

Oscilaciones



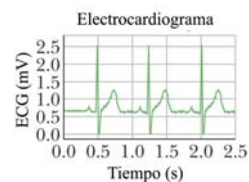
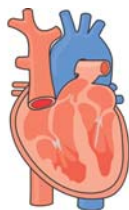
El 19 de septiembre de 1985, las ondas sísmicas que se originaron en un terremoto en la costa oeste de México causaron graves daños en la Ciudad de México, alrededor de 400 km del epicentro.



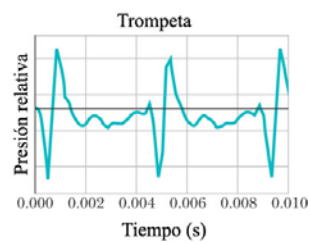
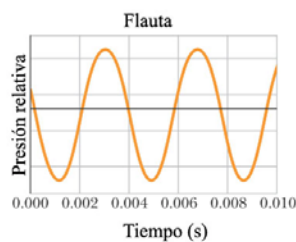
¿Por qué las ondas sísmicas causaron tal devastación en Ciudad de México, pero casi ningún daño en el resto del país?

469

Cualquier cantidad que se repite a intervalos regulares de tiempo se dice que muestra un comportamiento periódico.

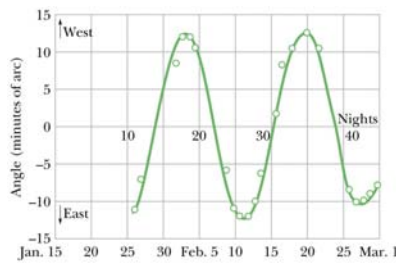


Algunas oscilaciones (por ejemplo, las variaciones eléctricas del corazón o la presión del sonido de una trompeta) son periódicas pero complejas. Mientras que otras (por ejemplo, las oscilaciones de la presión del aire causadas por una flauta) son mucho más simples.



470

Si las variaciones periódicas de una cantidad física pueden ser representadas por una función seno (o coseno), las llamaremos **oscilaciones sinusoidales**.



Angulo entre Júpiter y su luna Calisto como es visto desde la Tierra. Una oscilación completa toma 16,8 días aprox.

El movimiento sinusoidal de las partículas en un sistema mecánico es conocido como **Movimiento Armónico Simple (MAS)**.

Las próximas semanas estarán dedicadas a entender cómo algunas fuerzas dan origen a un MAS. La comprensión de este movimiento es de vital importancia para entender los fenómenos ondulatorios de ondas mecánicas y electromagnéticas. Además, el conocimiento del MAS entrega una base sólida para entender algunos tópicos de física moderna, tales como la naturaleza ondulatoria de la luz y como los átomos y núcleos absorben y emiten energía.

471



MOVIMIENTO SINUSOIDAL

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

Desplazamiento en el instante t

Amplitud

Frecuencia angular

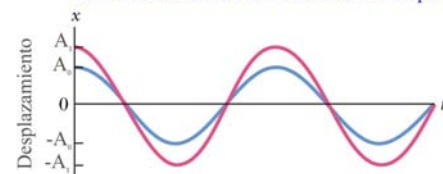
Fase inicial (ángulo de fase)

A, ω, ϕ_0 son constantes

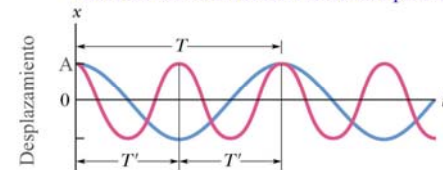
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{Periodo (s)}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{Frecuencia (Hz = s}^{-1}\text{)}$$

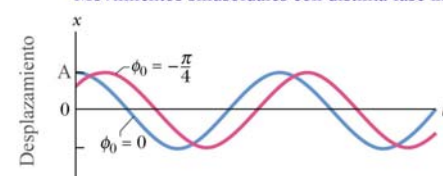
Movimientos sinusoidales con distinta amplitud



