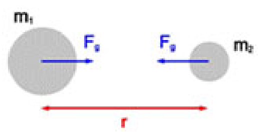
GRAVITACIÓN

2 FENÓMENOS :

- CAÍDA DE UN CUERPO
- MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

ESTOS FENÓMENOS ERAN VISTOS EN LA ANTIGÜEDAD COMO DOS FENÓMENOS DISTINTOS

NEWTON MUESTRA QUE AMBOS PUEDEN SER DESCRITOS POR UNA LEY UNIVERSAL DE GRAVITACIÓN

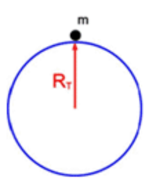


$$F_g = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2}$$

CONSTANTE DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{N\,m^2}{Kg^2}$$

GRAVEDAD EN LA SUPERFICIE DE LA TIERRA



$$F_g = \frac{G\, m M_T}{R_T^2} = m g$$

2ª LEY DE NEWTON

$$\Rightarrow \boxed{g = \frac{G M_T}{R_T^2}}$$

GRAVEDAD EN LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

SI UNO MIDE g (POR EJEMPLO, USANDO OBJETOS EN CAÍDA LIBRE), ENTONCES PODEMOS MEDIR LA MASA DE LA TIERRA

$$\boxed{M_T = \frac{g R_T^2}{G}}$$

$$M_T = \frac{10\,(6.4\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}}\ \text{kg}$$

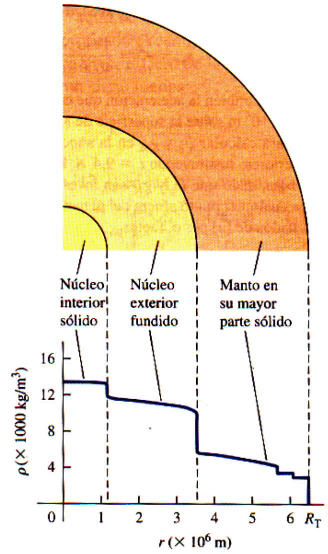
$$M_T \simeq 6.1\times10^{24}\ \text{kg}$$

LA DENSIDAD PROMEDIO DE LA TIERRA ES

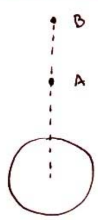
$$\rho_{TIERRA} = \frac{M_T}{\frac{4\pi}{3}R_T^3} \approx 5.6\ \frac{gr}{cm^3}$$

$$\rho_{ROCA} \approx 2.8\ \frac{gr}{cm^3}$$

$\Rightarrow$ ¡¡ LA DENSIDAD EN EL CENTRO DE LA TIERRA ES GRANDE !!



ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL



¿TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA EXTERNA PARA LLEVAR UNA MASA m DESDE r_A HASTA r_B?

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{gravedad}$$

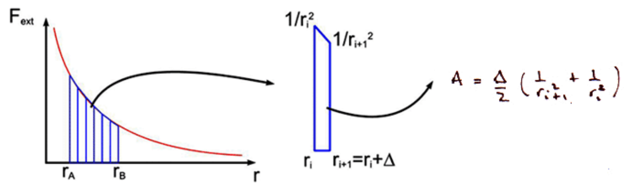
$$\Rightarrow \vec{F}_{ext} = \frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

SI TRASLADAMOS LA PARTÍCULA RADIALMENTE DESDE A HASTA B, LA FUERZA $\vec{F}$ Y EL DESPLAZAMIENTO $\Delta\vec{r}$ APUNTARÁN SIEMPRE EN LA MISMA DIRECCIÓN, ENTONCES

$$W_{A\to B} = \sum_{r_A}^{r_B} \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}_i = GMm\sum_{r_A}^{r_B}\frac{\Delta r_i}{r_i^2}$$

$$W_{A\to B} = GMm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

GRÁFICAMENTE SE TIENE



$$\text{ÁREA TRAPECIO i-ÉSIMO} = \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{r_{i+1}^2}+\frac{1}{r_i^2}\right)$$

$$= \frac{\Delta}{2}\frac{1}{r_i r_{i+1}}\left(\frac{r_i}{r_{i+1}}+\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)$$

$$= \frac{\Delta}{2}\frac{1}{r_i r_{i+1}}\left[r_i(r_i+\Delta)^{-1}+\frac{(r_i+\Delta)}{r_i}\right]$$

$$= \frac{\Delta}{2}\frac{1}{r_i r_{i+1}}\left[\left(1+\frac{\Delta}{r_i}\right)^{-1}+\left(1+\frac{\Delta}{r_i}\right)\right]$$

