{I.14}$$

Esta serie obedece las mismas propiedades que las potencias en una base cualquiera, a^x y precisamente por esa razón se define de esa forma. Por ejemplo:

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}, \quad \text{también} \qquad e^0 = 1.$$

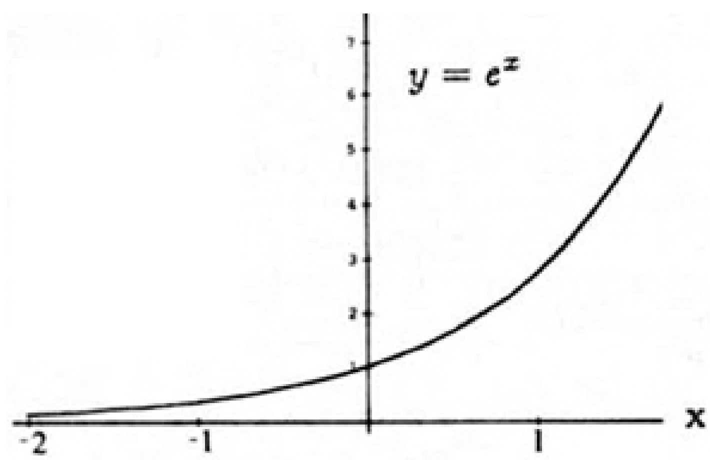


Figura I.4: Gráfico de la función $y = e^x$. La función exponencial es positiva para todos los valores de x, y toma el valor y = 1, para x = 0.

Ejercicio

Calcule los dos decimales siguientes en la expresión de $e = 2,7182....$ Grafique la función $y = e^x$

Nota

Calcular los dos decimales siguientes quiere decir que al aumentar el número de términos de la serie incluidos en el cálculo, el valor de los seis primeros decimales no se altera.

- $y = e^x$ es una función positiva a lo largo de todo el eje x.

- También se denomina exponencial de x.
- $f(x) \equiv$ función de x. A un valor determinado de x, $f(x)$ le asocia un número real, si la función es real. Es equivalente a una tabla de valores de dos columnas, o a la información contenida en un gráfico.

Ejemplo

Dados los números reales $a_1,\ a_2, ...a_n$ todos ellos positivos, y dada la suma $S_n = a_1\ +\ a_2 + ... + a_n$, pruebe que

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq 1 + \frac{S_n}{1!} + \frac{S_n^2}{2!} + ... + \frac{S_n^n}{n!}.\square$$

Comparando la serie a la derecha de la desigualdad con la serie definida como e^x, vemos que son idénticas salvo que debemos reemplazar x por S_n. Esto es correcto, puesto que S_n es un número real tal como lo es x. Entonces

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq e^{S_n},$$

a continuación escribimos explícitamente S_n: $e^{S_n} = e^{a_1\,+\,a_2+...+a_n}$ y usando la siguiente propiedad del número e: $e^{x+y} = e^x e^y$, la expresión anterior se transforma en

$$e^{S_n} = e^{(a_1\,+\,a_2+...+a_{n-1})+a_n} = e^{(a_1\,+...+\,a_{n-1})}\,e^{a_n} = ... = e^{a_1}e^{a_2}\cdots e^{a_n}.$$

Ahora procedemos a deshacer el camino; recordando la definición de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...$ y que todos los a_i son positivos para $i = 1, 2, ..., n$, entonces $e^{a_i} \geq (1 + a_i)$ puesto que le hemos restado solamente números positivos al desarrollo en serie (como $a_i^2/2!$ por ejemplo, que, entre muchos otros, falta en la serie). Reemplazando este resultado en $e^{S_n} = e^{a_1}e^{a_2}\cdots e^{a_n}$, se obtiene el resultado pedido.$\square$

I.3.2. Números complejos.

Hay otra serie que nosotros usaremos más adelante para encontrar algunas relaciones trigonométricas. Antes de mostrarla necesitamos recordar las propiedades básicas de los números complejos.

Por **definición** i es el número cuyo cuadrado es -1. Se denomina i (por imaginario), y cumple con la condición $i^2 = -1$. En general un número complejo es aquel que tiene dos componentes, una real y otra imaginaria que se caracteriza por estar multiplicada por i. Se escribe como $z = a + ib$, donde a y b son números reales. Para multiplicar estos números se opera **igual** que con los reales. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} z_1 * z_2 & \text{donde} \\ z_1 = a + i * b & \text{y} \quad z_2 = c + i * d, \end{array}$$

con a, b, c y d reales. En este caso se opera como en una multiplicación de dos binomios, pero teniendo presente las propiedades del número i que se resumen a continuación:

$$\begin{aligned} i &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= +1 \\ i^5 &= i \\ &\vdots \\ &\ldots \end{aligned} \tag{I.15}$$

El resultado de la multiplicación es

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (a + i * b)(c + i * d) \\ &= ac + i * ad + i * bc + i * b * i * d \\ &= (ac - bd) + i * (ad + bc). \end{aligned} \tag{I.16}$$

Lo expuesto es lo mínimo que necesitamos saber para operar con estos números.

Otro número irracional es $\pi = 3,141592...$. Estos números, **e** y π, se pueden combinar en forma sorprendente. Nos referimos al siguiente resultado que se obtiene extendiendo la definición inicial que dimos de e^x. Aquí formalmente reemplazamos x por un número imaginario puro $i\,\pi$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= -1 \\ e^{i\pi} &= 1 + \tfrac{(i\pi)}{1!} + \tfrac{(i\pi)^2}{2!} + \tfrac{(i\pi)^3}{3!} + \tfrac{(i\pi)^4}{4!} + ... \\ e^{i\pi} &= 1 + i\pi - \tfrac{\pi^2}{2!} - i\tfrac{(\pi)^3}{3!} + \tfrac{\pi^4}{4!} + i\tfrac{\pi^5}{5!} + ... \\ &= (1 - \tfrac{\pi^2}{2!} + \tfrac{\pi^4}{4!} - \tfrac{\pi^6}{6!} \pm ...) + \\ &\quad i(\pi - \tfrac{\pi^3}{3!} + \tfrac{\pi^5}{5!} \pm ...) \end{aligned} \tag{I.17}$$

Lo que hicimos fue reemplazar x en los términos de la serie definida por el "sobrenombre" e^x por $i\,\pi$ y desarrollar cada uno de los términos usando las propiedades de i enumeradas arriba. El valor obtenido es – 1. Este resultado podemos comprobarlo en forma numérica para convencernos que es correcto. Esta es una de las ventajas del computador. Una tarea muy tediosa como sumar, por ejemplo, 70 términos de la serie anterior, se puede hacer rápidamente usando el mismo programa que el utilizado en la serie 1/(1- x).

Ejercicio

Sumar un cierto número de términos de cada una de las series desarrolladas arriba y comprobar que –dada una cierta precisión, por ejemplo una parte en 10^6–, se cumple efectivamente que $e^{i\,\pi} = -1.\square$

NOTA

Primero debe decidir acerca del número de decimales con los que se propone verificar dicha igualdad, por ejemplo: tres decimales, es decir 3,142. Después, procede a sumar los términos de la serie hasta que las cifras significativas que uno se ha fijado –tres en este caso– no se alteren al sumar los términos siguientes de la serie.□

Otra serie famosa, se obtiene al introducir un número complejo puro (es decir que tiene sólo una componente imaginaria) como exponente en **e**. Este número lo escribimos como $i\,\cdot x$, donde x es un número real arbitrario. La serie queda ahora :

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + \tfrac{(ix)}{1!} + \tfrac{(ix)^2}{2!} + \tfrac{(ix)^3}{3!} + \tfrac{(ix)^4}{4!} + ... \\
e^{ix} &= 1 + ix - \tfrac{x^2}{2!} - i\tfrac{(x)^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + i\tfrac{x^5}{5!} + ... \\
&= (1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} \pm ...) + \\
&\quad i(x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} \pm ...)
\end{aligned} \tag{I.18}$$

$$e^{ix} \equiv cos\,x + isen\,x, \tag{I.19}$$

En esta expresión, cos x y $sen\,x$ constituyen un **apodo** para cada una (la parte real y la parte imaginaria) de las series infinitas que se obtuvieron. La idea de asociar un nombre con una serie es una forma de resaltar las propiedades de la serie. Si una serie no tiene propiedades especiales, entonces no recibe un nombre.