Movimientos sinusoidales con distinto periodo

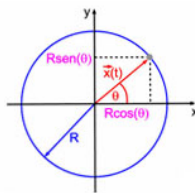
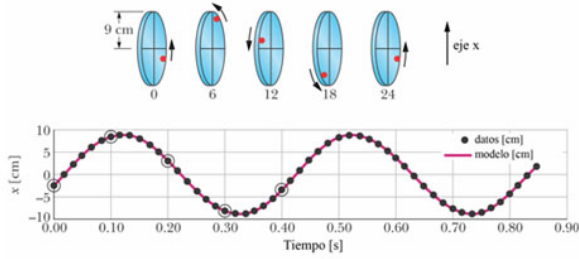


Movimientos sinusoidales con distinta fase inicial



472

MOVIMIENTO SINUSOIDAL Y MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME



PARA LA COORD. x TENEMOS

$$x = R \cos \theta$$

PERO

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

VELOCIDAD
ANGULAR

ÁNGULO θ
EN $t = 0$

ENTONCES

$$x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0)$$

473

LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA SEGÚN x ES

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

Y LA ACCELERACIÓN ES

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$$

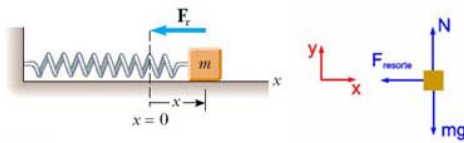
POR LO TANTO

$$\ddot{x} = -\omega^2 \underbrace{R \cos(\omega t + \theta_0)}_x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x \quad \text{MOVIMIENTO ARHÓNICO SIMPLE}$$

474

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE: SISTEMA RESORTE-MASA



$$F_{\text{resorte}} = -kx$$

2ª LEY DE NEWTON $-kx = ma_x$

$$\Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x \quad \text{Ecuación de Mov. PARA LA MASA } m$$

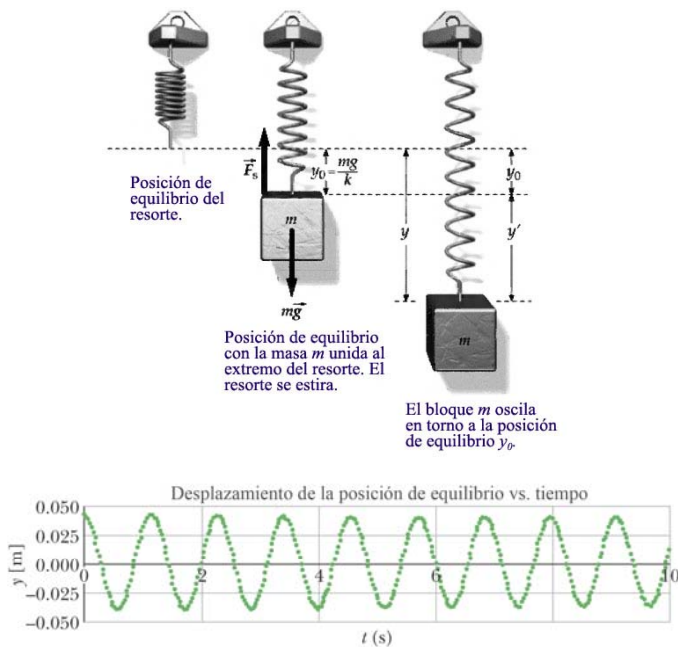
DEFINAMOS $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ ENTONCES LA EC. DE MOVIMIENTO PARA m QUEDA

$$a_x = -\omega_0^2 x$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \text{M.A.S.}$$

UNIDADES $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{[kg/s^2]}{[kg]} = \left[\frac{1}{s^2}\right]$

475



La frecuencia de oscilación es la misma que para un sistema equivalente que oscila horizontalmente.