$\Delta \to 0$

$$= \frac{\Delta}{2}\frac{1}{r_i r_{i+1}}\left[1-\cancel{\frac{\Delta}{r_i}}+1+\cancel{\frac{\Delta}{r_i}}\right]$$

$$\text{ÁREA TRAPECIO i-ÉSIMO} = \frac{\Delta}{r_i r_{i+1}}$$

Introducción a la Física FI10A-02
Andrés Meza
Semestre Primavera 2006

$$\text{ÁREA TRAPECIO i-ÉSIMO} = \frac{r_{i+1}-r_i}{r_i r_{i+1}} = \frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}$$

POR LO TANTO $\quad W_{A\to B} = GMm\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}\right)$

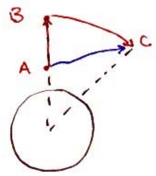
DONDE $\quad r_1 \equiv r_A \quad$ Y $\quad r_{N+1} \equiv r_B$.

$$\Rightarrow \quad W_{A\to B} = GMm\left[\left(\frac{1}{r_A}-\cancel{\frac{1}{r_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{r_2}}-\frac{1}{r_3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{r_N}-\frac{1}{r_B}\right)\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{W_{A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)}$$

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA EXTERNA PARA MOVER LA MASA m DESDE r_A HASTA r_B EN CONTRA DE LA ATRACCIÓN GRAVITACIONAL DE LA TIERRA

EL TRABAJO PARA MOVER LA MASA m DESDE A HASTA C NO DEPENDE DE LA TRAYECTORIA SÓLO DEPENDE DE LA POSICIÓN INICIAL Y FINAL



$$r_B = r_C$$

$$W_{A\to C} = W_{A\to B} + \underbrace{\cancel{W_{B\to C}}}_{0}$$

PORQUE EL DESPLAZAMIENTO ES PERPENDICULAR A LA FUERZA GRAVITACIONAL

LA FUERZA DE GRAVEDAD ES UNA FUERZA CONSERVATIVA

SE DEFINE LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL POR

$$\Delta U = -W_{grav} = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_{grav}\cdot d\vec{r}$$

PERO $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{grav}$ ENTONCES

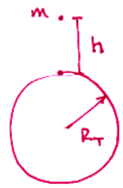
$$\Delta U = W_{A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$U_B - U_A = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

VARIACIÓN DE ENERGÍA POTENCIAL CERCA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE



$$\Delta U = -GMm\left(\frac{1}{R_T+h} - \frac{1}{R_T}\right)$$

$$\Delta U = -\frac{GMm}{R_T}\left(\frac{R_T}{R_T+h} - 1\right)$$

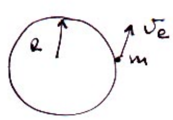
$$\Delta U = -\frac{GMm}{R_T}\left(\frac{1}{1+h/R_T} - 1\right)$$

$$\Delta U \approx -\frac{GMm}{R_T}\left(\cancel{1} - \frac{h}{R_T} - \cancel{1}\right)$$

$$\Delta U \approx m\underbrace{\left(\frac{GM}{R_T^2}\right)}_{g}h = mgh$$

g = gravedad en la superficie de la Tierra

VELOCIDAD DE ESCAPE



v_e = VELOCIDAD DE ESCAPE
= VELOCIDAD MÍNIMA PARA ESCAPAR DE LA ATRACCIÓN GRAVITACIONAL DE LA TIERRA (U OTRO PLANETA)