Cada una de las series anteriores tiene propiedades espectaculares y por esta razón reciben un nombre que las distingue entre cualquier otra. Las propiedades de estas últimas dos series se pueden obtener geométricamente. Son, de hecho, las funciones **seno** y **coseno** que uno define en Trigonometría utilizando un triángulo rectángulo. Este es el tema de la siguiente sección.

La definición de cada una de estas series a partir de la separación en parte real e imaginaria es:

$$cos\, x \equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm ... \qquad \text{(I.20)}$$

$$sen\, x \equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm ... \qquad \text{(I.21)}$$

Esta serie es la que debería evaluar internamente una calculadora para obtener el valor del seno de un ángulo. Sin embargo, para mejorar su rapidez, *las calculadoras evalúan esta serie mediante una aproximación*, la aproximación de Padè, que es un cuociente de polinomios *finitos* que aproximan esta función (y otras) con la precisión que uno desee.

El cálculo numérico es, en cierto sentido, un arte.

I.4. TRIGONOMETRIA.

I.4.1. Unidades angulares: grados y radianes.

Comenzamos con la definición de las unidades angulares más conocidas: grados (°), minutos (') y segundos (").

Estas unidades son *sexagesimales*; cada unidad contiene 60 subunidades, por ejemplo: 1 minuto contiene 60 segundos. El sistema establecido en las mediciones de longitud es *decimal*, 1 metro contiene 10 decímetros, un decímetro 10 centímetros,...

El sistema sexagesimal nació en Babilonia, donde se usó en las mediciones astronómicas que, en ese tiempo, consistían en determinar las posiciones de los planetas y estrellas más brillantes con el objeto de establecer un calendario y predecir eclipses, entre otros fines.

Los grados, minutos, segundos están definidos a partir de una división en partes iguales, de la longitud de una circunferencia.

Las equivalencias son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
360^\circ &\equiv \text{ un giro completo alrededor de un circunferencia.}\\
180^\circ &\equiv 1/2 \text{ vuelta alrededor de un circunferencia.}\\
90^\circ &\equiv 1/4 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.}\\
45^\circ &\equiv 1/8 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.}\\
1^\circ &\equiv 1/360 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.}\\
1^\circ &\equiv 60', \text{ sesenta minutos.}\\
1' &\equiv 1/216{,}000 \text{ de vuelta alrededor de una circunferencia.}\\
1'' &= 1/60 \text{ de un minuto.}\\
1'' &\equiv 1/12{,}960{,}000 \text{ de vuelta alrededor de una circunferencia.}
\end{aligned}
$$

En toda definición de unidades, existe un grado de arbitrariedad. En física, la usamos para redefinir esta unidad con una orientación geométrica, acorde con nuestros intereses.

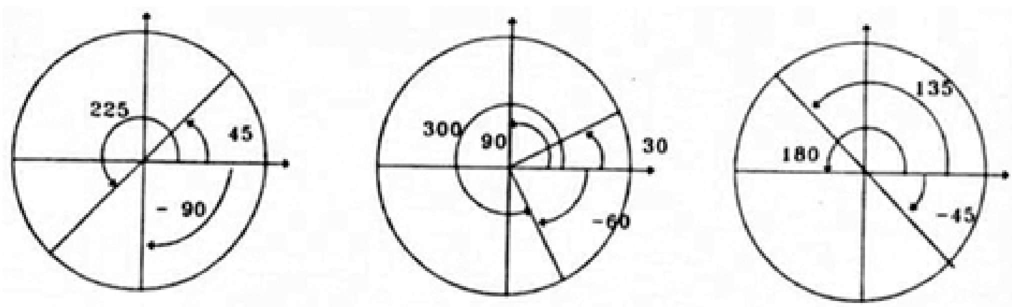


Figura I.5: En la Figura se muestra la medida de diversos ángulos como $180^\circ, 90^\circ, 45^\circ$, y otros. Se define además, el sentido positivo y negativo de un ángulo.

El nombre de esta nueva unidad angular, que definimos a continuación, es **radián**.

Definición de Radián

La magnitud de un ángulo medido en **radianes** *está dada por la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividida por el valor del radio de la circunferencia.*

Esta definición de **radián** es independiente del radio de la circunferencia. (Si divide una pizza en diez partes iguales, el ángulo central que subtiende cada pedazo es el mismo, cualquiera sea el tamaño de la pizza).

La longitud de la circunferencia de un círculo unitario es $(2\pi \cdot 1)$. De acuerdo a la definición anterior, el ángulo central que subtiende dicho arco es 2π radianes.

Esta nueva definición tiene una gran ventaja: al multiplicar el ángulo central (medido en radianes) por el radio de la circunferencia, automáticamente se obtiene la longitud del arco subtendido por dicho ángulo.

Longitud del arco de $\odot$ = [Angulo subtendido (en radianes)] $\times$ [Radio de la $\odot$].

Si medimos el ángulo subtendido en grados, no obtendremos una igualdad: el largo de una circunferencia es $2\,\pi\,r$ y el ángulo central que subtiende toda la circunferencia es 360°. Este ejemplo define la nueva unidad angular que denominamos radián:

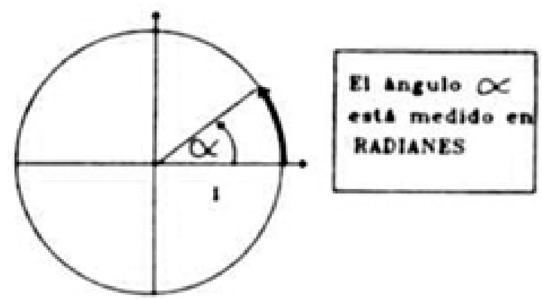
$$360^\circ = 2\,\pi = 6,28318... \qquad \text{radianes.}$$

La equivalencia con los grados es:

$$1 \text{ radián} \quad = \frac{360^\circ}{2\,\pi} = 57,29^\circ,$$

a partir de esta equivalencia podemos obtener las siguientes relaciones:

90° equivalen a $(\pi/2)$ radianes,
45° equivalen a $(\pi/4)$ radianes,
30° equivalen a $(\pi/6)$ radianes,
60° equivalen a $(\pi/3)$ radianes.



Esta unidad angular es la más **usada en física**.

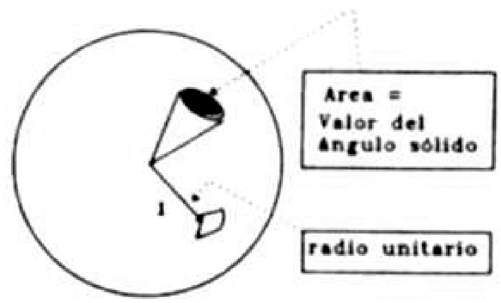
Ejercicio

Encuentre, numéricamente, el valor de $sen\,\alpha$ para $\alpha = 0,05$ radianes, de acuerdo a la serie definida con este nombre en la sección anterior. ¿Cuál es el valor de α en grados? ¿Cuál es el error cometido al aproximar $sen\,\alpha \approx \alpha$? (Sume tres términos de la serie y compare la diferencia).$\Box$

I.4.2. Angulo sólido.

Podemos ahora definir un **ángulo sólido** como una extensión natural de la definición anterior. Si allí usamos una circunferencia, ahora recurrimos a una esfera. Para obtener directamente el valor del ángulo sólido, usamos una **esfera de radio unitario**.

Si sombreamos un disco en la superficie de la esfera de la Figura y dibujamos, desde el centro de la esfera el cono que subtiende a dicho disco, la apertura del vértice de este cono se denomina **ANGULO SOLIDO**. Este ángulo sólido se mide entonces por el **área** recortada sobre la esfera de radio unitario, por el cono con vértice en su centro.