476

MAS : SOLUCIÓN

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (\omega = \text{FRECUENCIA DEL OSCILADOR})$$

LA SOLUCIÓN (ÚNICA) DE ESTA ECUACIÓN
ESTÁ DADA POR

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

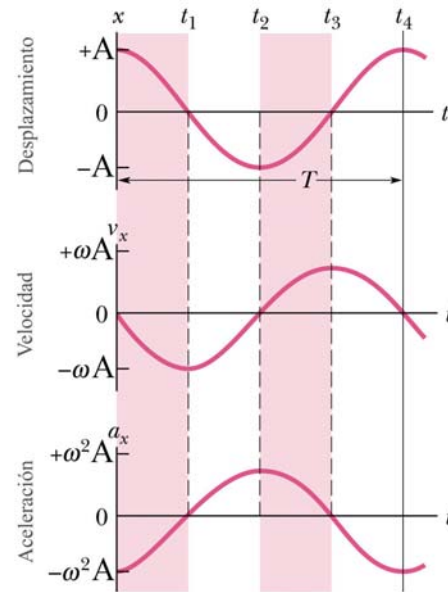
$\swarrow$ FRECUENCIA ANGULAR
 $\nwarrow$ FASE
AMPLITUD DEL MOVIMIENTO

LAS CONSTANTES A Y φ ESTÁN DADAS POR
LAS CONDICIONES INICIALES.

POR EJEMPLO, SI EN $t=0$, $x=x_0$ Y $\dot{x}=\dot{x}_0$
SE TIENE:

$$x_0 = A \cos \varphi \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}_0 = -A\omega \sin \varphi \quad (2)$$



477

HAGAMOS (2)/(1)

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0} = \frac{-A\omega \sin \varphi}{A \cos \varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega}} \quad \text{FASE DEL MOVIMIENTO}$$

TOmando AHORA $(1)^2 + (2)^2$ SE TIENE
 ω^2

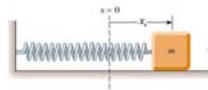
$$x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2 = A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}} \quad \text{AMPLITUD DEL MOVIMIENTO (A > 0)}$$

478

EJEMPLOS

i)



$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

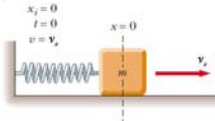
$$\Rightarrow v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0)$$

EN $t=0$ $x(0) = X_0 = A \cos \phi_0$
 $v(0) = -A\omega \sin \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = 0$
 $\Rightarrow A = X_0$

POR LO TANTO EL DESPLAZAMIENTO DEL BLOQUE ESTÁ DADO POR

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t)$$

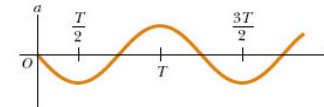
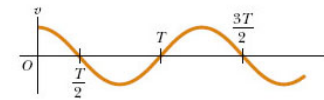
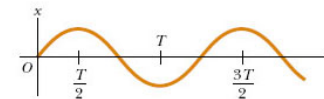
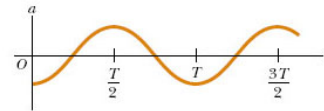
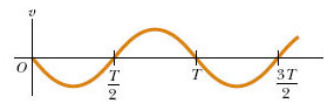
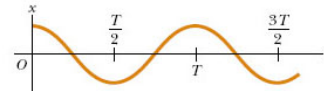
ii)



EN ESTE CASO, EN $t=0$
 $x(0) = 0 = A \cos \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$
 $v(0) = v_0 = -A\omega \sin \phi_0$
 $\Rightarrow \phi_0 = -\frac{\pi}{2} \quad A = \frac{v_0}{\omega}$

