

Ondas mecánicas

Cuando un escarabajo camina sobre la arena a unas pocas decenas de centímetros de un escorpión, éste inmediatamente se vuelve hacia él y corre raudamente para comérselo. El escorpión puede hacer esto incluso de noche, sin ver ni oír al escarabajo.

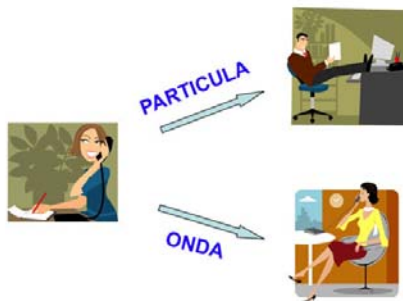


¿Cómo puede el escorpión detectar con tal precisión a su presa?

494

ONDAS MECÁNICAS

ONDAS Y PARTÍCULAS



PARTÍCULAS Y ONDAS TRANSMITEN ENERGÍA Y MOMENTUM. SIN EMBARGO, LAS ONDAS NO TRANSPORTAN MATERIA DE UN LUGAR OTRO.

495

TIPOS DE ONDAS {

- ONDAS MECÁNICAS
- ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
- ONDAS DE MATERIA (MECÁNICA CUÁNTICA)

LAS ONDAS MECÁNICAS SE GENERAN CUANDO UN MEDIO ES PERTURBADO. EJEMPLOS:

- OLAS EN UN ESTANQUE
- ONDAS DE SONIDO
- ONDAS SISMICAS

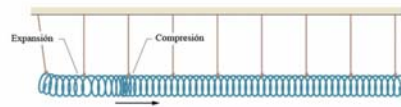
UNA ONDA MECÁNICA ES UNA PERTURBACIÓN DEL MEDIO QUE VIAJA CON VELOCIDAD CONSTANTE (VELOCIDAD DE ONDA), LA CUAL DEPENDE SÓLO DE LAS PROPIEDADES DEL MEDIO

LAS ONDAS MECÁNICAS IDEALES NO PIERDEN ENERGÍA MECÁNICA NI CAMBIAN SU FORMA AL MOVERSE A TRAVÉS DEL MEDIO

496

PULSOS Y ONDAS

PULSO LONGITUDINAL

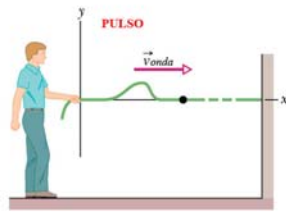


PULSO TRANSVERSAL

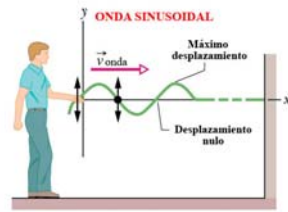


EN UNA ONDA TRANSVERSAL EL DESPLAZAMIENTO DEL MEDIO ES PERPENDICULAR A LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LA ONDA.

497

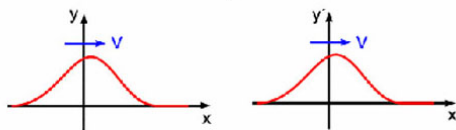


Si el movimiento que causa la perturbación se repite a intervalos regulares, el resultado es una perturbación periódica viajera (onda continua)



498

PULSOS DE ONDA



El pulso de la figura es estacionario en el sistema de referencia S' , el cual se mueve con velocidad v a S .

Las coords. de los dos sistemas de referencia están relacionadas por

$$x = x' + vt$$

En el sistema S' , el pulso tiene una forma dada por

$$y' = f(x')$$

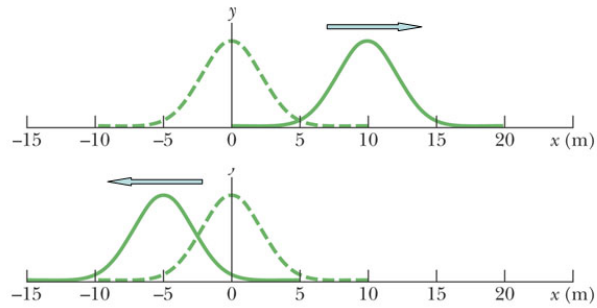
entonces en el sistema S la forma del pulso es

$$y = f(x - vt)$$

donde $f()$ es una función arbitraria.