Como la superficie de una esfera es $4\pi r^2$, el máximo valor que puede tomar un ángulo sólido en la esfera de radio unitario es 4π

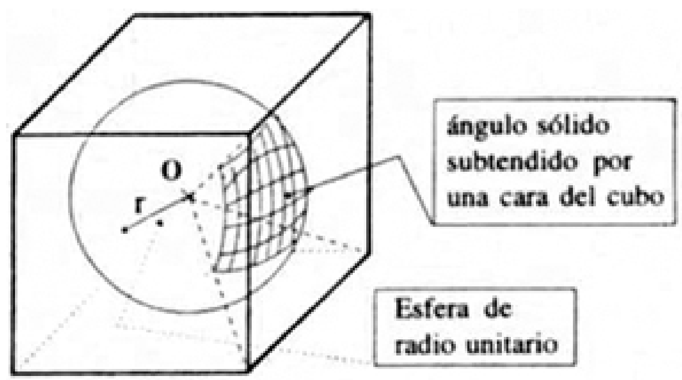


Figura I.6: Angulo sólido subtendido por una de las caras de un cubo con respecto al centro del mismo. La esfera tiene radio unitario.

Ejemplo

Calcular el ángulo **sólido** que subtiende **una** de las caras de un cubo mirado desde el centro del cubo.

Si dibujamos una esfera de radio unitario cuyo centro coincida con el centro del cubo podemos deducir inmediatamente el valor del ángulo sólido.

El razonamiento es el siguiente: La esfera completa y centrada subtiende las seis caras del cubo y por lo tanto le corresponde un ángulo sólido de 4π.

A la fracción de la superficie de la esfera que subtiende una cara del cubo, le corresponde un ángulo sólido de $\dfrac{4\pi}{6} = 2\pi/3$. En otras palabras, los rayos de luz que nacen en el centro de la esfera y que atraviesan la cara del cubo, proyectan sobre la esfera una superficie igual a $\frac{4\pi}{6}$.

NOTA

Al definir el ángulo sólido subtendido por una superficie, **SIEMPRE** debemos especificar la posición del centro de la esfera con respecto a la cual se midió.

Ejemplo

Calcular el ángulo sólido que subtiende un cubo, medido desde un punto ubicado justo en el centro de una de sus caras (ver Figura [**??**]).

(Respuesta: $2\,\pi$).

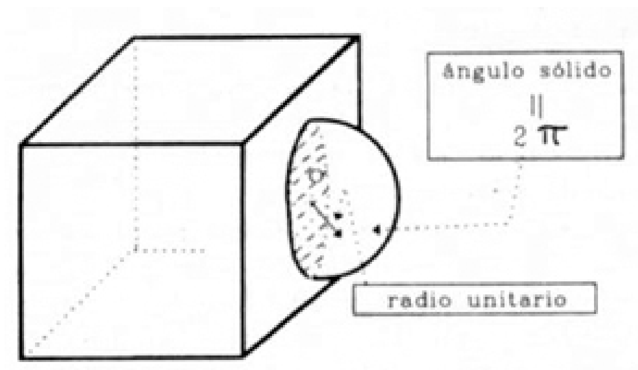


Figura I.7: Al dibujar la esfera con centro en el punto de simetría de las caras, vemos que el ángulo sólido subtendido (área de la esfera) es la mitad de la superficie total de la esfera.

I.4.3. Funciones seno y coseno: definición geométrica.

El $\triangle$ OBA es un triángulo **rectángulo**. En él definiremos las funciones seno y coseno.

Seno y Coseno de un ángulo

En un triángulo rectángulo $sen\,\alpha$ es la razón entre el **cateto opuesto** al ángulo α y la hipotenusa.

Coseno de α, ($cos\,\alpha$) es la razón entre el **cateto adyacente** al ángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo en la figura **??**.

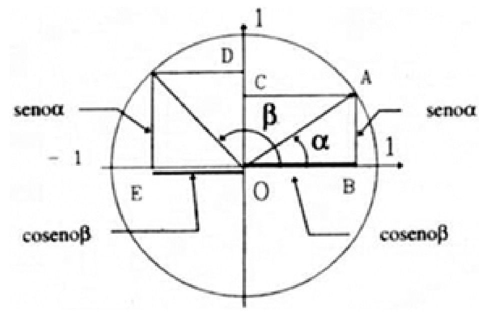


Figura I.8: El valor de $sen\,\alpha$ está dado por la proyección del vector OA sobre el eje vertical y el valor del coseno es la proyección sobre el eje horizontal. El radio de la circunferencia es la unidad

Al igual que los casos anteriores es conveniente referir las medidas a una circunferencia de radio unitario. Como en este caso la hipotenusa es la unidad, el valor del coseno está dado directamente por la magnitud del cateto adyacente al ángulo y el seno por la magnitud del cateto opuesto. Las propiedades encontradas para este triángulo serán válidas también para la familia de triángulos semejantes a él.

Definición

$$\begin{aligned} sen\,\alpha &\equiv \frac{|AB|}{|OA|} = |AB|, \qquad |OA| = 1, \\ cos\,\alpha &\equiv \frac{|OB|}{|OA|} = |OB|, \qquad |OA| = 1. \end{aligned} \tag{I.22}$$

A continuación se incluyen algunos valores de estas funciones que debemos *recordar*:

$$sen\,0^\circ = 0, \qquad \cos\,0^\circ = 1,$$

$$sen\,90^\circ = 1, \qquad \cos\,90^\circ = 0,$$

$$sen\,45^\circ = 1/\sqrt{2}, \qquad cos\,45^\circ = 1/\sqrt{2},$$

$$sen\,30^\circ = 1/2, \qquad cos\,30^\circ = \sqrt{3}/2,$$

$$sen\,60^\circ = \sqrt{3}/2, \qquad cos\,60^\circ = 1/2,$$

Propiedades de estas funciones

1.– Como en un triángulo rectángulo se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, y en el triángulo de la Figura **??**, $a = sen\alpha$, $b = \cos\,\alpha$ y $c = 1$, entonces

$$(sen\,\alpha)^2 + (\cos\,\alpha)^2 = 1 \tag{I.23}$$

para **cualquier ángulo** α.

(Por convención $(sen\,\alpha)^2 \equiv sen^2\alpha$.)

Esta igualdad se puede comprobar con la lista de valores para el seno y el coseno que se incluyó más arriba.

2.– De la circunferencia de radio unitario se obtiene que,

$sen\,\alpha = |AB| \equiv |OC| \quad$ (puesto que $CA\,||\,OB$),

al mismo tiempo, $\quad |OC| = \dfrac{|OC|}{|OA|} \equiv \cos(90-\alpha)$,

de acuerdo a la definición de coseno. De aquí tenemos:

$$cos(90-\alpha) = sen\,\alpha. \tag{I.24}$$

Esta igualdad se puede verificar con los valores que aparecen en la lista de funciones seno y coseno incluídas anteriormente.

3.– Otra propiedad que escribimos a continuación, sin acompañar una demostración es

$$sen\,2\,\alpha = 2\,sen\,\alpha\,\cos\,\alpha. \tag{I.25}$$

Ejercicio

Usando la misma figura demuestre:

$$sen(90-\alpha) = \cos\alpha, \quad sen\,(180°) = 0, \quad \cos\,(180°) = -1,$$

$$sen\,(270°) = -1, \quad \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad sen(-30°) = -1/2.$$

Definición

La rotación de los punteros del reloj se define como SENTIDO NEGATIVO. Obviamente el SENTIDO POSITIVO es el opuesto y se indica en la Figura.

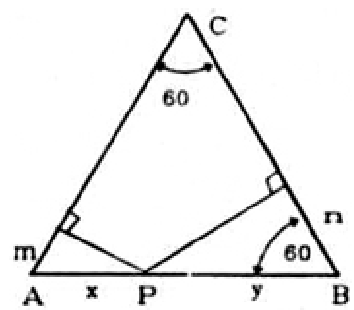
Ejemplo

Desde un punto P de un lado de un triángulo equilátero de lado a, se trazan dos perpendiculares a los lados. Los valores m y n son datos (valores conocidos). Encontrar el valor del área del triángulo en función de m y n. (Ver Figura).