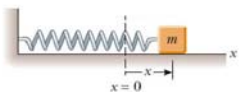
POR LO TANTO

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



479

ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



ENERGÍA CINÉTICA

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

ENERGÍA POTENCIAL

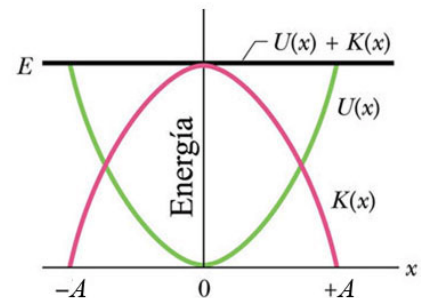
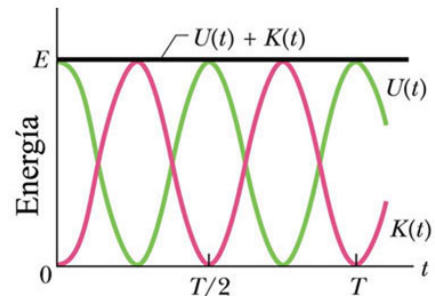
$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

ENERGÍA TOTAL

$$E = K + U = \frac{1}{2} A^2 [m\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) + k \cos^2(\omega t + \phi_0)]$$

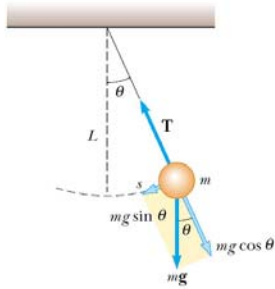
PERO $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ENTONCES $E = \frac{1}{2} k A^2$

LA ENERGÍA MECÁNICA TOTAL DE UN OSCILADOR ARMÓNICO ES CONSTANTE Y PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO



480

PÉNDULO SIMPLE



2ª LEY DE NEWTON

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

PERO $s = L\theta$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

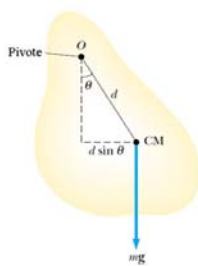
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Si $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$ ENTONCES LA EC. DE MOVIMIENTO ES

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta \quad \text{MAS CON } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

481

PÉNDULO FÍSICO



$$\sum \tau = I \ddot{\alpha} \Rightarrow$$

$$-mgd \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

Si $\theta \ll 1 \Rightarrow$

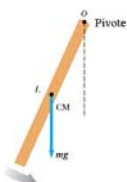
$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I} \theta$$

