

DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

EL MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO PUEDE SER DESCOMUESTO EN UN MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN DEL CUERPO MAS UNA ROTACIÓN EN TORNO A UN EJE



EL MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN DEL CUERPO SE REDUCE AL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA, EN DONDE SE CONCENTRAN TODAS LAS FUERZAS EXTERNAS

298

Rotaciones

Un jugador de voleibol de playa salta para bloquear un remache. La altura de su salto sería mucho menor si los meniscos no fueran parte de sus piernas.

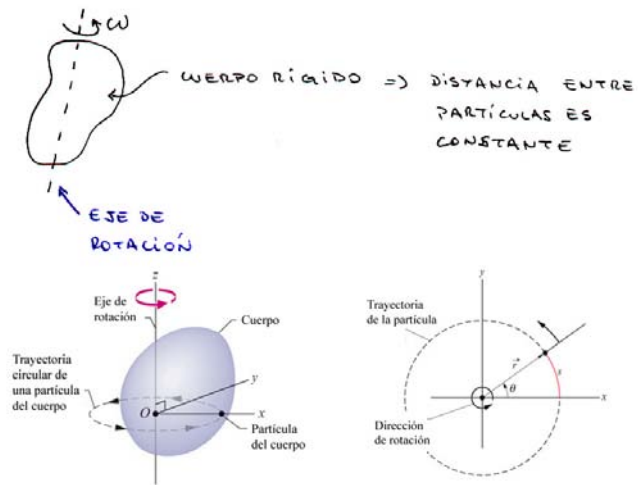


¿Cómo ayudan los meniscos a que la gente salte más alto?

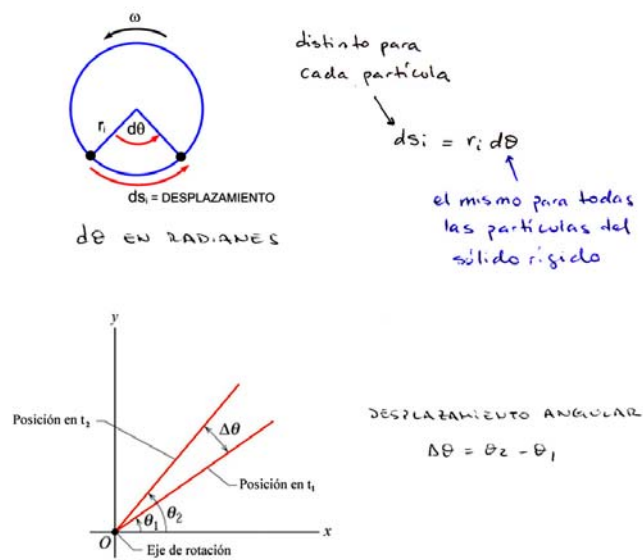


299

ROTACIÓN EN TORNOS A UN EJE FIJO



300



301

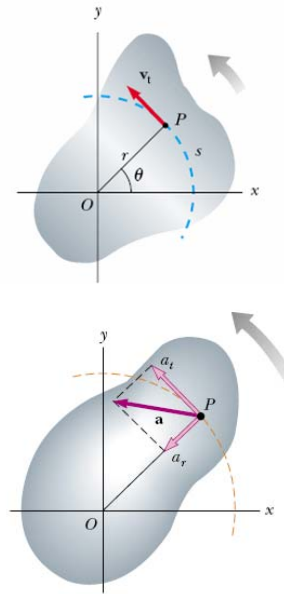
velocidad tangencial $= \underline{v}_t = \frac{ds}{dt} = r_i \frac{d\theta}{dt} = r_i \omega$

con $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ velocidad angular $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$

aceleración tangencial $= a_{t_i} = \frac{dv_{t_i}}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt} = r_i \alpha$

con $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ aceleración angular $[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}]$

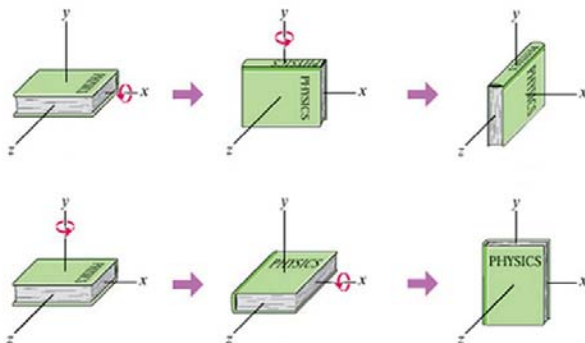
aceleración radial $= a_{r_i} = \frac{v_{t_i}^2}{r_i} = r_i \omega^2$



302

¿ θ, ω, α SON VECTORES ?

LAS ROTACIONES FINITAS NO SON ASOCIATIVAS

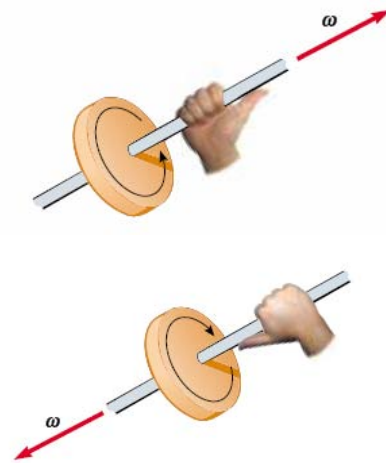
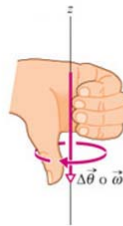
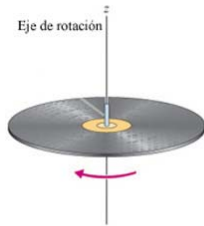


303

sin embargo, a medida que los ángulos de rotación se hacen más pequeños, las rotaciones se vuelven asociativas

$\Rightarrow$ las rotaciones pueden ser representadas por un vector

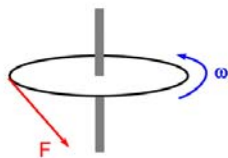
CONVENCIÓN:



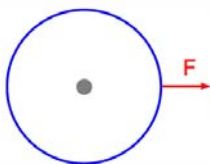
304

TORQUE

ES]



AL APLICAR LA FUERZA F
EL DISCO GIRARÁ

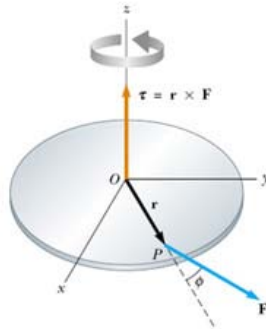


$\Rightarrow$ EL DISCO NO GIRARÁ

LA FUERZA Y LA POSICIÓN DEL PUNTO DONDE ÉSTA SE APLICA
AFECTAN LA ROTACIÓN DE UN CUERPO

305

SE DEFINE EL TORQUE O MOMENTO DE LA FUERZA $\vec{\tau}$ POR

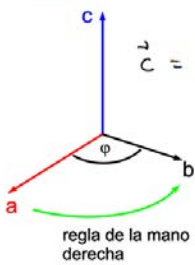


DONDE $\vec{r}$ ES EL VECTOR POSICIÓN DEL PUNTO DE APLICACIÓN DE LA FUERZA RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS O

$\vec{\tau}$ DEPENDE DEL ORIGEN DEL SISTEMA DE COORDENADAS

306

PRODUCTO VECTORIAL



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{c}$ ES $\perp$ A $\vec{a}$ Y $\vec{b}$

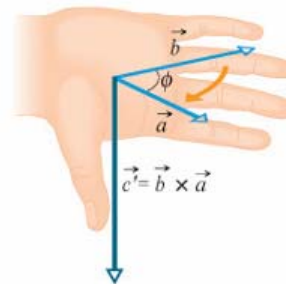
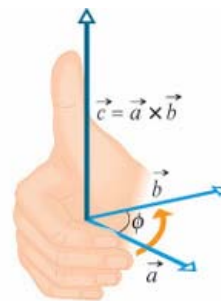
PROPIEDADES

i) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi$

ii) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

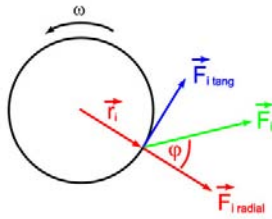
¡EL ORDEN ES IMPORTANTE!

iii) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$



307

→ τ AFECTA LA VELOCIDAD ANGULAR DE UN CUERPO



$$F_{i,radial} = F_i \cos \phi$$

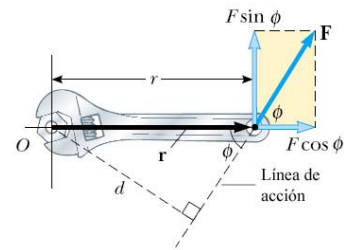
$$F_{i,tang} = F_i \sin \phi$$

LA COMPONENTE RADIAL DE LA FUERZA F_i NO AFECTA LA ROTACIÓN DEL CUERPO

POR OTRO LADO

$$F_{i,tang} = m_i a_{t,i} = m_i r_i \alpha \quad / \cdot r_i$$

$$r_i F_{i,tang} = m_i r_i^2 \alpha$$



308

PERO $r_i F_{i,tang} = \tau_i$ ENTONCES

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

$$\therefore \tau_{total} = \sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha$$

$$\tau_{total} = I \alpha$$



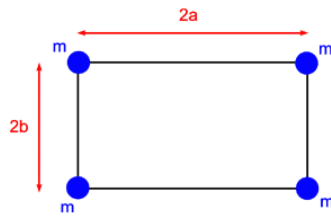
DONDE $I \equiv \sum_i m_i r_i^2$ ES EL MOMENTO DE INERCIA DEL CUERPO