Solución:

Defino $x = AP$, $y = PB$ con $x + y = a$.

$$
\begin{aligned}
x\,cos\,60° &= m \\
y\,cos\,60° &= n \\
m/x = cos\,60° &= \tfrac{1}{2} \\
n/y = cos\,60° &= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$



Recordar que el valor de cos α y $sen\,\alpha$ son, *respectivamente* menores o iguales que la unidad, siempre.

De las igualdades anteriores y observando además la relación entre la altura y el lado a en un triángulo equilátero obtenemos:

$$x = 2m, \quad y = 2n, \qquad \text{por lo tanto} \qquad a = 2(m+n).$$

El área de un triángulo es $1/2\times$ base $\times$ altura $= 1/2\times\, a\times\, h = 1/2\times\, a\times\, a\sqrt{3}/2$, porque $h = a\times$ cos $30° = a\,\sqrt{3}/2$.

De esta forma, el área resulta ser

$$\text{Area} = \sqrt{3}\,(m+n)^2.$$

Ejercicio

Resuelva el problema anterior usando semejanza de triángulos (Ver Figura).

Indicación: En la figura se observa la relación entre la altura EB y el tramo MD que determina el trazo m. Aquí sólo se usa semejanza de triángulos.

$$\Delta AMD \simeq \Delta ABE$$

$$\frac{AE}{m} = \frac{AB}{AM}$$

$$a/(2m) = a/x \quad \text{ó} \quad x/m = 2$$

Análogamente $y/n = 2$ y el resto prosigue en la misma forma que la demostración anterior.

Suma y Resta de Funciones Trigonométricas

Repasemos algunas igualdades,
$sen(180 - \alpha) = sen\,\alpha$ (como se puede demostrar a partir de la figura).
$\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$.

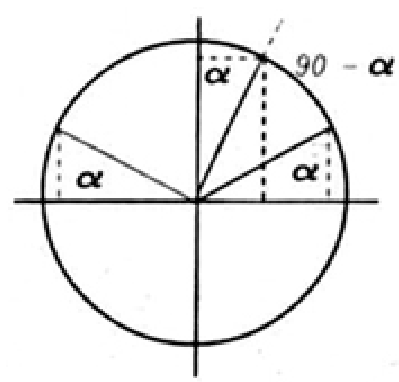


Figura I.9: De la Figura se desprende que $sen(180 - \alpha) = sen\,\alpha$, y otras igualdades trigonométricas citadas anteriormente en el texto.

Del triángulo de la Figura **??**, después de un cálculo tedioso, se obtiene la igualdad siguiente:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\ \cos\,\beta + \cos\,\alpha\ sen\,\beta. \tag{I.26}$$

Usando el ΔABC de la Figura **??**, y comenzando por el segundo miembro de la igualdad anterior, podemos demostrar esta identidad trigonométrica.

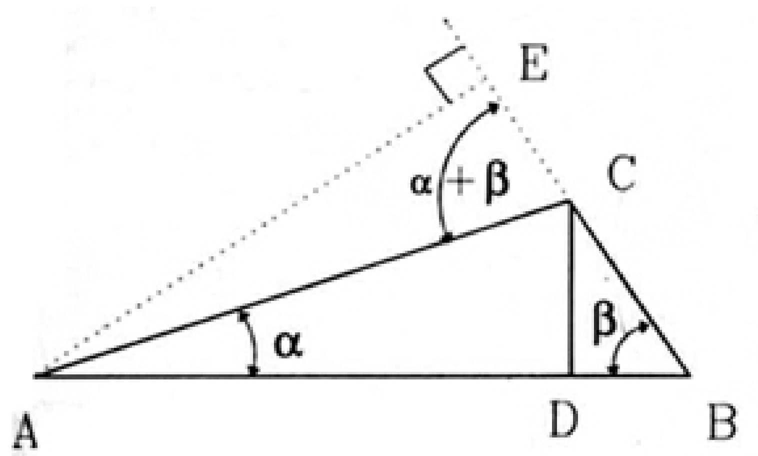


Figura I.10: Triángulo ΔABC usado para encontrar geométricamente el valor de $sen(\alpha+\beta)$ en función de senos y cosenos de los ángulos α y β.

$$\cos\,\alpha\, sen\,\beta + \cos\,\beta\, sen\,\alpha = \frac{1}{|AC|\bullet|BC|}\left[|AD|\bullet|CD| + |BD|\bullet|CD|\right]$$

pero, los dos productos que aparecen entre corchetes son formas equivalentes de calcular el área de este triángulo:

$$\begin{aligned}|AD|\bullet|CD| &= 2\times\ \text{área del}\ \Delta ADC,\\ |BD|\bullet|CD| &= 2\times\ \text{área del}\ \ \Delta BCD\end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en la expresión original

$$\cos\,\alpha\, sen\,\beta + \cos\,\beta\, sen\,\alpha = 2\times(\text{área del}\ \ \Delta ABC)/\left[|AC|\bullet|BC|\right],$$

ahora recordando que el área del triángulo se puede escribir como

$$\frac{1}{2}\,|AE|\bullet|BC|,\ \ \text{obtenemos}$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\,|AE| \bullet |BC|/|AC| \bullet |BC| = AE/AC \equiv sen(\alpha+\beta).$$

Esta demostración constituye un buen ejercicio para practicar las definiciones de seno y coseno. El resultado obtenido es muy importante y será usado con bastante frecuencia a continuación.

Otra igualdad trigonométrica tan usada como la anterior es

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha\ \ \cos\,\beta - sen\,\alpha\ sen\,\beta. \tag{I.27}$$

No intentaremos demostrar esta expresión usando geometría. Recurriremos esta vez a la definición $e^{i\alpha} = cos\,\alpha + isen\,\alpha$, dada anteriormente. Es, sin duda, más abstracta pero mucho más elegante y *útil; todas las igualdades trigonómetricas se pueden obtener manipulando esta expresión.* Su desventaja es sin duda, la poca familiaridad que, a este nivel de conocimientos, se tiene con ella.

Ejercicio

Encontrar el valor de $e^{i(\alpha+\beta)}$ y demostrar que contiene las igualdades descritas anteriormente

Indicación

Primero, recordemos cómo se multiplican números complejos.

$$\begin{aligned} Z_1 \quad &= a + ib, \\ Z_2 \quad &= x + iy, \quad i^2 = -1 \\ Z_1 \bullet Z_2 \quad &\equiv (a+ib) \bullet (x+iy) = (ax - by) + i(bx + ay) \end{aligned}$$

Se multiplican como un par de binomios, separando la parte real de la imaginaria (aquélla que contiene "i" como factor común).

Con los números reales sabemos que se cumple la siguiente igualdad

$$a^x \bullet a^y = a^{(x+y)}. \tag{I.28}$$

Con los números complejos y en especial con $e^{i\alpha}$ se opera de la misma forma.

$$e^{i\alpha} \bullet e^{i\beta} = e^{i\alpha + i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \tag{I.29}$$

En seguida, se debe reemplazar en la izquierda y derecha de la última expresión sus respectivas definiciones $e^{i\alpha} = \cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha$,

$$e^{i\alpha+i\beta} \equiv cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta),$$
$$e^{i(\alpha+\beta)} \equiv e^{i\alpha} \bullet e^{i\beta} = (cos\,\alpha + isen\,\alpha) \bullet (cos\,\beta + isen\,\beta),$$

efectuando el producto indicado en la última igualdad, siempre respetando las reglas de multiplicación de números complejos, se obtiene

$$cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta) =$$

$$= (\cos\,\alpha\,\cos\,\beta - sen\,\alpha\;sen\,\beta) + i\,(sen\,\alpha\,\cos\,\beta + \cos\,\alpha\;sen\,\beta),$$

igualando la parte real del lado izquierdo de la ecuación con la parte real de la derecha de la ecuación, obtenemos una de las identidades buscadas. La misma operación se repite para la parte imaginaria y aparece otro de los resultados obtenidos anteriormente en forma geométrica. □