$$\text{MAS CON } \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

I = MOMENTO DE INERCIA
RESPECTO AL PIVOTE

d = DISTANCIA DEL PIVOTE
AL CENTRO DE MASA

EJEMPLO

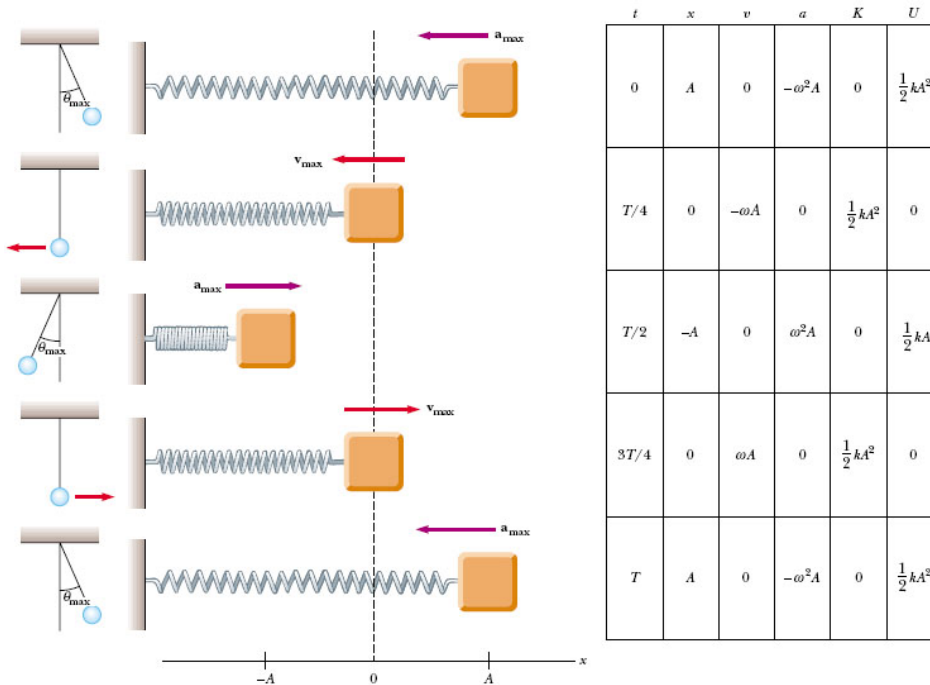


$$\omega^2 = \frac{mgL/2}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3}{2} \frac{g}{L}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

482

PÉNDULO VERSUS OSCILADOR ARMÓNICO



483

OSCILADOR AMORTIGUADO

Resorte k

Masa m

Amortiguador b

$$\vec{F}_{\text{viscoso}} = -b \vec{v} \quad (b = c\eta)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$m \ddot{x} = -kx - b \dot{x}$$

SEA $x(t) = A e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{x} = i\omega A e^{i\omega t}$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$$

ENTONCES

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} = -\frac{k}{m} A e^{i\omega t} - \frac{b}{m} i\omega A e^{i\omega t}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{2}{\tau} i\omega = 0$$

CON $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ Y $\tau = \frac{2b}{m}$ CONSTANT DE DECAIMIENTO

484

SEA $\alpha = \omega + i\alpha_0 \Rightarrow \alpha^2 = \omega^2 + 2i\alpha_0\omega - \alpha_0^2$

$$\omega^2 + 2i\alpha_0\omega - \alpha_0^2 - \omega_0^2 - i\omega\frac{2}{\tau} + \alpha_0\frac{2}{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2 + \alpha_0\frac{2}{\tau} = 0$$

$$2\alpha_0\omega - \omega\frac{2}{\tau} = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{\tau}$$

ENTONCES

$$\omega^2 - \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 + \frac{2}{\tau^2} = 0$$

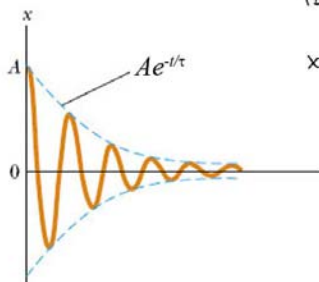
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

POR LO TANTO

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t} e^{i\omega t}$$

485

OSCILADOR AMORTIGUADO



TOMANDO LA PARTE REAL

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

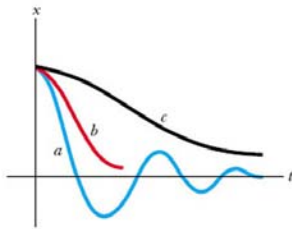
$$\text{con } \alpha_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO DE UN OSCILADOR AMORTIGUADO DECRECE CON EL TIEMPO

486

OSCILADOR CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO



$$\text{Si } \omega_0 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow$$

$$x(t) = A e^{-\omega_0 t}$$

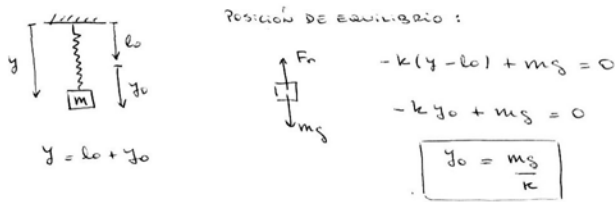
$\Rightarrow$ EL SISTEMA VUELVE SIN OSCILAR A SU POSICIÓN INICIAL

$$\text{Si } \omega_0 < \frac{1}{\tau} \Rightarrow \omega \text{ ES IMAGINARIO, POR LO TANTO}$$

$$x(t) = A e^{-(\alpha \pm i\omega')t} \quad \text{CON } \omega' = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$$

$\Rightarrow$ EL SISTEMA NO OSCILA PERO VUELVE A SU POSICIÓN DE EQUILIBRIO MÁS LENTAMENTE QUE EN EL CASO AMORTIGUADO CRÍTICO.