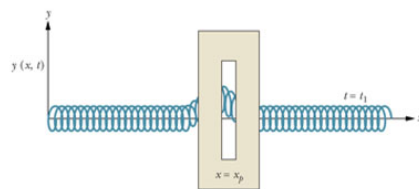
499

En general, $f(x-ct)$ representa un pulso moviéndose hacia la derecha y $f(x+ct)$ un pulso que se mueve hacia la izquierda.



La función $y = f(x \pm vt)$ se denomina función de onda.

ONDAS TRANSVERSALES SINUSOIDALES

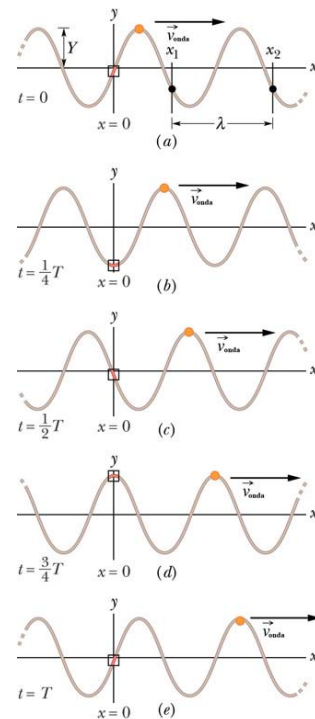


DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN $x = 0$

$$y(0, t) = Y \cos(\omega t) = Y \sin(\omega t + \pi/2)$$

DESPLAZAMIENTO DE LA ONDA EN $t = 0$

$$y(x, 0) = Y \sin(kx + \pi/2)$$



EN GENERAL

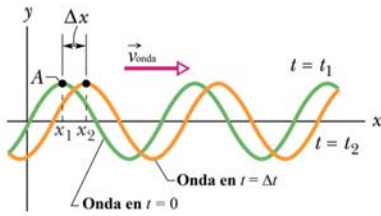
$$y(x,t) = Y \sin[kx + \omega t + \phi_0]$$

ϕ_0 ES LA FASE INICIAL CUANDO $x=0$ Y $t=0$

SE DEFINE LA FRECUENCIA DE UNA ONDA POR

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \lambda f = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

$$\text{PERIODO } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

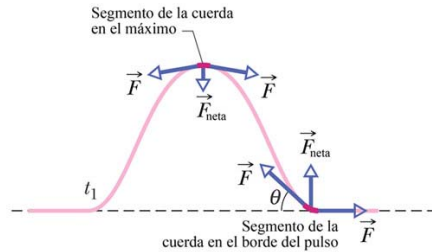


VELOCIDAD DE ONDA

$$v_{\text{onda}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE UNA ONDA TRANSVERSAL EN UNA CUERDA

CONSIDEREMOS EL MOVIMIENTO DE UN PEDAZO DE LA CUERDA CUANDO EL PULSO PASA POR EL.



Si v_{onda} es la velocidad de propagación de la onda, la masa del segmento de la cuerda afectado en un tiempo Δt es

$$m = \mu v_{onda} \Delta t$$

↑
DENSIDAD DE
MASA LINEAL

503

EL EXTREMO DE LA CUERDA QUE COMIENZA A SER AFECTADO POR LA ONDA RECIBE UN IMPULSO

$$\Delta p_y = F_y \Delta t$$

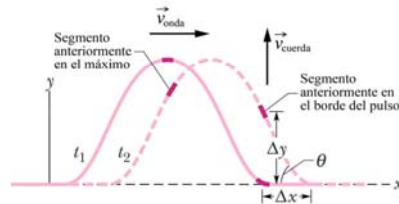
$$\Delta p_y = m \Delta v_y = m v_y$$

$$\Rightarrow m v_y = \mu v_{onda} \Delta t v_y = F_y \Delta t$$

PERO $F_y = F \sin \theta$ y POR GEOMETRÍA

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{v_y}{v_{onda}}$$



ENTONCES

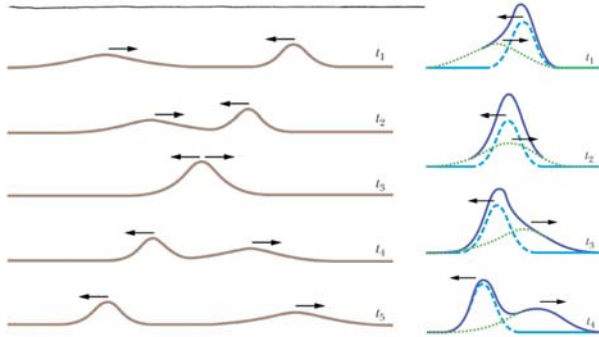
$$\mu v_{onda} \Delta t v_{onda} \tan \theta = F \sin \theta \Delta t$$

$$\mu v_{onda}^2 = F \sin \theta \approx F$$

$$\therefore v_{onda} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

504

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN PARA ONDAS



CUANDO DOS ONDAS SE SUPERPONEN, EL DESPLAZAMIENTO DE CADA PUNTO DE LA CUERDA ES LA SUMA DE LOS DOS DESPLAZAMIENTOS QUE TENDRIAN DE CADA ONDA SEPARADAMENTE.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