v_e ESTÁ DADO POR LA CONDICIÓN $E = 0$ DONDE

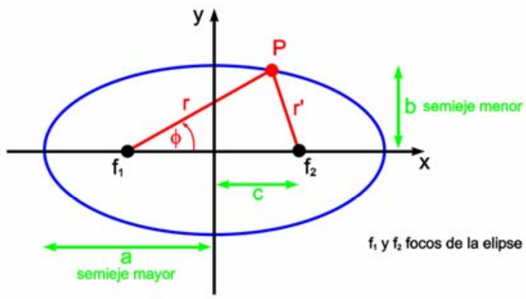
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$ VELOCIDAD DE ESCAPE

$v_e = 11.2$ km/s EN LA TIERRA

LEYES DE KEPLER

I ley: "Todos los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos"



una elipse satisface la condición geométrica

$$r + r' = 2a$$

Se define la excentricidad de la elipse por

$$\varepsilon \equiv \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Johannes Kepler (1571-1630)

Ec. de la elipse en coords. cartesianas es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y en coords. polares es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}(1 - \varepsilon \cos\phi)$$

Relaciones geométricas:

$$\begin{aligned} \text{pericentro} &= r_1 = a - c \\ \text{apocentro} &= r_2 = a + c \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2a \\ r_1 r_2 &= a^2 - c^2 \end{aligned}$$

entonces

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{(promedio aritmetico)}$$

$$b = \sqrt{r_1 r_2} \quad \text{(promedio geométrico)}$$

La excentricidad se puede escribir en términos de r_1 y r_2 como

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

II Ley: "La línea que conecta al planeta con el sol barre áreas iguales en tiempos iguales"

III Ley: "Para una órbita elíptica con semieje mayor a se cumple

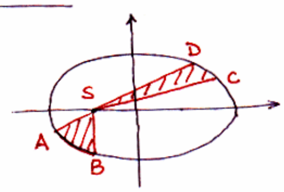
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3$$

donde T es el período de revolución"

Introducción a la Física FI10A-02
Andrés Meza
Semestre Primavera 2006

DEMOSTRACIÓN 2ª LEY DE KEPLER

$$\vec{F} = -\frac{GM_s m}{r^2}\hat{r}$$



Entonces, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \vec{L} = cte$$

porque $\vec{F}$ apunta en la dirección radial.

$$\text{Area } \Delta_{SCD} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{CD}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}\,\Delta t|$$

$$\Delta_{SCD} = \frac{\Delta t}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|$$

analogamente

$$\Delta S_{AB} = \frac{\Delta t}{2} \left| \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \right|$$

pero $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \vec{r} \times \vec{v} = cte$

$$\Rightarrow \quad \left| \vec{r} \times \vec{v} \right| = cte$$

Por lo tanto

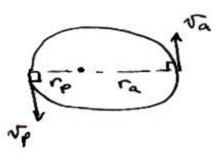
$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{CD}$$

QED

Ejemplo

Un satélite se mueve en una órbita elíptica alrededor de la Tierra con perigeo r_p y apogeo r_a. Encuentre su velocidad en dichos puntos.

sol :



v_a y v_p son $\perp$s al vector posición

$$L_o = cte = m v_\perp r$$

$$L_o = m v_a r_a = m v_p r_p \Rightarrow \frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a}$$

Energía:

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GMm}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GMm}{r_p}$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{r_a^2}{r_p^2} v_a^2 - \frac{GMm}{r_p}$$

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{r_a^2}{r_p^2}\right] v_a^2 = GM\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_a}{r_p}\right)\left(1 + \frac{r_a}{r_p}\right) v_a^2 = \frac{GM}{r_a}\left(1 - \frac{r_a}{r_p}\right)$$

$$\boxed{v_a^2 = \frac{2GM}{r_a} \frac{1}{1 + r_a/r_p}}$$

Entonces $$v_p^2 = \frac{2GMr_a}{r_p^2} \frac{1}{1 + r_a/r_p}$$