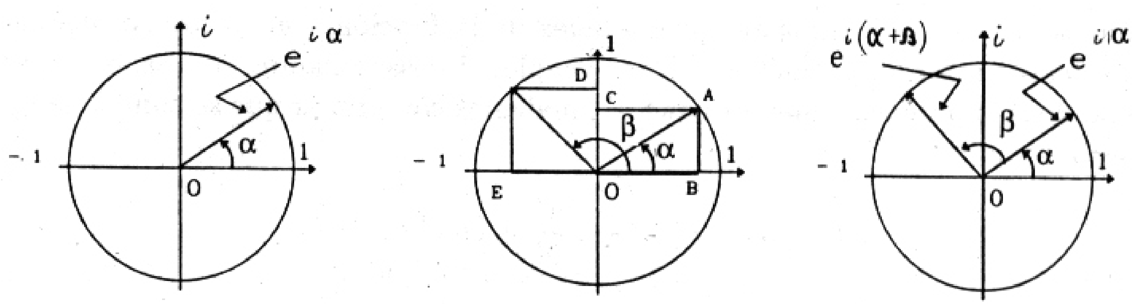


Figura I.11: A la izquierda se muestra el vector $e^{i\alpha}$. En el disco de la derecha se grafica $e^{i(\alpha+\beta)}$. El sumar un ángulo al vector anterior, sin cambiar su módulo, es equivalente a rotarlo en el ángulo β

Ejercicio

Demostrar que

$$e^{i\alpha} \bullet e^{-i\alpha} = e^{i\alpha-i\alpha} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Nota: Use la definición de $e^{i\,\alpha}$ y la siguiente propiedad de las funciones trigonométricas: $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$ y $\cos(-\alpha) = \cos\,\alpha$. Esta propiedad es válida para todo ángulo α. □

Es importante recordar que en la definición de las series

$$sen\,\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} \pm \dots$$

$$cos\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} \pm \dots$$

el ángulo, **siempre debe ser expresado en radianes**.

Estas series tienen las mismas propiedades deducidas anteriormente en forma geométrica. Por ejemplo, si desarrollamos la serie del seno y coseno conservando sólo potencias menores que α^6, podemos comprobar que se cumple la igualdad $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Veamos

$$\begin{aligned}
(sen\,\alpha)^2 &= \alpha^2 - 2\tfrac{\alpha^4}{3!} + O(\alpha^6),\\
(cos\,\alpha)^2 &= 1 - \alpha^2 + \tfrac{\alpha^4}{2!2!} + 2\tfrac{\alpha^4}{4!} + O(\alpha^6),\\
(cos\,\alpha)^2 &= 1 - \alpha^2 + \tfrac{\alpha^4}{3},\\
sen^2\alpha + cos^2\alpha &= 1 + 0 + O(\alpha^6).
\end{aligned}$$

Note que en la serie resultante, cada una de las potencias de α debe anularse en forma independiente, porque la igualdad anterior es válida para todo valor del ángulo α.

El símbolo $O(\alpha^6)$ indica que hemos ignorado las potencias iguales o superiores a α^6.

Ejercicio

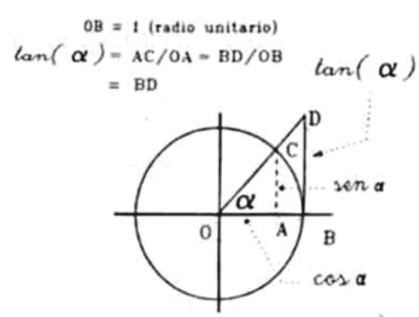
Demostrar que los términos que contienen las potencias de α^6, también se anulan en la expresión de $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

I.4.4. La Función tangente.

La **tangente** de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el adyacente en un triángulo rectángulo.

$$\tan\,\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{(I.30)}$$

La función tangente, a diferencia de las funciones seno y coseno, puede tomar cualquier valor entre $+\infty$ y $-\infty$.



Algunos valores que aparecen frecuentemente se tabulan a continuación:

$$
\begin{array}{ll}
\tan(\pi/2) & = +\infty, \\
\tan 0 & = 0, \\
\tan(-\pi/2) & = -\infty, \\
\tan(\pi/4) = \tan 45^\circ & = 1, \\
\tan(\pi/3) = \tan 60^\circ & = \sqrt{3}, \\
\tan(\pi/6) = \tan 30^\circ & = 1/\sqrt{3}, \\
\tan(-\pi/3) = \tan -60^\circ & = -\sqrt{3}
\end{array}
$$

Ejercicio

Demostrar que

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\,\alpha + \tan\,\beta}{1 - \tan\,\alpha \bullet \tan\,\beta}. \quad \square$$

Al conjunto de las funciones trigonométricas ya definidas le podemos sumar el inverso multiplicativo de cada una de ellas. Esto es análogo al caso de los números reales: por cada número real (o complejo) distinto de cero, existe un inverso ($x\epsilon\ \Re, x \neq 0$)

$$x \bullet \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \bullet x.$$

$$cotan\,\alpha \bullet tan\,\alpha = 1, \quad cotan\,\alpha \equiv \text{cotangente de } \alpha = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{BD} \tag{I.31}$$

$$
\begin{aligned}
sen\,\alpha \bullet cosec\,\alpha = 1, &\qquad cosec\,\alpha = \tfrac{AC}{CB}, \\
cos\,\alpha \bullet sec\,\alpha = 1, &\qquad sec\,\alpha = \tfrac{AC}{AB}, \\
cosec\,\alpha &\qquad \equiv \text{cosecante de } \alpha, \\
sec\,\alpha &\qquad \equiv \text{secante de } \alpha.
\end{aligned} \tag{I.32}
$$

IMPORTANTE

Las siguientes *aproximaciones* son usadas con mucha frecuencia en física.

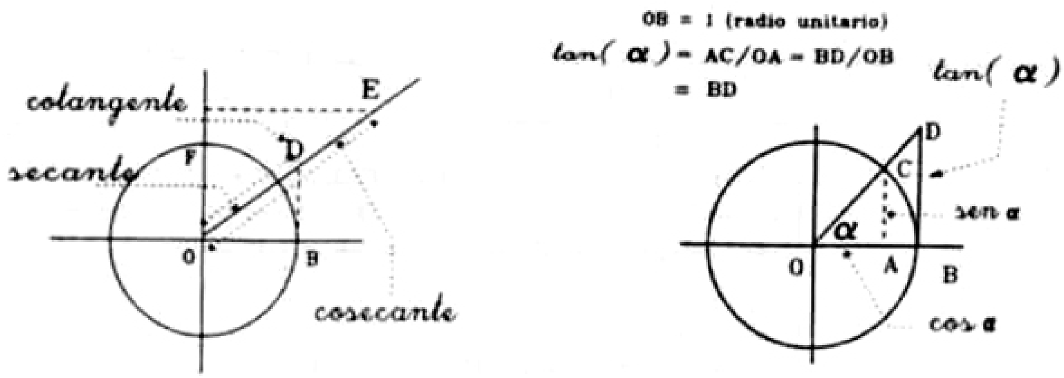


Figura I.12: Resumen de las definiciones geométricas de las funciones: cotangente, cosecante y secante. La circunferencia tiene radio unitario.

Si α es muy pequeño ($\alpha \ll 1$), se cumple que:

$$\begin{aligned} sen\,\alpha \simeq&\ \ \alpha + O(\alpha^3) \\ cos\,\alpha \simeq&\ \ 1 - \tfrac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \\ \tan\,\alpha = sen\,\alpha/cos\,\alpha \simeq&\ \ \alpha/(1-\alpha^2) \simeq \alpha(1+\alpha^2) \\ \simeq&\ \ \alpha + O(\alpha^3) \end{aligned} \tag{I.33}$$

entonces, a primer orden en α, (es decir:despreciando todoas las potencias de α superiores a 1), se cumple:

$$\tan\,\alpha \simeq sen\,\alpha \simeq \alpha. \quad \Box \tag{I.34}$$

El ángulo α debe ser medido en radianes para que estas aproximaciones sean válidas.