I MIDE LA RESISTENCIA DE UN CUERPO A CAMBIAR SU VELOCIDAD DE ROTACIÓN

309

I DEPENDE DE LA DISTRIBUCIÓN
 DE MASA RESPECTO AL EJE DE ROTACIÓN

EJ



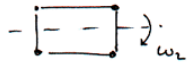
i)



$$I_1 = m_1 a^2 + m_2 a^2 + m_3 a^2 + m_4 a^2$$

$$I_1 = 4ma^2$$

ii)



$$I_2 = 4mb^2 \neq I_1$$

310

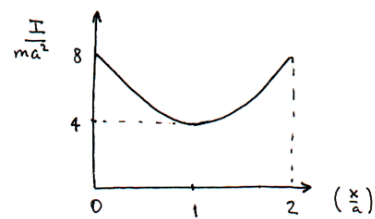
iii)



$$I = 2mx^2 + 2m(2a-x)^2$$

$$I = 4mx^2 - 8max + 8ma^2$$

$$\frac{I}{ma^2} = 4\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{x}{a}\right) + 8$$

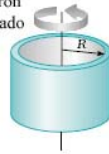


311

Momento de inercia de algunos sólidos homogéneos

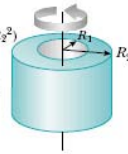
Anillo o cascarón
cilíndrico delgado

$$I_{CM} = MR^2$$



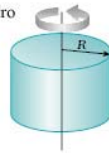
$$I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

Cilindro con
agujero en el
centro



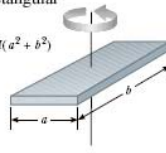
Disco o cilindro
sólido

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$$



Placa rectangular
delgada

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



Barra delgada con
eje de rotación en
el centro de masa

$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$



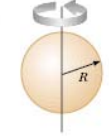
Barra delgada con
eje de rotación en
uno de sus extremos

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



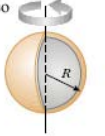
Esfera sólida

$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$$



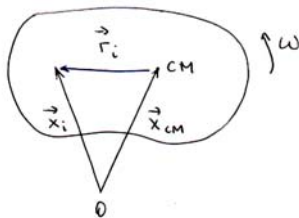
Cascarón esférico
delgado

$$I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$$



312

TEOREMA DE STEINER (EJES PARALELOS)

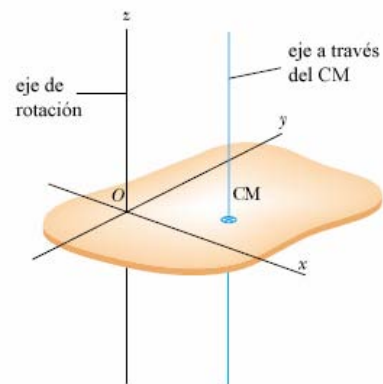


El cuerpo rota en torno
a un eje en el punto O
(que puede estar fuera
del cuerpo)

$\vec{r}_i$ posición de la partícula i-ésima c/r al centro de
masa

$\vec{x}_i$ posición de la partícula i-ésima c/r al eje
de rotación

$\vec{x}_{CM}$ posición del centro de masa c/r al eje de
rotación



313

$$\vec{x}_i = \vec{x}_{cm} + \vec{r}_i \text{ con } \vec{x}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{x}_i$$

Entonces, el momento de inercia wr a O es

$$I_0 = \sum m_i \vec{x}_i^2 = \sum m_i (\vec{x}_{cm} + \vec{r}_i)^2$$

$$I_0 = \sum m_i (\vec{x}_{cm}^2 + 2\vec{x}_{cm} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2)$$

$$I_0 = \sum m_i \vec{x}_{cm}^2 + 2\vec{x}_{cm} \cdot \sum m_i \vec{r}_i + \sum m_i \vec{r}_i^2$$

pero $\sum m_i \vec{r}_i = 0$ y $\sum m_i = M$

$$\Rightarrow I_0 = M \vec{x}_{cm}^2 + \sum m_i \vec{r}_i^2$$

314

pero $M \vec{x}_{cm}^2 = I_{cm}$ = momento de inercia del CM
 wr al eje O

$\sum m_i \vec{r}_i^2 = I_{cr,cm}$ es el momento de inercia
 del cuerpo wr a un eje
 ubicado en el centro de
 masa.

$$\therefore I_0 = M R_{cm}^2 + I_{cr,cm}$$



315

Estática

Escalar una pared de roca podría ser el último examen para un alumno de FI10A. Sacarse menos de un 4,0 significaría la muerte y aún pasar apenas podría significar un daño severo. Por ejemplo, al escalar una chimenea de roca se usa la técnica de presionar la espalda y los pies contra las paredes para subir o bajar. Sin embargo, el escalador necesita descansar de vez en cuando porque de lo contrario podría caer debido al cansancio. Un escalador experto en física puede relajar sus músculos para poder descansar apoyado contra la pared, mientras que un escalador novicio caerá inevitablemente.



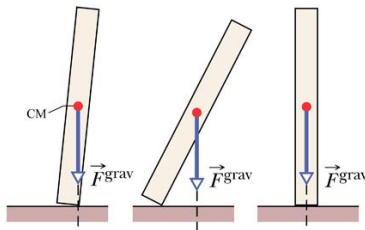
¿Cómo hay que relajar la presión sobre las paredes para poder descansar sin caer?



317

ESTÁTICA

ESTÁTICA $\Rightarrow$ CUERPO NO ROTA
NÍ SE TRASLADA

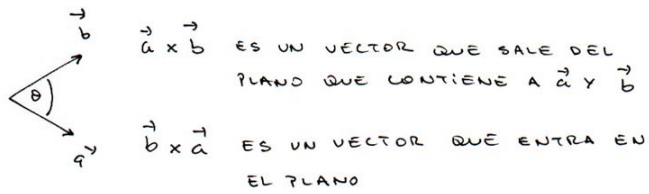


$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$ TODOS LOS PUNTOS DE
UN CUERPO EXPERIMENTAN
EL MISMO DESPLAZAMIENTO
O PERMANECEN QUIETOS

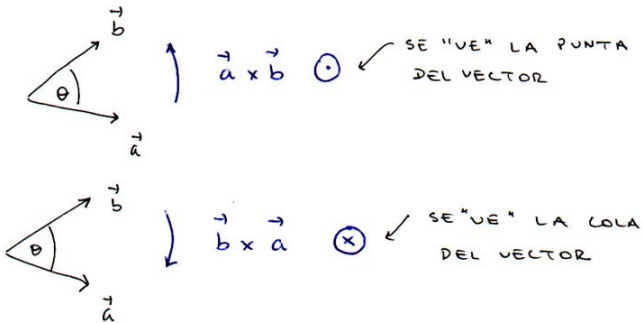
$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow$ NO EXISTE ROTACIÓN

318

NOTACIÓN PRODUCTO VECTORIAL 2D

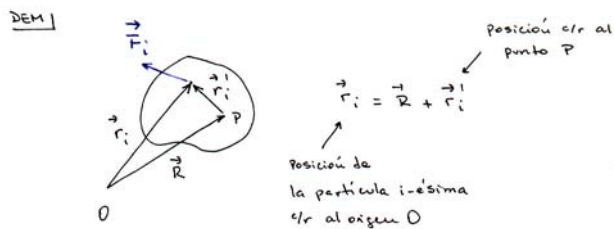


REGLA DE LA MANO DERECHA



319

$\sum \vec{\tau}$ PUEDE TOMARSE CON RESPECTO A CUALQUIER PUNTO



$\vec{r}$ es la posición de P con respecto al origen O

$$\vec{\tau}_0 = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau}_0 = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{R} \times \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau}_0 = \sum_i \vec{\tau}_i' + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i$$

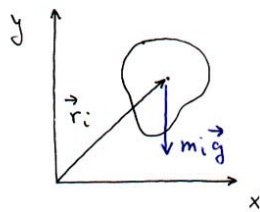
PERO $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (EL CUERPO ESTÁ EN EQUILIBRIO ESTÁTICO)

$$\vec{\tau}_0 = \sum_i \vec{\tau}_i' = \vec{\tau}_P \quad \square \text{ QED}$$



320

CENTRO DE GRAVEDAD



$$\vec{F}_g = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{g}$$

$$\vec{F}_g = \vec{g} \underbrace{\sum_i m_i}_{\text{MASA TOTAL DEL CUERPO}} = M \vec{g}$$

$$\vec{\tau}_g = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = \sum_i (m_i \vec{r}_i \times \vec{g})$$

$$\vec{\tau}_g = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{g} + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{g} + \dots$$

$$\vec{\tau}_g = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots) \times \vec{g}$$

$$\vec{\tau}_g = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g}$$

321

USANDO LA DEFINICIÓN DE CENTRO DE MASA

$$\vec{x}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

SE TIENE

$$\vec{\tau}_g = (M \vec{x}_{cm}) \times \vec{g} = \vec{x}_{cm} \times M \vec{g}$$