Ejemplo: Oscilador armónico vertical



Ecuación DE MOVIMIENTO:

$$-k y + m g = m \ddot{y}$$

PERO $y = y' + y_0$

$$\Rightarrow -k(y' + y_0) + m g = m \ddot{y}'$$

$$-k y' - k \frac{m g}{k} + m g = m \ddot{y}'$$

$$\therefore -\frac{k}{m} y' = \ddot{y}' \quad \text{MAS}$$

LA SOLUCIÓN DE ESTA ECUACIÓN ES

$$y'(t) = A \cos(\omega t + \psi) \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{m g}{k} + A \cos(\omega t + \psi)$$

484

TODAS LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN ESTE SISTEMA SON CONSERVATIVAS $\Rightarrow$ ENERGÍA MECÁNICA TOTAL ES CTE.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y^2 - m g y$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k (y_0 + y')^2 - m g (y_0 + y')$$

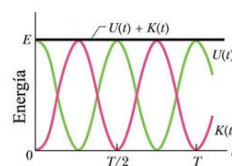
$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y_0^2 + k y_0 y' + \frac{1}{2} k y'^2 - m g y_0 - m g y'$$

PERO $y_0 = \frac{m g}{k} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y'^2 - \frac{1}{2} k y_0^2$$

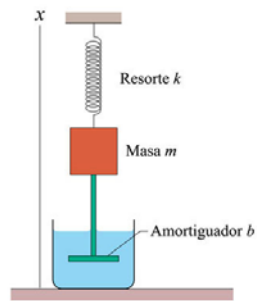
ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO

$$E' = E + \frac{1}{2} k y_0^2 = \frac{1}{2} k A^2$$



485

OSCILADOR AMORTIGUADO



$$\vec{F}_{viscosa} = -b\vec{v} \quad (b = \text{cte})$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$m \ddot{x} = -kx - b \dot{x}$$

SEA $x(t) = A e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{x} = i\omega A e^{i\omega t}$
 $\ddot{x} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$

ENTONCES

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} = -\frac{k}{m} A e^{i\omega t} - \frac{b}{m} i\omega A e^{i\omega t}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{2}{\tau} i\omega = 0$$

CON $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ Y $\tau = \frac{2m}{b}$ CONSTANTE DE DECAIMIENTO

486

SEA $\alpha = \omega + i\omega_0 \Rightarrow \alpha^2 = \omega^2 + 2i\omega_0\omega - \omega_0^2$

$$\omega^2 + 2i\omega_0\omega - \omega_0^2 - \omega_0^2 - i\omega \frac{2}{\tau} + \omega_0^2 \frac{2}{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 - \omega_0^2 + \omega_0^2 \frac{2}{\tau} = 0$$

$$2\omega_0\omega - \omega \frac{2}{\tau} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

ENTONCES

$$\omega^2 - \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 + \frac{2}{\tau^2} = 0$$

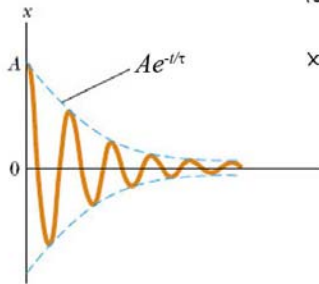
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