Ejercicio

Usando estos resultados, desarrolle tan α en serie de potencias en α. Encuentre sólo los dos primeros términos de este desarrollo.

Respuesta:tan $\alpha \simeq \alpha + \alpha^3/3$.

I.4.5. Teorema del seno

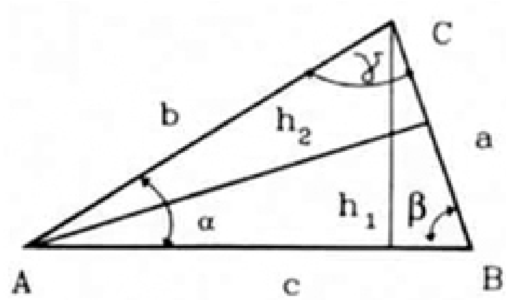
Usando sólo geometría podemos encontrar una relación entre el seno de un ángulo interior de un triángulo y la longitud del lado que lo enfrenta. Esta relación es el teorema del seno.

$h_1 = b\,sen\,\alpha \quad h_1 = a\,sen\,\beta$

$\Longrightarrow \dfrac{a}{sen\alpha} \quad = \dfrac{b}{sen\beta}$

$h_2 = c\,sen\,\beta \quad h_2 = b\,sen\,\gamma$

$\Longrightarrow \dfrac{b}{sen\,\beta} \quad = \dfrac{c}{sen\,\gamma}$



De aquí se obtiene *el teorema del seno*:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}. \tag{I.35}$$

I.4.6. Teorema del coseno.

Usando el Teorema de Pitágoras en la misma Figura anterior, se deduce que:

$h_2^2 = b^2 - x^2, \qquad h_2^2 = c^2 - y^2,$

$b^2 - x^2 = c^2 - y^2, \qquad y = a - x,$

expresando y en función de x: $\quad b^2 = c^2 - a^2 + 2\,a\,x,$

pero: $x = b\,cos\,\gamma$,

introduciendo este término en la última igualdad, obtenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\,\gamma. \tag{I.36}$$

Ejercicio

Demostrar que

$$\begin{aligned} a^2 = & \quad b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos\,\alpha, \\ b^2 = & \quad a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,cos\,\beta, \\ c^2 = & \quad a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,\gamma. \end{aligned} \tag{I.37}$$

Ejercicio

Descubra una regla nemotécnica que le permita recordar las fórmulas anteriores.

I.5. AREA ENCERRADA POR UNA CURVA

Más adelante es preciso evaluar el área encerrada bajo una curva y allí haremos uso de algunas de las sumas introducidas aquí.

Esta operación de evaluar el área bajo una curva, es lo que en cálculo se denomina *integrar una función*.

Cabe notar que aun en los casos más simples se realiza este tipo de cálculo –evaluar el área bajo una curva–, pero sin necesidad de recurrir a las sumatorias (o a la integral, si uno tiene conocimientos de cálculo infinitesimal). Por ejemplo, en el movimiento de una partícula con aceleración uniforme, es necesario calcular el área encerrada bajo la curva velocidad vs. tiempo, si desea conocer el camino recorrido por esta partícula. Aquí la *curva* es una recta y el valor del área encerrada corresponde al área de un trapezoide, cuya fórmula es conocida.

Para una partícula que soporta una aceleración variable, la curva es más complicada y, necesariamente, debemos recurrir a un método numérico para calcular, primero su velocidad y, posteriormente la distancia recorrida.

I.5.1. Area encerrada por la curva $y = x^2$.

La función $y = x^2$ aparecerá en varios problemas más adelante y por esta razón la estudiaremos en detalle.

Para calcular el área encerrada por una curva sumaremos el área de cada uno de los rectángulos que aparecen en la Figura **??** acotados (superior o inferiormente) por la curva. Este es el procedimiento más elemental, existen otros métodos más sofisticados que contienen errores más pequeños. Consideraremos una de estas otras aproximaciones posteriormente.

Calculemos una cota *inferior* para esta área; sumemos los rectángulos achurados, que se ubican *debajo* de la curva:

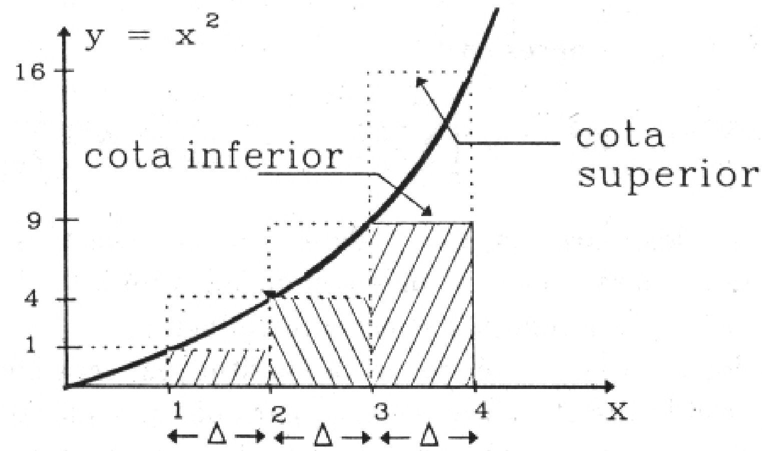


Figura I.13: El área bajo la curva se ha descompuesto en una suma de rectángulos. Una familia de rectángulos dará como resultado un valor mayor para el área buscada, y la otra familia de rectángulos, un valor menor.

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100} (n-1)^2 \cdot \Delta \tag{I.38}$$

Designamos la base del rectángulo que se muestra en la Figura **??** como Δ. El factor $(n-1)^2$ representa el valor mínimo de $y = x^2$ en el intervalo enésimo. En otras palabras, trazamos un rectángulo que toque a la curva $y = x^2$ en el punto más bajo de cada uno de los intervalos.

En seguida desarrollamos $(n-1)^2 = n^2 - 2\,n + 1$ y usamos la siguientes propiedades de las sumatorias (válidas si las sumatorias son finitas).

$$\sum_{n=1}^{100} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{100} a_n + \sum_{n=1}^{100} b_n, \tag{I.39}$$

$$\sum_{n=1}^{100} \lambda \bullet a_n = \lambda \sum_{n=1}^{100} a_n, \qquad \lambda = \text{constante}. \tag{I.40}$$

La sumatoria se transforma entonces en:

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100} (n-1)^2 \cdot \Delta = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 \cdot\, \Delta - 2 \sum_{n=1}^{100} n \cdot\, \Delta + \sum_{n=1}^{100} 1 \cdot\, \Delta \right].$$

Para simplificar los cálculos, haremos $\Delta = 1$, de esta forma este término no aparece en la sumatoria. En general, para funciones más complicadas que la actual, el valor de Δ se hace depender de n, con el objeto de minimizar el error introducido.

En algunos de los cálculos posteriores –en otros capítulos–, esta longitud, Δ, será incluída en la suma, con el objeto de lograr un resultado exacto.

Volviendo a nuestra sumatoria, observamos que después de esta simplificación, la expresión queda

$$\text{Area}_{INF} = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 - 2 \sum_{n=1}^{100} n + \sum_{n=1}^{100} 1 \right].$$

En la Figura se aprecia que el área denominada con INF es MENOR que la que el área encerrada bajo la curva $y = x^2$, que es la que debemos calcular.

Ahora si tomamos el rectángulo cuya altura corresponde al valor máximo de la función en el intervalo, entonces obtenemos

$$\text{Area}_{SUP} = \sum_{n=1}^{100} n^2. \tag{I.41}$$

Nuevamente hemos tomado la longitud de la base del rectángulo, Δ, igual a la unidad. También, en la Figura se aprecia que el Area_{SUP} es MAYOR que el área que deseamos estimar.

Hemos obtenido una cota superior e inferior para el valor del área encerrada por la curva $y = x^2$. No es difícil aceptar que un valor más cercano al valor exacto asignado al área encerrada bajo esta curva, se obtendrá promediando estas dos cotas.