POR LO TANTO, PARA LA FUERZA DE GRAVEDAD TENEMOS

$$\vec{F}_g = M \vec{g}$$

$$\vec{\tau}_g = \vec{x}_{cm} \times M \vec{g}$$

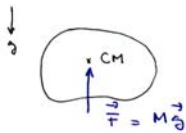


ES DECIR, LA FUERZA DE GRAVEDAD TOTAL ES IGUAL AL PESO DEL CUERPO Y EL TORQUE TOTAL EJERCIDO POR LA FUERZA DE GRAVEDAD ES IGUAL AL TORQUE DEL PESO ACTUANDO EN EL CENTRO DE MASA

322

COROLARIO:

SI EL SISTEMA DE REFERENCIA SE PONE EN EL CENTRO DE MASA, EL TORQUE CON RESPECTO AL ORIGEN DE ESTE SISTEMA SERÁ NULO



CENTRO DE GRAVEDAD $\equiv$ CENTRO DE MASA SI:

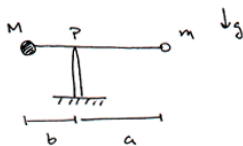
$$\vec{g} = \text{cte}$$

$\Rightarrow$ EL CUERPO ESTÁ EN EQUILIBRIO

323

COMO SE PUEDE TOMAR TORQUE C/ A CUALQUIER PUNTO, CONVIENE ELEGIR UN PUNTO QUE PRODUZCA LA EXPRESIÓN MÁS SIMPLE Y/O QUE ENTREGUE LA MAYOR CANTIDAD DE INFORMACIÓN

EJ|



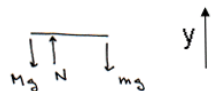
VALOR DE a PARA QUE EL SISTEMA ESTE EN EQUILIBRIO

SUPONGAMOS QUE LA BARRA ES IDEAL $\Rightarrow m_{\text{barra}} = 0$

SOL:

i) $\sum \vec{F} = 0$

DEL

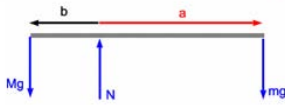


$$N - Mg - mg = 0$$

$$N = (m+M)g$$

324

(i) $\sum \vec{\tau} = 0 \rightarrow$ COMO LAS FUERZAS ESTÁN CONTENIDAS EN UN PLANO, LOS TORQUES ENTRAN O SALEN DEL PLANO



TOMANDO TORQUE wr A P
SE TIENE

$$\tau_m = mga \text{ HACIA ADENTRO } \oplus$$

$$\tau_M = Mgb \text{ HACIA AFUERA } \ominus$$

TOMANDO $\oplus$ COMO NEGATIVO (SE PUEDE ELEGIR COMO UNO DESEE PERO HAY QUE SER CONSISTENTE) SE TIENE

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow Mgb - mga = 0$$

$$Mb = ma$$

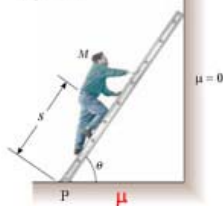
$$M(L-a) = ma$$

$$\boxed{\frac{ML}{M+m} = a}$$

325

EJ

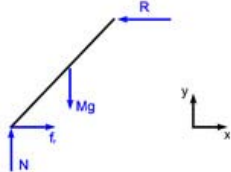
escalera de largo L , y masa despreciable



$\mu = 0$

¿ μ MINIMO PARA QUE LA ESCALERA NO DESBALE ?

DEL



$$\sum \vec{F} = 0$$

$$x) \quad fr - R = 0 \quad \oplus$$

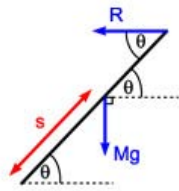
$$y) \quad N - Mg = 0$$

$$\Rightarrow N = Mg$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \text{ wr AL PUNTO P}$$

$\Rightarrow$ EL TORQUE EJERCIDO POR N Y fr ES CERO

326



$$\tau_M = MgS \underbrace{\sin(\theta + \frac{\pi}{2})}_{\cos \theta} \quad (*)$$

$$\tau_R = RL \underbrace{\sin(\pi - \theta)}_{\sin \theta} \quad (o)$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow -MgS \cos \theta + RL \sin \theta = 0$$

$$R = \frac{MgS}{L} \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\text{USANDO } (o) \quad f_r = R \leq \mu N$$

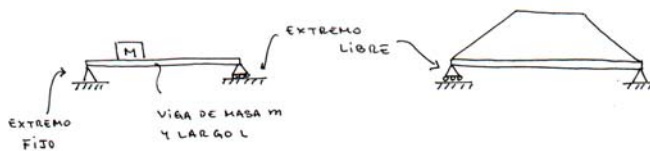
$$R \leq \mu Mg$$

$$\cancel{Mg} \frac{S}{L} \frac{1}{\tan \theta} \leq \mu \cancel{Mg} \Rightarrow \mu \geq \frac{S}{L} \frac{1}{\tan \theta}$$

327

VIGAS Y ESTRUCTURAS

EJEMPLOS :



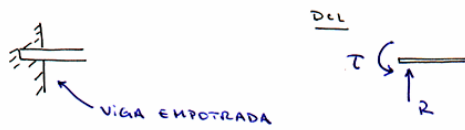
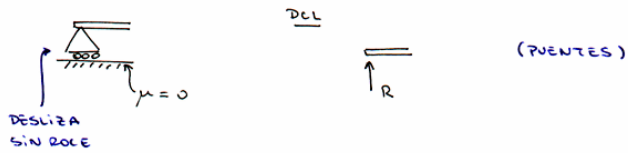
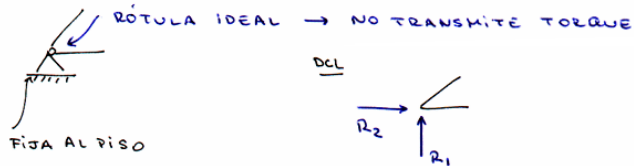
ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS SE RESUELVEN USANDO SÓLO LAS ECUACIONES DE ESTÁTICA $\sum \vec{F} = 0$ Y $\sum \vec{\tau} = 0$

EN GENERAL, $\sum \vec{F} = 0$ Y $\sum \vec{\tau} = 0$ ENTREGAN 6 ECUACIONES

EN EL CASO 2D, SÓLO SE TIENEN 3 ECS. (2 PARA LAS FUERZAS Y UNA PARA LOS TORQUES)

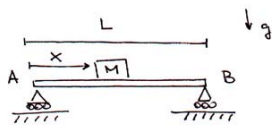
328

APOYOS

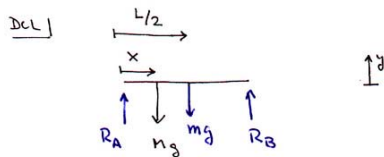


329

EJEMPLO



¿ REACCIONES EN LOS
EXTREMOS A Y B DE
LA VIGA ?



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow y) \quad R_A + R_B - Mg - mg = 0$$

$$R_A + R_B = (M + m)g \quad (*)$$

$$\sum \vec{\tau} \text{ c/r a A} \Rightarrow xMg + \frac{L}{2}mg - LR_B = 0$$

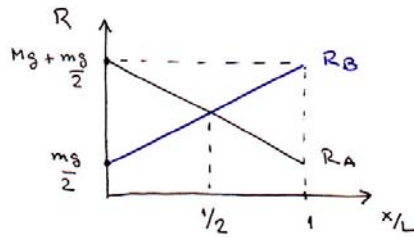
$$R_B = \frac{x}{L}Mg + \frac{1}{2}mg$$

330

entonces de (*)

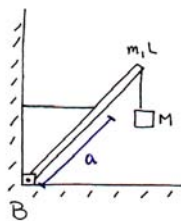
$$R_A = (M+m)g - \left(\frac{x}{L}Mg + \frac{1}{2}mg\right)$$

$$R_A = Mg\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{mg}{2}$$



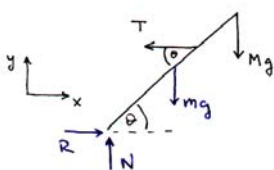
331

EJEMPLO



↓ g ¿Tensión en la cuerda?
 ¿Reacción en el pivote B?

Sol



$$\vec{\Sigma F} = 0 \Rightarrow x) R - T = 0$$

$$y) N - mg - Mg = 0$$

$$\Rightarrow R = T$$

$$N = (M+m)g$$

332

$$\sum \vec{T} \text{ en } A \text{ y } B \Rightarrow$$

$$T \sin(\pi - \theta) - m g \frac{L}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - M g L \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

pero $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ y $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$, entonces

$$T \sin \theta - m g \frac{L}{2} \cos \theta - M g L \cos \theta = 0$$

$$T \sin \theta = \left(\frac{m}{2} + M\right) g L \cos \theta$$

$$T = \left(\frac{m}{2} + M\right) g L \frac{1}{\tan \theta}$$

Estática

Escalar una pared de roca podría ser el último examen para un alumno de FI10A. Sacarse menos de un 4,0 significaría la muerte y aún pasar apenas podría significar un daño severo. Por ejemplo, al escalar una chimenea de roca se usa la técnica de presionar la espalda y los pies contra las paredes para subir o bajar. Sin embargo, el escalador necesita descansar de vez en cuando porque de lo contrario podría caer debido al cansancio. Un escalador experto en física puede relajar sus músculos para poder descansar apoyado contra la pared, mientras que un escalador novicio caerá inevitablemente.



¿Cómo hay que relajar la presión sobre las paredes para poder descansar sin caer?