505

INTERFERENCIA DE ONDAS

SEAN DOS ONDAS SINUSOIDALES

$$y_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$$

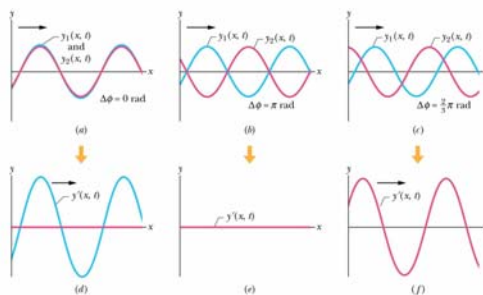
P.O. DE SUPERPOSICIÓN $\Rightarrow y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

USANDO LA IDENTIDAD

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right]$$

SE TIENE

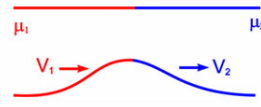
$$y(x,t) = 2A \cos \left(\frac{1}{2}\phi_0 \right) \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi_0)$$



506

REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS EN UNA CUERDA

Supongamos que una onda se propaga a lo largo de dos cuerdas de distinta densidad



$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

con T = tensión de la cuerda y μ = densidad de masa lineal.

Coloquemos un sistema de coordenadas en la unión de las cuerdas.

En $x=0$ que tiene que cumplir

$$y_i + y_r = y_t \quad (1)$$

$$\frac{dy_i}{dx} + \frac{dy_r}{dx} = \frac{dy_t}{dx} \quad (2)$$

donde y_i es la onda incidente, y_r es la onda reflejada e y_t es la onda transmitida.

507

Las condiciones (1) y (2) implican que la onda es continua en el punto $x=0$.

Ej: onda armónica

$$y_i = A \cos(k_1 x - \omega t) \quad k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

$$y_r = B \cos(k_1 x + \omega t)$$

$$y_t = C \cos(k_2 x - \omega t) \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

entonces en $x=0$

$$(1) \rightarrow A \cos(-\omega t) + B \cos(\omega t) = C \cos(-\omega t)$$

$$(2) \rightarrow -A k_1 \sin(-\omega t) - B k_1 \sin(\omega t) = -C k_2 \sin(-\omega t)$$

pero $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$ y $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow A + B = C \quad (3)$$

$$A k_1 - B k_1 = C k_2 \quad (4)$$

508

De (3)

$$B = C - A$$

reemplazando en (4)

$$A - (C - A) = C \frac{k_2}{k_1}$$

$$2A = C \left(\frac{k_2}{k_1} + 1 \right) \Rightarrow C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

Por lo tanto

$$B = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A - A \Rightarrow B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A$$

En términos de las velocidades v_1 y v_2 se tiene

$$B = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A \quad \text{amplitud onda reflejada}$$

$$C = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} A \quad \text{amplitud onda transmitida}$$