Se desprende de aquí que para evaluar numéricamente esta área necesitamos, conocer el valor de las sumatorias que han aparecido hasta aquí: $\sum_{n=1}^{N} n$ y $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

I.5.2. Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n$

A pesar que el resultado de esta sumatoria es el mismo si N es par o impar, analizaremos ambos casos en forma independiente.

Consideremos primero el caso de N par.

$$\sum_{n=1}^{N} n = \overbrace{1 + \underbrace{2 + \overbrace{3 + \underbrace{4 + ... + (N-3)} + (N-2)} + (N-1)} + N}$$

Una de las formas de obtener el valor de esta sumatoria consiste en reagrupar los términos en la forma señalada: aquellos unidos por el extremo de cada una de las llaves indicadas en la fórmula, y posteriormente sumarlos de a pares. El valor que toma cada uno de estos pares es $(N+1)$. Ahora si N *es par* el número de llaves que debemos considerar es $N/2$ puesto que la suma tiene N términos, y el valor de la suma es $N/2$ veces $(N+1)$:

$$\sum_{n=1}^{N} n = (N+1)\frac{N}{2}. \tag{I.42}$$

N impar.

Si N es impar, la suma de cada par de términos tiene el mismo valor que antes $(N+1)$, **excepto** que ahora al agruparlos permanece uno (el del centro), sin compañero. El valor de este término, es $(N+1)/2$.

Ejercicio

Compruebe esta afirmación para las sumatorias donde N toma valores pequeños e impares, como $N = 5$ ó $N = 7$.

La expresión que toma la sumatoria es

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + ... + \frac{\overbrace{(N+1)}}{2} +... + (N-1) + N$$

Sumamos entonces teniendo en cuenta que el valor del término central es $(N+1)/2$, y que debe ser sumado en forma aparte. El valor de la sumatoria se obtiene sumando $(N-1)/2$ veces $(N+1)$ y añadiendo el término central $(N+1)/2$. Recuerde que (N - 1) es un número par, y que la suma del primero y el último de este par es $(N+1)$.

El resultado final es

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=1}^{N} n &= (N+1) \bullet (N-1)/2 + (N+1)/2 \\ &= (N^2-1)/2 + (N+1)/2 \\ &= N(N+1)/2 \end{aligned}$$

Vemos que la expresión es la misma, sea N **par o impar**, de modo que:

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2 \tag{I.43}$$

El método expuesto se debe a Gauss.

I.5.3. Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

Para evaluar la cota inferior o superior para el área encerrada bajo la curva, necesitamos conocer el valor de otra sumatoria, aquella que contiene n^2. Usaremos dos métodos diferentes para evaluar la suma. El procedimiento indicado a continuación es complejo. Lo estudiaremos como una forma de familiarizarnos con la manipulación de las sumatorias.

Incluiremos otro método, más simple, como ejercicio al final de este capítulo.

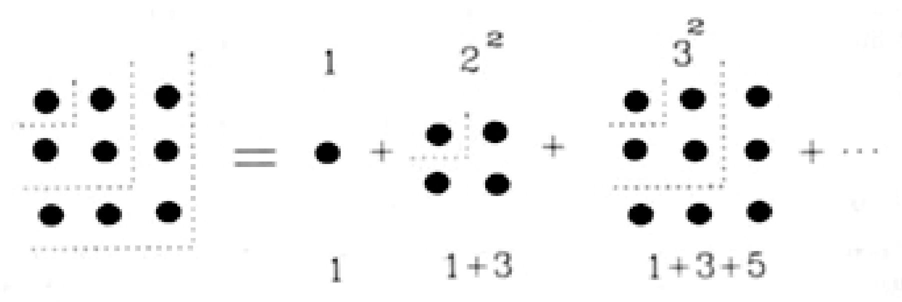


Figura I.14: La Figura muestra los puntos dentro del cuadrado con línea cortada que permite evaluar una suma cualquiera de números impares. Usaremos este esquema para encontrar el valor de $\sum n^2$.

A partir de la Figura, sumando los puntos ubicados dentro del cuadrado con línea cortada, se puede verificar la siguiente igualdad:

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1 \\ 1+3 & = 2^2 \\ 1+3+5 & = 3^2 \\ \dots & \vdots \\ 1+3+5+\cdots+(2N-1) & = N^2 \end{array}$$

Los valores ubicados a la derecha del signo igual son precisamente los números que queremos sumar. Sumando los números de la izquierda por columnas, obtenemos:

$$N + 3 \cdot (N-1) + 5 \cdot (N-2) + ... + (2N-1) \cdot 1 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Para obtener este resultado recordemos que hay N filas y, repetimos, que se han sumado columna por columna. En ese mismo orden está escrito el resultado en la ecuación anterior. También podemos *verificar* que la suma que aparece a la izquierda del signo igual se puede escribir como

$$\overbrace{(1)}\cdot\underbrace{[N]}+\overbrace{(3)}\cdot\underbrace{[N-1]}+...+\overbrace{(2N-3)}\cdot\underbrace{[2]}+\overbrace{(2N-1)}\cdot\underbrace{[1]} \quad =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\overbrace{(2n-1)}\,\underbrace{[N-(n-1)]}\,.$$

Las llaves *sobre* los números a la izquierda del signo igual, indican una familia de términos representada por la expresión genérica $(2\,n-1)$. Este factor se ubica, con la misma identificación, a la derecha del signo igual. Análogamente, los términos con una llave *bajo* el número, son generados por el término señalado a la derecha de la ecuación con una llave similar.

Ejercicio

Verifique que (2 n - 1) es un número impar para cualquier valor de n y, que en este caso, toma cada uno de los valores de los números que caracterizan a cada columna, exactamente en el mismo orden en que van apareciendo.

Verifique, dando distintos valores de n, que el término entre paréntesis cuadrado reproduce el otro factor de la suma. □

Recordando que esta sumatoria se originó al considerar la sumatoria de n^2, tenemos

$$\sum_{n=1}^{N}(2n-1)[N-(n-1)] = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

El resto del cálculo se reduce a separar en un miembro de la ecuación la sumatoria de n^2 y en el otro el resto de los términos.

Desarrollando el miembro de la izquierda, de acuerdo a las reglas establecidas, vale decir: las constantes salen fuera de la sumatoria y la sumatoria de una suma (o resta) es lo mismo que la suma (o resta) de la sumatoria de sus respectivos términos, tenemos

$$N\sum_{n=1}^{N}(2n-1) \;\; - \;\; \sum_{n=1}^{N}(2n-1)(n-1) = \sum_{n=1}^{N} n^2.$$

Aplicando, nuevamente, las propiedades conocidas de las sumatorias,

$$2N\;\sum_{n=1}^{N} n - \;\; N\sum_{n=1}^{N} 1 \;\; - \;\; \sum_{n=1}^{N}(2n^2-3n+1) = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

$$2N\sum_{n=1}^{N} n - N\sum_{n=1}^{N} 1 - 2\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Ordenando las sumatorias que tienen los mismos sumandos

$$(2N+3)\sum_{n=1}^{N} n \; - \; (N+1)\sum_{n=1}^{N} 1 \quad = 3\sum_{n=1}^{N} n^2,$$

y reemplazando el valor obtenido para $\sum_{n=1}^{N} n$, [**??**], y recordando que $\sum_{n=1}^{N} 1 = N$, tenemos:

$$2N^2(N+1)/2 - (N+1)\,N + 3N(N+1)/2 = 3\sum_{n=1}^{N} n^2,$$

y finalmente, haciendo un poco de álgebra obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N[(2N+1)(N+1)]/6. \tag{I.44}$$

Esta fórmula es válida para cualquier valor de N.

I.5.4. Valor obtenido para el área bajo la curva $y = x^2$.

Con los resultados obtenidos anteriormente estamos capacitados para evaluar las sumatorias que aparecieron en la estimación del área bajo la curva $y = x^2$.