334

$M = 55 \text{ kg}$
 $d = 0.2 \text{ m}$
 $w = 1.0 \text{ m}$
 $h = ?$
 $\mu_1 = \mu_{\text{zapatos}} = 1.1$
 $\mu_2 = \mu_{\text{espalda}} = 0.7$

$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \hat{x}) \quad N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = N_2$
 $\hat{y}) \quad f_{r1} + f_{r2} - Mg = 0$
 ROLE ESTÁTICO $\Rightarrow f_r \leq \mu N$

335

ENTONCES $f_{r1} + f_{r2} = Mg \leq \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$

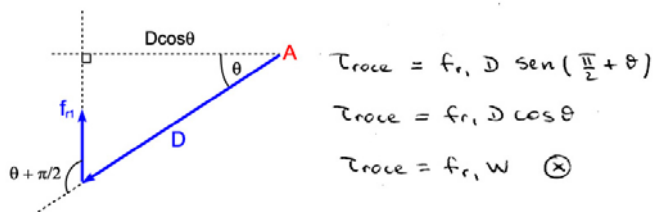
$$Mg \leq (\mu_1 + \mu_2) N_1$$

$$N_1 \geq \frac{Mg}{\mu_1 + \mu_2}$$

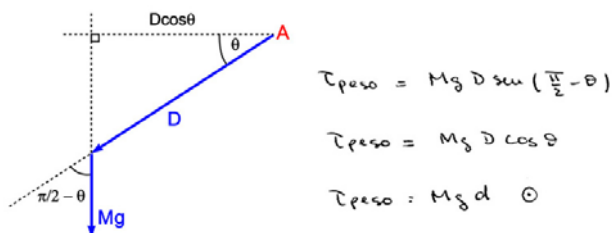
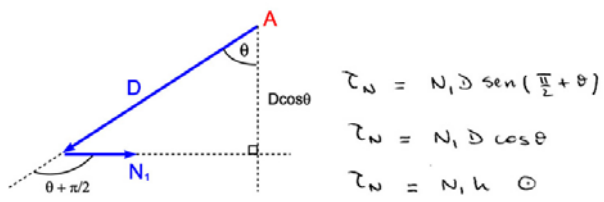
CASO CRÍTICO : $N_1 = \frac{Mg}{\mu_1 + \mu_2} = 299 \text{ N}$

N_1 FUERZA MINIMA QUE DEBE EJERCER LA ESCALADERA PARA NO CAER

$\sum \vec{\tau}$ c/r PUNTO A :



336



$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow N_1 h + Mg d - f_{r1} W = 0$

PARA EL CASO CRÍTICO :

$$N_1 h + Mg d - \mu_1 N_1 W = 0$$

$$h = \mu_1 W - \frac{Mg d}{N_1} = 0.74 \text{ m}$$

337

Rotaciones complejas

En 1897, un trapecista europeo realizó el primer triple salto mortal durante el vuelo desde el trapecio hasta las manos de su compañero. Por los siguientes 85 años, muchos trapecistas intentaron completar un cuádruple salto mortal pero no fue hasta 1982 que esto fue conseguido. Miguel Vázquez de los Ringling Brothers and Barnum & Bailey Circus giró su cuerpo en el aire cuatro veces antes de que su hermano Juan lo atrapara. Obviamente los dos se hicieron famosos por esta acrobacia.



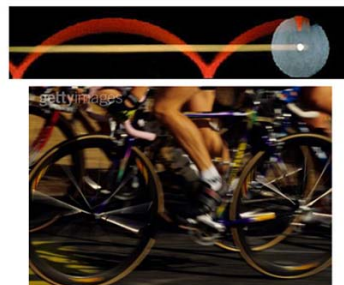
¿Por qué es tan difícil realizar un cuádruple salto mortal?
¿Qué hace finalmente posible realizar esta acrobacia?



338

ROTACIONES COMPLEJAS

1. ROTACIONES ALREDEDOR DE UN EJE QUE SE MUEVE PERO QUE NO CAMBIA DE DIRECCIÓN.



ESTE TIPO DE MOVIMIENTO ES UNA COMBINACIÓN DE UNA ROTACIÓN Y UN MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN.

339

2. ROTACIONES ALREDEDOR DE UN EJE QUE CAMBIA DE DIRECCIÓN

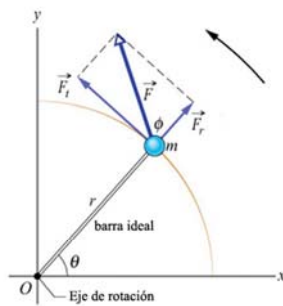


3. OBJETOS EN ROTACIÓN EN TORNO A UN EJE FIJO PERO QUE CAMBIAN SU MOMENTO DE INERCI.



340

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA ROTACIONES



LA COMPONENTE RADIAL DE LA FUERZA $\vec{F}$ NO AFECTA LA ROTACIÓN DE LA PARTÍCULA
 POR OTRO LADO

$$F_t = m a_t$$

ENTONCES

$$\tau_z = F_t r = m r a_t$$

PERO $a_t = \alpha r$ (α = ACCELERACIÓN ANGULAR)

$$\therefore \tau_z = m r^2 \alpha \equiv I \alpha$$

DEBIDO I ES EL MOMENTO DE INERCI. DE LA PARTÍCULA RESPECTO AL EJE DE ROTACIÓN O

341

UN CUERPO RÍGIDO ROTANDO EN TORNO A UN EJE FIJO
PUEDE SER DESCOMUESTO EN INFINITAS PARTÍCULAS DE
MASA m_i GIRANDO EN TRAYECTORIAS CIRCULARES DE
RADIO r_i . ENTONCES

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{total}} = \sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha$$

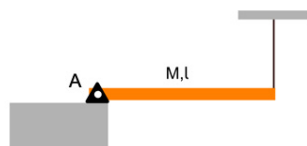
$$\tau_{\text{total}} = I \alpha$$

DONDE I ES EL MOMENTO DE INERCIA DEL CUERPO
RESPECTO AL EJE FIJO DE ROTACIÓN.

τ_{total} Y α APUNTAN EN LA DIRECCIÓN DEL EJE
DE ROTACIÓN

342

EJEMPLO



- 1) Reacción en A y Tensión de la cuerda
antes de cortar la cuerda
- 2) Reacción en A y aceleración angular
justo en el momento de cortar la cuerda

SOL:



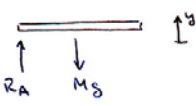
estática:

$$\sum F_y = 0 \quad 3) \quad T + R_A - M g = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 \quad 2) \quad l T - \frac{l}{2} M g = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{M g}{2} \quad \therefore R_A = \frac{M g}{2}$$

343

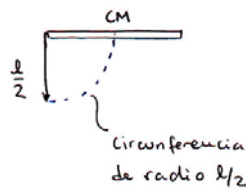
2)  3ª ley de Newton

$$R_A - Mg = -M a_{cm} \quad (1)$$

$$\sum \tau_A = Mg \frac{l}{2} = I \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{Mg \frac{l}{2}}{\frac{1}{3} M l^2} = \frac{3g}{2l}$$

Por geometría

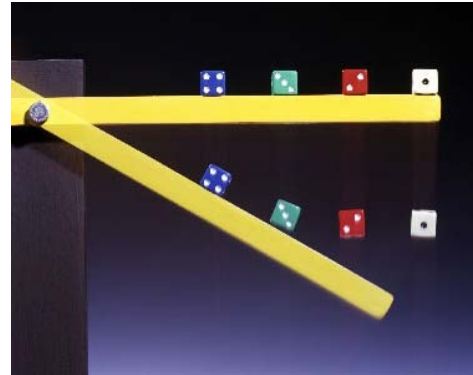


$$\Rightarrow a_{cm} = \frac{l}{2} \alpha$$

Entonces $R_A = Mg - M \frac{l}{2} \frac{3g}{2l} = \frac{1}{4} Mg$

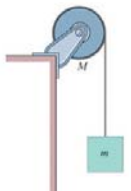
El extremo de la barra tiene aceleración

$$a = \alpha l = \frac{3}{2} g > g$$



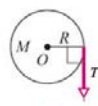
344

EJEMPLO 1



$$a = ?$$

$$T = ?$$

$$\sum \tau = TR = I \alpha \quad (1)$$



$$\sum F = mg - T = ma \quad (2)$$

Si la cuerda no desliza $\Rightarrow v_t = R\omega$

↑
velocidad tangencial
en el punto de contacto

entonces $a_t = \frac{dv_t}{dt} = R \alpha$

345

Wego, de (1) se tiene

$$TR = I\alpha = I \frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow a = \frac{TR^2}{I}$$

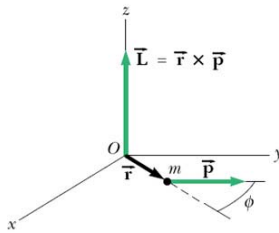
reemplazando en (2)

$$mg - T = \frac{mR^2}{I} T$$

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}} = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

$$\text{Por lo tanto } a = \frac{2m}{M} \frac{g}{1 + 2m/M}$$

MOMENTO ANGULAR



$$\vec{p} = m\vec{v} \text{ (momentum lineal)}$$

$\vec{r}$ = posición de la partícula wr al punto O

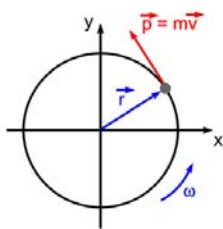
$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \theta$$