POR LO TANTO

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t} e^{i\omega t}$$

487

OSCILADOR AMORTIGUADO



Tomando la parte real

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

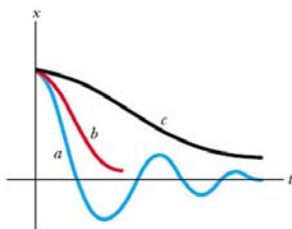
$$\text{con } \alpha_0 = \frac{1}{2}$$

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}}$$

LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO DE UN OSCILADOR AMORTIGUADO DECRECE CON EL TIEMPO

488

OSCILADOR CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO



$$\text{Si } \omega_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t}$$

$\Rightarrow$ EL SISTEMA VUELVE SIN OSCILAR A SU POSICIÓN INICIAL

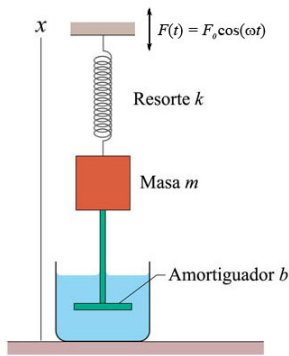
Si $\omega_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow \omega$ ES IMAGINARIO, POR LO TANTO

$$x(t) = A e^{-(\alpha_0 + \omega')t} \quad \text{CON } \omega' = \sqrt{\frac{1}{4} - \omega_0^2}$$

$\Rightarrow$ EL SISTEMA NO OSCILA PERO VUELVE A SU POSICIÓN DE EQUILIBRIO MÁS LENTAMENTE QUE EN EL CASO AMORTIGUADO CRÍTICO.

489

OSCILACIONES FORZADAS RESONANCIA.



Ec. de movimiento

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (*)$$

Sea $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

entonces

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

reemplazando en (*)

$$-mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - bA\omega \sin(\omega t + \varphi) + kA \cos(\omega t + \varphi) = F_0 \cos \omega t$$

490

expandiendo $\cos(\omega t + \varphi)$ y $\sin(\omega t + \varphi)$ se tiene

$$[-mA\omega^2 \cos \varphi - bA\omega \sin \varphi + kA \cos \varphi - F_0] \cos \omega t + [mA\omega^2 \sin \varphi - bA\omega \cos \varphi - kA \sin \varphi] \sin \omega t = 0$$

esta expresión es válida para todo instante t , por lo tanto

$$-mA\omega^2 \cos \varphi - bA\omega \sin \varphi + kA \cos \varphi - F_0 = 0 \quad (1)$$

$$mA\omega^2 \sin \varphi - bA\omega \cos \varphi - kA \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

De (2) tenemos

$$(m\omega^2 - k) \sin \varphi = b\omega \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{m\omega^2 - k} = \frac{b\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (3)$$

donde $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ (frec. natural del resorte)

491

De la ec. (1) se tiene

$$A \left[(k - m\omega^2) \cos\varphi - b\omega \sin\varphi \right] = F_0$$

$$A \cos\varphi \left[m(\omega_0^2 - \omega^2) - b\omega \tan\varphi \right] = F_0$$

usando (3) y la relación $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$ se obtiene

$$A \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2\omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}} \left[m(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{b^2\omega^2}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \right] = F_0$$

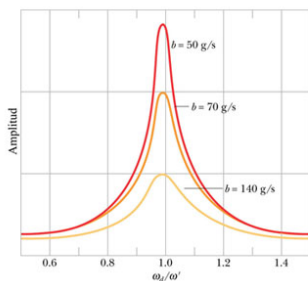
$$A \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2\omega^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} \left[\frac{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] = F_0$$

492

$$\Rightarrow A \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} = F_0$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{b\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$



493

Ondas mecánicas

Cuando un escarabajo camina sobre la arena a unas pocas decenas de centímetros de un escorpión, éste inmediatamente se vuelve hacia él y corre raudamente para comérselo. El escorpión puede hacer esto incluso de noche, sin ver ni oír al escarabajo.



¿Cómo puede el escorpión detectar con tal precisión a su presa?