Volvamos entonces a las ecuaciones [**??**], [**??**] que correspondían al área evaluada por defecto y por exceso respectivamente.

Uno puede *intuir* que un valor cercano al valor exacto de la superficie bajo la curva entre $x = 0$ y $x = 100$ se puede obtener promediando los valores de la cota superior e inferior encontrados para el área. Para este cálculo tomamos $N = 100$ en las ecuaciones anteriores y evaluamos. (En realidad esto no es lo más cercano al valor verdadero que uno puede obtener pero sí lo más directo). Veamos su valor,

$$\begin{aligned}
\text{Area} = \; & \tfrac{1}{2}[\text{Area}_{(SUP)} + \text{Area}_{(INF)}] \\
& = \tfrac{1}{2}[2\,\textstyle\sum_{n=1}^{N} n^2 - 2\,\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1] \\
& = N[(2N+1)(N+1)]/6 - N(N+1)/2 + N/2 \\
& = N(N+1)[(2N+1)/6 - 1/2] + N/2 \\
& = [N^3/3 + N/6]
\end{aligned}$$

Si $N = 100$

$$\simeq \frac{1}{3}10^6 + \frac{100}{6}.$$

El valor exacto de esta sumatoria es $10^6/3$. El error relativo que hemos cometido es del orden de un $0,005\,\%$, como se muestra a continuación.

$$\frac{[\frac{1}{6}10^2]}{[\frac{1}{3}10^6]} \simeq 0,5 \times 10^{-4} = 0,005\,\% \qquad \text{de error.}$$

Ejercicio

Si definimos Δ como el largo de la base del rectángulo, entonces usando un valor de Δ, constante pero más pequeño, obtenga resultados aún más exactos.

Note que ahora debe incluir Δ en la ecuación inicial para el cálculo del área, pero que éste, por ser constante sale fuera de la sumatoria.

También debe recordar que, Δ más pequeño es lo mismo que dividir el área bajo la curva en rectángulos más esbeltos y que necesariamente se debe cumplir que $N \cdot \Delta = L$, donde L es el largo de la base.□

I.5.5. Método general para evaluar sumatorias del tipo $\sum_{n=1}^{N} n^k$.

Aquí propondremos un método más simple y más general que el anterior para evaluar las sumatorias del tipo indicado en el encabezamiento de esta sección.

Vamos a reobtener el valor de la sumatoria

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + ... + N.$$

El método alternativo propuesto para evaluarla, consiste en calcular la siguiente combinación de sumatorias,

$$\sum_{n=1}^{N} (n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2.$$

A pesar que inicialmente esta combinación no parece estar relacionada con la sumatoria que nos interesa, podemos ver que al desarrollar el binomio de la primera sumatoria suceden dos cosas que son de relevancia en nuestro caso, primero

$$\sum_{n=1}^{N} (n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=1}^{N} (n^2 + 2n + 1) - \sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=1}^{N} (2\,n + 1). \qquad \text{(I.45)}$$

Donde hemos usado la asociatividad de la sumatoria (la misma propiedad de los números reales) [**??**], y con ello hemos cancelado las sumatorias que contenían n^2.

En segundo lugar, la resta de sumatorias que aparece a la izquierda de la última ecuación puede ser evaluada fácilmente si escribimos cada uno de sus términos en columnas separadas como se indica a continuación:

$$\begin{array}{ccll}
2^2 & - & 1^2 & \text{primer término de la sumatoria,} \\
3^2 & - & 2^2 & \text{segundo término de la sumatoria,} \\
4^2 & - & 3^2 & \text{tercer término de la sumatoria,} \\
 & \vdots & & \qquad\quad\vdots \\
(N+1)^2 & - & N^2 & \text{N–ésimo término de la sumatoria.} \\
\hline
(N+1)^2 & - & 1 &
\end{array}$$

Es fácil ver que los términos de la suma se van anulando entre ellos, permaneciendo sólo el primero y el último, cuya diferencia es el resultado de la suma. El valor de la suma es: $N\,(N+2)$.

Por otra parte el término de la derecha de la ecuación [**??**] es:

$$2(\sum_{n=1}^{N} n) + \quad \sum_{n=1}^{N} 1 = 2(\sum_{n=1}^{N} n) + N.$$

De aquí se puede despejar $\sum_{n=1}^{n=N} n$ que es la sumatoria cuyo resultado buscamos:

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2 \tag{I.46}$$

Ejercicio

Usando este método, reobtenga el valor de la siguiente sumatoria:
$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N(2N+1)(N+1)/6.$

Indicación: use la ecuación [**??**], pero incluyendo potencias cúbicas en lugar de las cuadráticas que allí aparecen.□

Con este método se puede calcular la sumatoria de una potencia arbitraria de n. Para ello se debe conocer el valor de la sumatoria de una potencia más baja que la buscada y tomar la diferencia entre las sumatorias de una potencia inmediatamente superior, en la forma ya señalada.

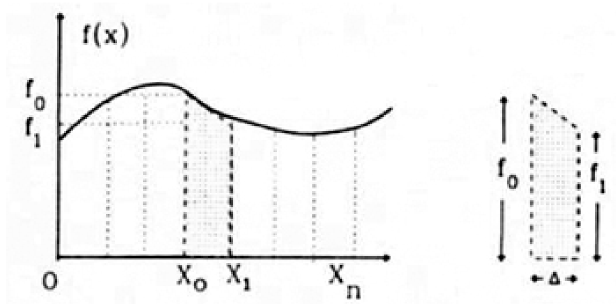


Figura I.15: Regla de Trapecio. Tomando un conjunto de puntos de la curva, se calcula el área como la suma del área de los trapecios construidos uniendo los puntos mediante rectas.

I.5.6. Regla del trapecio.

A continuación incluímos la fórmula usada para calcular numéricamente el área bajo una curva $y = f(x)$ usando trapecios (en lugar de rectángulos) como unidades elementales. De cualquiera de las Figuras de esta Sección, se desprende que la idea es acomodar un trapecio bajo la curva, apoyando uno de sus catetos en el eje x y el cateto opuesto aproxima la curva mediante una recta.

Si queremos calcular el valor del área bajo la curva entre los puntos $x = a$ y $x = b$, dividimos dicho segmento en $(N-1)$ segmentos mediante los puntos x_n con $0 \leq n \leq N$. El valor de la función en cada uno de sus puntos se designa como $f_n \equiv f(x_n)$, es decir $f_0 \equiv f(x_o) = f(a)$, $f_1 \equiv f(x_1)$... $f_N \equiv f(x_N) = f(b)$, donde hemos identificado x_0 con a y x_n con b.

Recordemos que el área de un trapecio es la semisuma de sus bases multiplicada por la altura. La fórmula para el área de un trapecio cualquiera dentro del tramo de interes es:

$$\text{Area del trapecio} = \frac{1}{2}\,[f_{n-1} + f_n]\,(x_n - x_{n-1}).$$

En este caso, el trapecio está puesto en forma vertical: la base del trapecio es cada una de las verticales señaladas como f_0, f_1, f_2,... f_N, cuyo valor es el valor que toma la función $f(x)$ para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2...x = N$ respectivamente (ver Figura).

Si sumamos el área de cada uno de los trapecios de la Figura, suponiendo que todos los trazos son iguales: $[x_n - x_{n-1}] \equiv \Delta$, para simplificar el álgebra, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_a^b f(x)\Delta \simeq \quad & \Delta[f_0 + f_1]/2 + \\ & \Delta[f_1 + f_2]/2 + \ \Delta[f_2 + f_3]/2 + ... \\ & + \Delta[f_{N-2} + f_{N-1}]/2 + \ \Delta[f_{N-1} + f_N]/2. \\ = \ & \Delta\left\{1/2 \cdot f_0 + \left[\sum_{i=1}^{N-1} f_i\right] + 1/2 \cdot f_N\right\}. \qquad \text{(I.47)}\end{aligned}$$

La suma $\left\{\sum_a^b f(x)\,\Delta\right\}$ indica el valor del área encerrada entre $x = a$ y $x = b$ por la función f(x).