$\vec{L}$ es perpendicular a $\vec{r}$ y $\vec{p}$



347

$\vec{L}$ para una partícula en movimiento circular



$$L \equiv |\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = rmv$$

pero $v = \omega r$ entonces

$$L = mr^2\omega \equiv I\omega$$

I es el momento de inercia de una partícula puntal con respecto al eje de rotación

348

MOMENTO ANGULAR DE UNA BARRA RÍGIDA



El momento angular para las N partículas es

$$L = \sum_{n=1}^N m_n r_n^2 \omega$$

donde r_n es la posición wr al eje de rotación del n -ésimo pedacito.

r_n corresponde al centro de masa de cada pedazo

$$\Rightarrow r_n = (n - \frac{1}{2}) \Delta \quad n = 1, 2, \dots, N$$

349

Entonces

$$L = \omega m_0 \sum_{n=1}^N \Delta^2 (n - \frac{1}{2})^2$$

$$L = \omega m_0 \Delta^2 \left\{ \sum_{n=1}^N n^2 - \sum_{n=1}^N n + \sum_{n=1}^N \frac{1}{4} \right\}$$

pero $\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N}{6} (2N+1)(N+1)$

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N}{2} (N+1) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^N 1 = N$$

Entonces

$$L = \omega m_0 \Delta^2 \left\{ \frac{N}{6} (2N+1)(N+1) - \frac{N}{2} (N+1) + \frac{N}{4} \right\}$$

350

Tomemos el límite $N \rightarrow \infty$ y $\Delta \rightarrow 0$ con las restricciones:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} N \cdot \Delta = l \equiv \text{largo de la barra}$$

$$\gamma \quad \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ m_0 \rightarrow 0}} N \cdot m_0 = M \equiv \text{masa de la barra}$$

Entonces

$$L = \omega (m_0 N) (N \Delta)^2 \left\{ \frac{1}{6} \frac{(2N+1)(N+1)}{N^2} - \frac{(N+1)}{2N^2} + \frac{1}{4N^2} \right\}$$

Tomando el límite se obtiene

$$\boxed{L = \frac{1}{3} M l^2 \omega} \Rightarrow \boxed{L = I \omega}$$

$$I_{\text{barra}} = \frac{1}{3} M l^2 = \text{momento de inercia}$$

351

TORQUE Y MOMENTO ANGULAR

Para una partícula en órbita circular y una barra rotando en torno a un eje, hemos obtenido que el momento angular y la velocidad angular están relacionados por

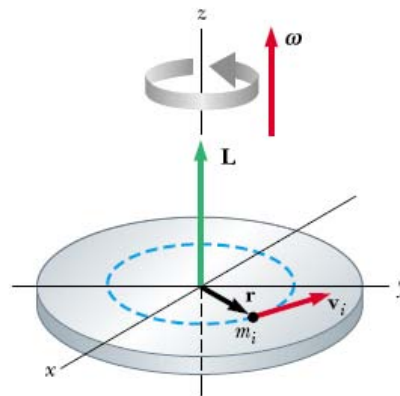
$$L = I \omega$$

donde I es el momento de inercia.

En general, para cualquier cuerpo rotando en torno a un eje fijo se tiene

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = I \vec{\omega}$$

donde $\vec{\omega}$ apunta en la dirección perpendicular al plano de rotación y cuyo sentido está dado por la regla de la mano derecha.



352

Si el cuerpo es un sólido rígido y el eje de rotación se mantiene fijo se puede escribir simplemente

$$L = I \omega$$

La variación de momento angular está dada por

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

Si el cuerpo no se deforma $\Rightarrow I = \text{cte}$

Entonces

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha \quad \swarrow \text{aceleración angular}$$

353

pero ya sabemos que $\tau_{\text{total}} = I \alpha$ entonces

$$\frac{dL}{dt} = \tau_{\text{total}}$$

con $\tau_{\text{total}} =$ torque ejercido por todas las fuerzas externas

En general, $\vec{L} = I \vec{\omega}$ pero en un sólido rígido todas las partículas tienen la misma velocidad y aceleración angular. Por lo tanto podemos calcular $\frac{d\vec{L}}{dt}$ para una partícula y luego sumar todas las partículas.

354

Para una partícula se tiene

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

pero $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ y $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

entonces

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{\tau}}$$

pero $\vec{v}$ y $\vec{p}$ son paralelos $\Rightarrow \vec{v} \times \vec{p} = 0$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

355

Para un sistema de partículas se tiene

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} + \dots$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots$$

donde $\vec{\tau}_i = \underbrace{\vec{\tau}_i^{\text{fuerzas internas}}}_{= 0 \text{ por 3ª ley de Newton}} + \vec{\tau}_i^{\text{fuerzas externas}}$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_i^{\text{fuerzas ext}} = \vec{\tau}_{\text{total}}$$

356

En resumen, para un cuerpo rígido rotando en torno a un eje fijo se tiene

$$\begin{aligned}\vec{L} &= I \vec{\omega} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{\tau}\end{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$


Si $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$
 $\Rightarrow \vec{\omega} = \text{cte}$

357

MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{x}_i \times \vec{p}_i = \sum (\vec{x}_{cm} + \vec{r}_i) \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{x}_{cm} \times \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L}_0 = \vec{x}_{cm} \times \sum m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

pero $\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{cm}$ ↑
velocidad del CM.

$$\vec{L}_0 = \vec{x}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

pero $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{u}_i$

↑
velocidad de
la i-ésima partícula
c/r al eje O

↑
velocidad de la i-ésima
partícula c/r al centro de
masa

358

entonces

$$\vec{L}_O = \vec{x}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i \times (\vec{v}_{cm} + \vec{u}_i) m_i$$

$$\vec{L}_O = \vec{x}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \left(\sum m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{u}_i$$

pero $\sum m_i \vec{r}_i = 0$ y $m_i \vec{u}_i = \vec{p}_i'$ es el momentum de la i-ésima partícula c/r al centro de masa

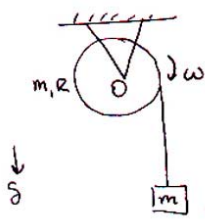
Por lo tanto



$$\vec{L}_O = \vec{x}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{c/r, cm}$$

359

EJEMPLO 1



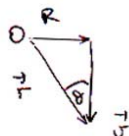
Momento angular c/r a O

$$\vec{L}_{TOTAL} = I \vec{\omega} + \vec{r} \times m \vec{v}$$

posición del bloque m c/r a O

$\vec{\omega}$ apunta hacia adentro (x)

$\vec{r} \times m \vec{v}$ también apunta hacia adentro (x)



$$\Rightarrow r \sin \theta = R$$

$$\Rightarrow L_{TOTAL} = I \omega + r m v \sin \theta$$

360

$$L_{\text{TOTAL}} = I\omega + mvr$$

Entonces

$$\frac{dL_{\text{TOTAL}}}{dt} = \tau_{\text{ext}} = mgr \sin \theta = mgr$$

$$\Rightarrow mgr = I \frac{d\omega}{dt} + mR \frac{dv}{dt}$$

$$mgr = I\alpha + mRa$$

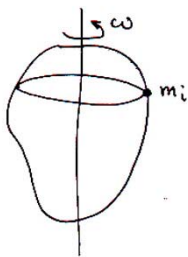
pero $a = \alpha R$, por lo tanto

$$mgr = I \frac{a}{R} + mRa$$

$$a = \frac{2m}{M} \frac{g}{1 + 2m/M}$$

361

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN



Energía cinética partícula i -ésima

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

En un sólido rígido, todas las partículas se mueven en trayectorias circulares

$$\Rightarrow v_i = r_i \omega$$

entonces $K_i = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$

La energía cinética total está dada por

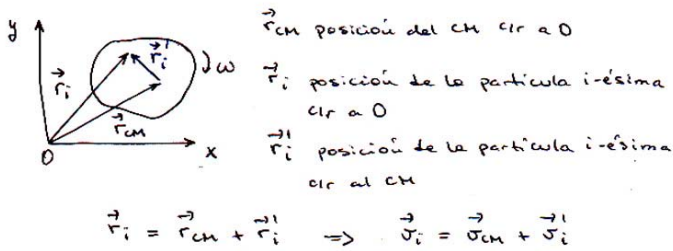
$$K = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum m_i r_i^2}_I \text{ (momento de inercia)}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

362

ROTACIÓN Y TRASLACIÓN DE UN SÓLIDO RÍGIDO



La energía cinética total está dada por

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i^1 + v_i^{12})$$

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_{cm}^2 + \underbrace{\vec{v}_{cm} \cdot \sum m_i \vec{v}_i^1}_0 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^{12}$$

$$K = \frac{1}{2} v_{cm}^2 \underbrace{\sum m_i}_M + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^{12}$$

363

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i r_i^{\prime 2} \omega^2$$

↑
velocidad angular
respecto a un eje
que pasa por el CM

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum m_i r_i^{\prime 2}}_{I_{cm \text{ al CM}}}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

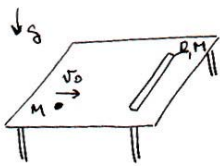


$\frac{1}{2} M v_{cm}^2$ es la energía cinética de traslación

$\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$ es la energía cinética de rotación
wr al CM

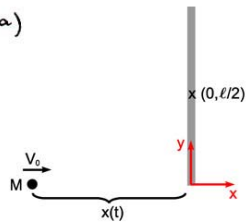
364

Ejemplo



sol

a)



- posición del CM del sistema
- $\vec{v}_{cm}$ antes y después del choque inelástico
- ω de la barra + masa
 wr al CM

$$x_{cm} = \frac{1}{2M} [-xM + 0 \cdot m] = -\frac{x(t)}{2}$$

$$y_{cm} = \frac{1}{2M} [0 \cdot M + \frac{l}{2} m] = \frac{l}{4}$$

$$\text{pero } x(t) = -d + v_0 t$$

$$\therefore x_{cm}(t) = -\frac{1}{2} [v_0 t - d] \quad y_{cm} = \frac{l}{4}$$

365

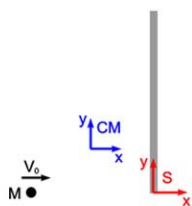
- b) $\vec{v}_{cm} = \text{cte}$ porque $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ en el plano de la mesa

ANTES $v_{cm,x} = \frac{1}{2M} [v_0 M + 0 \cdot m] = \frac{v_0}{2}$

$$v_{cm,y} = \frac{1}{2M} [0 \cdot M + 0 \cdot m] = 0$$

DESPUES $\vec{v}_{cm} = (\frac{v_0}{2}, 0)$

- c) El CM se mueve con velocidad constante. Coloquemos un sistema de referencia en el CM



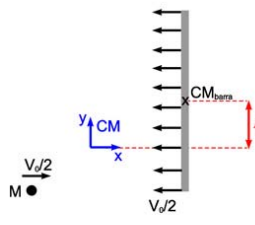
$$\vec{v}_{barra/cm} = \vec{v}_{barra/s} + \vec{v}_{s/cm}$$

$$= \vec{v}_{barra/s} - \vec{v}_{cm/s}$$

$$= (0, 0) - (\frac{v_0}{2}, 0)$$

$$\vec{v}_{barra/cm} = (-\frac{v_0}{2}, 0)$$

366

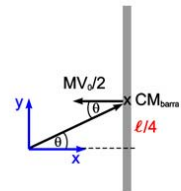


$$\vec{v}_{masa/CM} = \vec{v}_{masa/S} - \vec{v}_{S/CM}$$

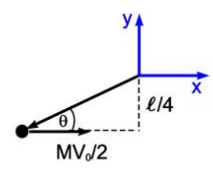
$$\vec{v}_{masa/CM} = (v_0, 0) - (\frac{v_0}{2}, 0)$$

$$\vec{v}_{masa/CM} = (\frac{v_0}{2}, 0)$$

$$L_{barra/CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{p}$$

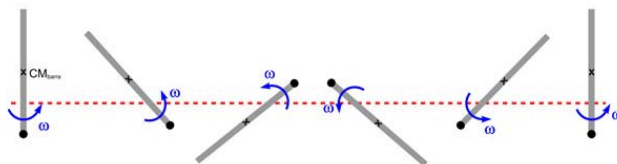
$$= \frac{l}{4} M \frac{v_0}{2} = \frac{l M v_0}{8}$$


$$L_{masa/CM} = \frac{l}{4} m \frac{v_0}{2} = \frac{l M v_0}{8}$$

$$\therefore L_{TOTAL/CM} = \frac{l M v_0}{4}$$


367

DESPUES DEL CHOQUE :



$$\text{DESPUES } L_{TOTAL/CM} = L_{barra/CM} + L_{masa/CM}$$

$$= I_0 \omega + I_0^{masa} \omega$$

$$= \frac{7}{48} M l^2 \omega + \frac{M l^2}{16} \omega$$

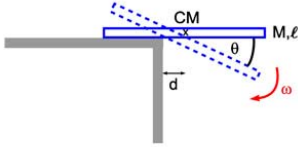
$$\Rightarrow \text{DESPUES } L_{TOTAL/CM} = \frac{5}{24} M l^2 \omega$$

$$L_i = L_f \Rightarrow \frac{l M v_0}{4} = \frac{5}{24} M l^2 \omega$$

$$\omega = \frac{6}{5} \frac{v_0}{l}$$

368

Ejemplo



¿ θ crítico para que la barra comience a resbalar por el borde?

$$I = \frac{1}{12} M l^2 + M d^2$$

$$E_i = 0$$

$$E_f = \frac{1}{2} I \omega^2 - M g h = \frac{1}{2} I \omega^2 - M g d \sin \theta$$

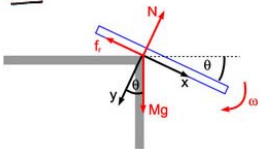
cons. de energía : $E_i = E_f$

$$0 = \frac{1}{2} I \omega^2 - M g d \sin \theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 M g d \sin \theta}{I}}$$

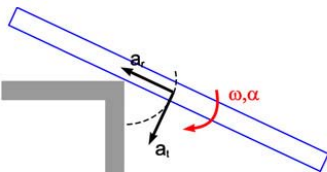
369

DCL



$$-N + M g \cos \theta = M a_{cny} \quad (1)$$

$$-f_r + M g \sin \theta = -M a_{cnx}$$



$$a_{cnx} = a_r = \frac{v^2}{d}$$

con $v = \omega d$

$$a_{cny} = a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega d) = \alpha d$$

370

$$\sum \tau_A = Mg \cos \theta d = I \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{Mg \cos \theta d}{I}$$

entonces

$$a_{cm} = \frac{Mg d^2 \cos \theta}{I}$$

$$(1) \rightarrow N = Mg \cos \theta - \frac{M^2 g d^2 \cos \theta}{I}$$

$$f_r = \mu N \Rightarrow$$

$$Mg \sin \theta - \mu \left[Mg \cos \theta - \frac{M^2 g d^2 \cos \theta}{I} \right] = -M \frac{v^2}{d}$$

$$\mu \left[g \cos \theta - \frac{M g d^2 \cos \theta}{I} \right] = d \omega^2 + g \sin \theta$$

371

$$\mu \frac{g \cos \theta}{I} [I - Md^2] = \frac{d^2 \cdot 2Mg \sin \theta}{I} + g \sin \theta$$

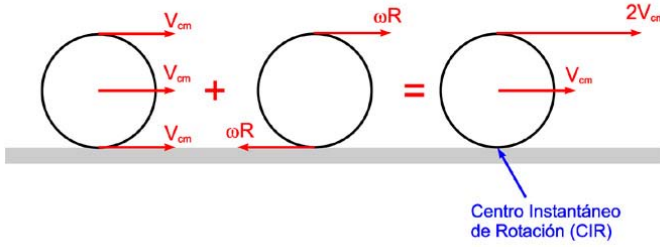
$$\mu \cos \theta \frac{1}{12} M l^2 = [2Md^2 + I] \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{12} M l^2 \mu}{\frac{1}{12} M l^2 + 3Md^2}$$

$$\boxed{\tan \theta = \frac{\mu l^2}{l^2 + 36 d^2}}$$

372

RODAMIENTO SIN RESBALAR (RSR)



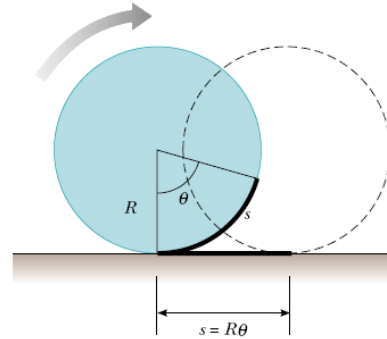
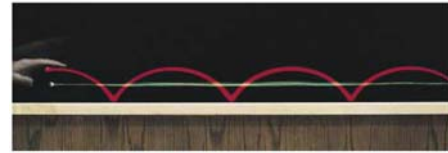
CONDICIÓN PARA RODAR SIN RESBALAR

$$v_{cm} = \omega R$$

Energía cinética

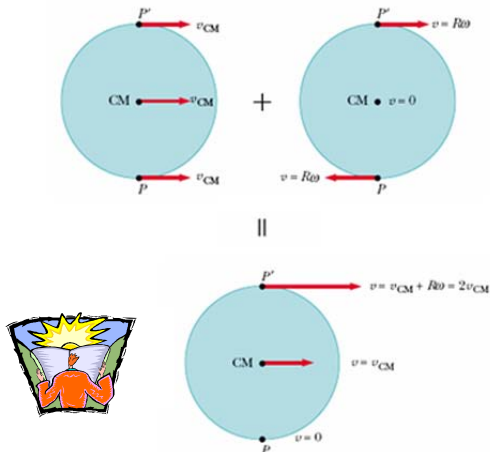
$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \frac{v_{cm}^2}{R^2}$$

$$K = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$



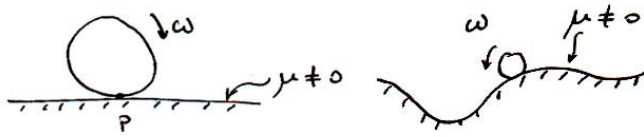
373

RSR necesita que exista roce, pero $\omega r_{roce} = 0$ porque el punto de contacto está en reposo instantáneo con el suelo



374

Centro Instantáneo de Rotación

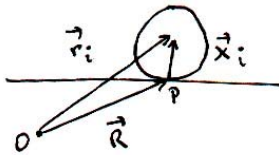


$$R \cdot \omega \Rightarrow \vec{v}_P = 0$$



Siempre se puede tomar torque respecto del CIR.

pero



$$\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{O centro fijo}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

375

$$\text{pero } \vec{r}_i = \vec{R} + \vec{x}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{R} \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_O = \frac{d}{dt} \left\{ \vec{R} \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i \right\}$$

$$\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \sum_i \vec{p}_i + \vec{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i + \frac{d}{dt} \sum_i \underbrace{\vec{x}_i \times \vec{p}_i}_{\vec{L}_p}$$

$$\text{pero } \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{x}_i}{dt}$$

$$\text{Si el punto P es el CIR} \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{r}_i = \vec{x}_i$$

376

Entonces

$$\vec{\tau}_0 = \vec{R} \times \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \frac{d\vec{L}_p}{dt}$$

$$\vec{\tau}_0 - \vec{R} \times \sum \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_p}{dt}$$

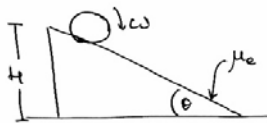
$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} - \vec{R} \times \sum \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_p}{dt}$$

$$\sum_i \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{R})}_{\vec{x}_i} \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_p}{dt} \Rightarrow \vec{\tau}_p = \frac{d\vec{L}_p}{dt}$$

QED

377

RSR



$$I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2 \text{ (cilindro)}$$

¿ v_{cm} al llegar al suelo?

Usando 2ª ley de Newton:

Del

$$\begin{aligned} \hat{x}) \quad Mg \sin \theta - f_r &= Ma_{cm} \quad (1) \\ \hat{y}) \quad N - Mg \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

$$RSR \Rightarrow v_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} = \alpha R$$

$$\sum \tau_{cm} = I \alpha \Rightarrow f_r R = I \alpha$$

$$f_r = \frac{1}{2} Ma_{cm}$$

Reemplazando en (1)

$$Mg \sin \theta = \frac{3}{2} Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

378

Entonces $v_{cm}^2 - v_o^2 = 2 a_{cm} d$

$$v_{cm}^2 = \frac{4}{3} g d \sin \theta \Rightarrow \boxed{v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} g H}}$$

La fuerza de roce debe satisfacer : $f_r \leq \mu_e N$

$$f_r = \frac{1}{3} M g \sin \theta \leq \mu_e M g \cos \theta$$

$$\Rightarrow \mu_e \geq \frac{1}{3} \tan \theta$$

μ_e minimo = $\frac{1}{3} \tan \theta$ para que pueda RSR.

Usando energía:

$$E_i = M g H$$

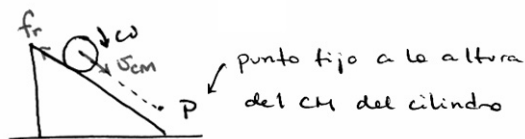
$$E_f = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2$$

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{3}{4} M v_{cm}^2 = M g H$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} g H}$$

379

Otra manera:



$$\tau_p = \frac{dL_p}{dt} \quad \text{con} \quad L_p = L_{cm} + L_{r,cm}$$

$$\text{En este caso, } L_{cm} = 0 \quad \wedge \quad L_{r,cm} = I \omega$$

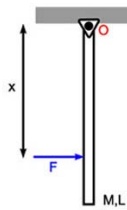
$$\text{Por otro lado, } \tau_p = \underbrace{\tau_N + \tau_{\text{peso}} + \tau_{\text{roce}}}_0$$

$$\tau_p = \tau_{\text{roce}} = f_r R$$

$$\therefore \frac{dL_p}{dt} = I \alpha = f_r R$$

380

CENTRO DE PERCUSIÓN

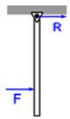


$$\sum \vec{\tau} \text{ wrt } O :$$

$$Fx = \frac{1}{3} ML^2 \alpha$$

$$\Rightarrow a_{cm} = \alpha \frac{L}{2} = \frac{3}{2} \frac{F}{M} \frac{x}{L}$$

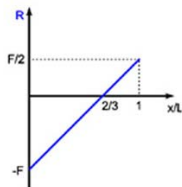
DCL



$$\sum \vec{F} = M \vec{a}_{cm} :$$

$$F + R = M a_{cm}$$

$$F + R = \frac{3}{2} F \frac{x}{L} \Rightarrow R = F \left(\frac{3}{2} \frac{x}{L} - 1 \right)$$

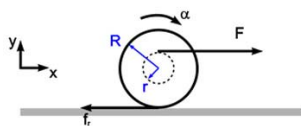


$$\text{Si: } x = \frac{2}{3} L \Rightarrow R = 0$$

CENTRO DE PERCUSIÓN

382

EJEMPLO 1



$$\sum \vec{F} = M \vec{a}_{cm} :$$

$$\hat{x} : F - f_r = M a_{cm} \quad (1)$$

$$\sum \vec{\tau} \text{ wrt } cm :$$

$$F r + f_r R = I \alpha \quad (2)$$

$$I_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2} M R^2$$

$$R \alpha \Rightarrow a_{cm} = \alpha R$$

$$\text{ENTONCES } (1) \rightarrow f_r = F - M a_{cm} \quad (3)$$

REEMPLAZANDO EN (2)

$$F r + (F - M a_{cm}) R = \frac{1}{2} M R a_{cm}$$

$$F(r + R) = \frac{3}{2} M R a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{r}{R} \right) \frac{F}{M}$$

POR LO TANTO

$$(3) \rightarrow f_r = \frac{F}{3} \left[1 - \frac{2r}{R} \right]$$

383

Si $r = \frac{R}{2} \Rightarrow f_r = 0$ i.e. EL ROLE ESTÁTICO SE ANULA

Si $r > \frac{R}{2} \Rightarrow f_r < 0$ i.e. LA FUERZA DE ROLE APUNTA HACIA ATRÁS

PARA QUE EL CILINDRO RUEDE SIN RESBALAR $|f_r| \leq \mu_e N$

$$\Rightarrow \frac{F}{3} \left| 1 - \frac{2r}{R} \right| \leq \mu_e Mg$$

$$\therefore \mu_e \geq \frac{F}{3Mg} \left| 1 - \frac{2r}{R} \right|$$

EN CASO CONTRARIO, EL CILINDRO RESBALARA BAJO LA ACCIÓN DE LA FUERZA F .

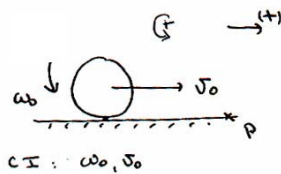
SI EL CM DEL CILINDRO SE MUEVE CON VELOCIDAD CONSTANTE $\Rightarrow a_{cm} = 0$

DE (1) SE TIENE QUE $f_r = F$

EN EL CASO DE UN CILINDRO RODANDO LIBREMENTE POR UNA SUPERFICIE HORIZONTAL $F = 0 \Rightarrow f_r = 0$

384

Problema

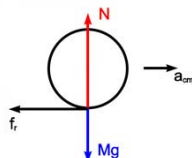


a) relación entre v_0, ω_0, R para que la bolita se detenga justo cuando deja de girar

b) relación entre v_0, ω_0, R para que la bolita resbale, se detenga y vuelva RSE con una velocidad constante igual a $\frac{3}{7} v_0$

Sol:

a) $a = a_{cm}$



$$-f_r = Ma$$

$$-\mu Mg = Ma$$

$$\boxed{a = -\mu g}$$

385

$$\tau_p = \frac{dL_p}{dt} = \frac{d}{dt} (L_{cm} + L_{c/r})$$

$$L_{cm} = -MRv_{cm} \quad L_{c/r} = I\omega$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (L_{cm} + L_{c/r}) = -MRA + I\alpha$$

$$\tau_p = \tau_N + \tau_{mg} = 0 \Rightarrow -MRA + I\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{MRA}{I}$$

$$a = -\mu g \Rightarrow \alpha = -\frac{\mu g}{kR}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega_f = 0 = \omega_0 - \frac{\mu g}{kR} T$$

$$T = \frac{\omega_0 kR}{\mu g}$$

386

al mismo tiempo T la bolita se detiene

$$v_f = 0 = v_0 - \mu g T \Rightarrow T = \frac{v_0}{\mu g}$$

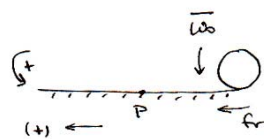
$$\omega_0 = \frac{v_0}{kR} \quad k = \frac{2}{5} \text{ esfera}$$

$$b) \quad \omega_f = \omega_0 - \frac{\mu g}{kR} T \Rightarrow \omega_f = \omega_0 - \frac{v_0}{kR}$$

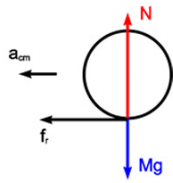
$$0 = v_0 - \mu g T$$

$$\text{Sea } \bar{\omega}_0 = \omega_f = \omega_0 - \frac{v_0}{kR}$$

las nuevas CI son



387



$$f_r = Ma$$

$$\mu Mg = Ma$$

$$\Rightarrow a = \mu g$$

$$\tau_p = \frac{d}{dt} [MR\vec{v}_{cm} + I\omega] = 0$$

$$MRa + I\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{MR}{I}\mu g$$

$$\alpha = -\frac{\mu g}{\frac{I}{kR}}$$

$$\vec{v}_f = \vec{\omega}_f R \quad (RSE)$$

$$\vec{v}_f = \mu g T \quad (\vec{v}_0 = 0)$$

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 - \frac{\mu g}{\frac{I}{kR}} T$$

388

$$\Rightarrow \vec{\omega}_f R = \mu g T \Rightarrow T = \frac{\vec{\omega}_f R}{\mu g}$$

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 - \frac{\mu g}{\frac{I}{kR}} \frac{\vec{\omega}_f R}{\mu g}$$

$$\vec{\omega}_f = \frac{\vec{\omega}_0}{1 + 1/k} = \frac{\omega_0 - \frac{J_0}{kR}}{1 + 1/k}$$

$$\vec{v}_f = \vec{\omega}_f R = \frac{3}{7} v_0$$

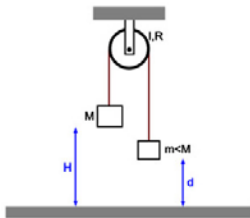
$$\omega_0 - \frac{J_0}{kR} = \frac{3}{7} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{v_0}{R}$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} \left\{ \frac{3}{7} \left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} \right\} \Rightarrow v_0 = \frac{R\omega_0}{\frac{3}{7} + \frac{10}{7k}}$$

$$\text{para una esfera } k = \frac{2}{5} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{4} R\omega_0$$

389

Ejemplo



- a) tiempo que M demora en llegar al piso
b) altura que llega m

Sol:

a) $E_i = Mgh + mgd$

$$E_f = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mg(d+H)$$

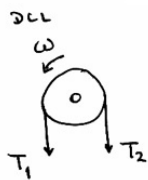
pero $v_m = v_M = R\omega = v$ entonces

$$E_i = E_f \Rightarrow$$

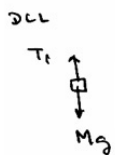
$$Mgh + mgd = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{I v^2}{R^2} + mg(d+H)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2gHR^2(M-m)}{(M+m)R^2 + I}$$

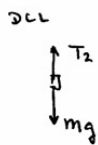
390



$$\sum \tau_O = T_1 R - T_2 R = I \alpha$$



$$-T_1 + Mg = Ma_M$$



$$-T_2 + mg = -ma_m$$

La cuerda no desliza en la polea

$$\Rightarrow a = a_m = a_M = \alpha R$$

391

Despejando la aceleración a se tiene

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m+\frac{I}{R^2}} \right) g$$

Entonces, el tiempo de caída está dado por

$$H = \frac{1}{2} a T^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \frac{a T}{g} \cdot T$$

$$T = 2H \sqrt{\frac{(M+m)R^2 + I}{2gHR^2(M-m)}}$$

b) $\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = m g h$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{I}{R^2} + m \right) v^2 = m g h$$

$$\Rightarrow h = H \frac{(M-m)}{m} \frac{(I + m R^2)}{[I + (M+m) R^2]}$$

Rotaciones complejas

En 1897, un trapecista europeo realizó el primer triple salto mortal durante el vuelo desde el trapecio hasta las manos de su compañero. Por los siguientes 85 años, muchos trapecistas intentaron completar un cuádruple salto mortal pero no fue hasta 1982 que esto fue conseguido. Miguel Vázquez de los Ringling Brothers and Barnum & Bailey Circus giró su cuerpo en el aire cuatro veces antes de que su hermano Juan lo atrapara. Obviamente los dos se hicieron famosos por esta acrobacia.

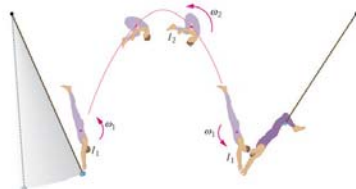


¿Por qué es tan difícil realizar un cuádruple salto mortal?
¿Qué hace finalmente posible realizar esta acrobacia?



410

DURANTE EL SALTO, EL TRAPELISTA REALIZA 4 GIROS COMPLETOS EN $t = 1.87 \text{ s}$. EL SALTO PUEDE SER DIVIDIDO EN 4 ETAPAS



EL MOMENTO DE INERCIA PARA EL PRIMER Y ÚLTIMO CUARTO DE SU SALTO ES $I_1 = 19.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

DURANTE EL RESTO DEL SALTO, EL MOMENTO DE INERCIA ES $I_2 = 3.93 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

CONSERVACIÓN DE MOMENTUM ANGULAR

$$\Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

411

EN LA PRIMERA PARTE DEL SALTO, EL TRAPECISTA GIRA UN ÁNGULO $\Delta\theta_1 = 0.5$ REVOLUCIONES EN UN TIEMPO Δt_1

EN LA PARTE INTERMEDIA, GIRA $\Delta\theta_2 = 3.5$ REV EN UN TIEMPO Δt_2 . ENTONCES

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta\theta_1}{\omega_1} \quad \text{y} \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta\theta_2}{\omega_2}$$

$$\Rightarrow \text{TIEMPO TOTAL DE VUELO} = \Delta t = \frac{\Delta\theta_1}{\omega_1} + \frac{\Delta\theta_2}{\omega_2}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\omega_2} \left[\Delta\theta_1 \frac{I_1}{I_2} + \Delta\theta_2 \right]$$

$$\omega_2 = \left[\Delta\theta_1 \frac{I_1}{I_2} + \Delta\theta_2 \right] \frac{1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 3.23 \text{ rev/s} !!$$

412

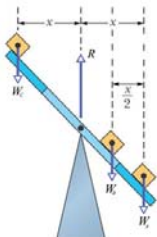
ESTÁTICA Y ELASTICIDAD

EN LA MAYORÍA DE LOS PROBLEMAS DE ESTÁTICA QUE HECHOS VISTO, LAS FUERZAS ESTÁN CONTENIDAS EN UN PLANO. POR LO TANTO, LAS ECUACIONES

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{y} \quad \sum \vec{\tau} = 0 \quad \text{SE REDUCEN A SOLO 3}$$

ES FÁCIL ENCONTRAR PROBLEMAS EN LOS CUALES ESTAS ECUACIONES NO SON SUFICIENTES PARA RESOLVERLOS.

EJEMPLO



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow R = W_A + W_B + W_C \quad (1)$$

$$\sum \vec{\tau}_O = 0 \Rightarrow$$

$$W_C x - W_B \frac{x}{2} - W_A x = 0$$

$$W_C - \frac{W_B}{2} - W_A = 0 \quad (2)$$

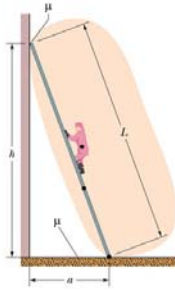
413

>> TENEMOS 2 ECUACIONES PERO 3 INCÓGNITAS
(W_A, W_B, W_C) $\Rightarrow$ MUCHAS SOLUCIONES

POR EJEMPLO, SI $R = 300\text{N}$ ALGUNAS SOLUCIONES SON

W_A	W_B	W_C
30	160	110
60	120	120
90	80	130 ...etc

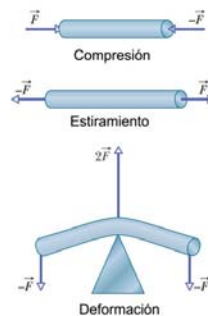
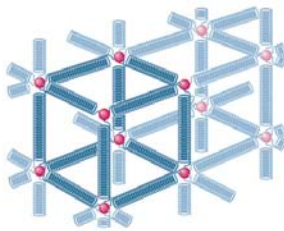
OTROS EJEMPLOS



414

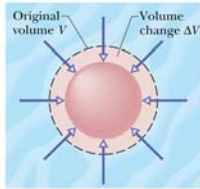
¿POR QUÉ OCURRE ESTO? EL PROBLEMA ES QUE
HEMOS SUUESTO QUE LOS CUERPOS A LOS CUALES
APLICAMOS LAS ECUACIONES DE ESTÁTICA SON
PERFECTAMENTE RÍGIDOS. ES DECIR QUE NO SE
DEFORMAN AL APLICAR UNA FUERZA SOBRE ELLOS
ESTO NO ES REALISTA!!

ELASTICIDAD



415

MÓDULO DE VOLUMEN



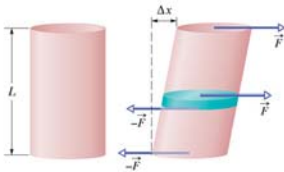
$$B = \frac{\text{ESTUERO DE VOLUMEN}}{\text{DEFORMACIÓN DE VOLUMEN}}$$

$$B = - \frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

CON $\Delta P = \text{CAMBIO DE PRESIÓN}$

COMPRESIBILIDAD $K = \frac{1}{B} = - \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P}$

ESTUERO DE CORTE (CIZALLA)



$$S = \frac{\text{ESTUERO DE CORTE}}{\text{DEFORMACIÓN DE CORTE}}$$

$$S = \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F}{A} \frac{L}{\Delta x}$$

Módulos de elasticidad aproximados

Material	Módulo de Young, Y (Pa)	Módulo de volumen, B (Pa)	Módulo de corte, S (Pa)
Aluminio	7.0×10^{10}	7.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Latón	9.0×10^{10}	6.0×10^{10}	3.5×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	14×10^{10}	4.4×10^{10}
Vidrio óptico	6.0×10^{10}	5.0×10^{10}	2.5×10^{10}
Hierro	21×10^{10}	16×10^{10}	7.7×10^{10}
Piombo	1.6×10^{10}	4.1×10^{10}	0.6×10^{10}
Níquel	21×10^{10}	17×10^{10}	7.8×10^{10}
Acero	20×10^{10}	16×10^{10}	7.5×10^{10}