509

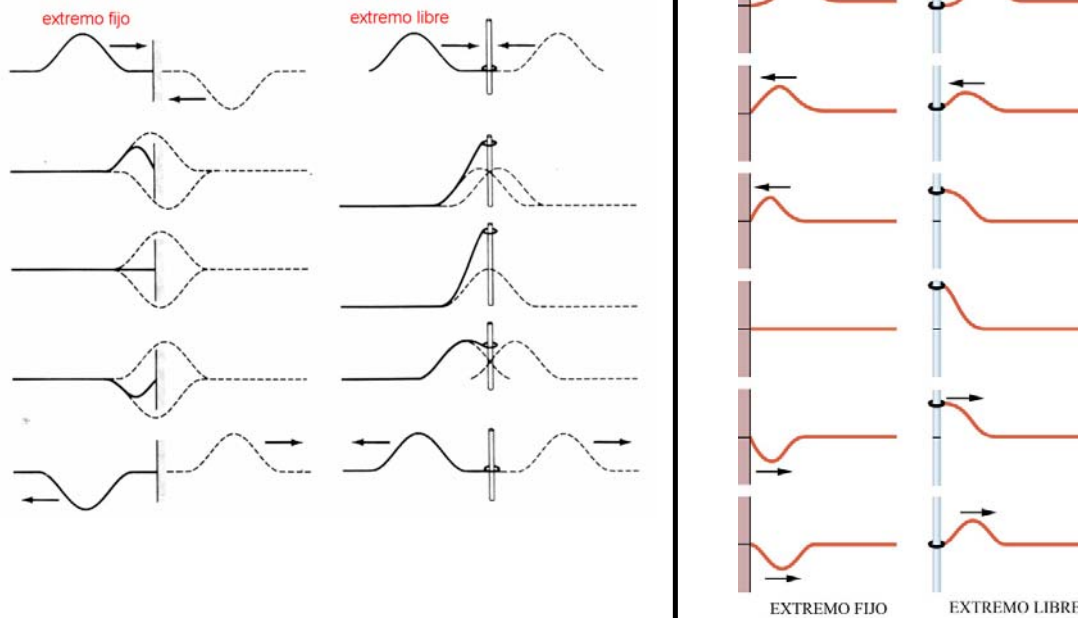
Si: $v_1 = v_2 \Rightarrow B = 0$ y $C = A$ i.e. no existe
onda reflejada

Si: $v_1 > v_2 \Leftrightarrow \mu_2 > \mu_1 \Rightarrow B < 0$ i.e. la onda
reflejada se invierte w.r. a la
onda incidente

Si: $v_2 > v_1 \Leftrightarrow \mu_1 > \mu_2 \Rightarrow B > 0$ i.e. la onda
reflejada no se invierte

510

CONDICIONES DE BORDE



511

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA

Consideremos una cuerda con uno de sus extremos fijo.

La superposición (suma) de dos ondas con igual amplitud, periodo y longitud de onda pero que viajan en sentidos opuestos genera una onda estacionaria.

En efecto, sean

$$y_1(x,t) = A \sin(kx + \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

y_1 es una onda que viaja hacia la izquierda e

y_2 viaja hacia la derecha

La onda resultante $y(x,t)$ está dada por

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y(x,t) = A \sin(kx + \omega t) + A \sin(kx - \omega t)$$

512

PERO $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right]$

ENTONCES

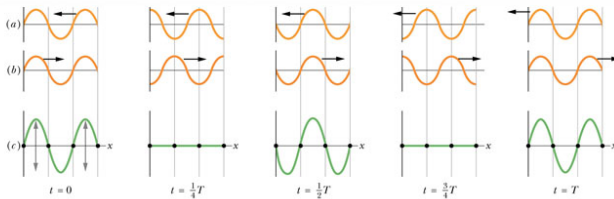
$$y(x, t) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

onda estacionaria en una cuerda
con extremo fijo en $x = 0$

los odos están dados por la condición $y(x, t) = 0$

$$\Rightarrow \sin kx = 0 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$



513

MODOS NORMALES DE UNA CUERDA

Consideremos ahora una cuerda de largo L fija en ambos extremos (ej. cuerdas de una guitarra).

En este caso la superposición de dos ondas de igual amplitud, período y longitud de onda genera una onda estacionaria de la forma

$$y(x, t) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

donde ahora se tiene que cumplir que $y = 0$ en $x = 0$ y también en $x = L$. Por lo tanto,

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

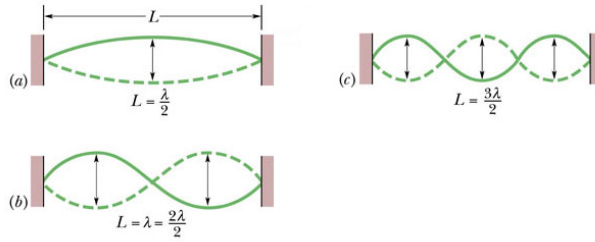
$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (*)$$

514

o bien $\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (*) \Rightarrow \quad f_n = n \frac{v}{2L} \quad (*)$

Es decir, la frecuencia o longitud de onda de la onda resultante tiene que cumplir $(*)$ para que la onda sea estacionaria.

Las frecuencias f_n se llaman armónicos. El primer armónico $f_1 = \frac{v}{2L}$ se denomina frecuencia fundamental.

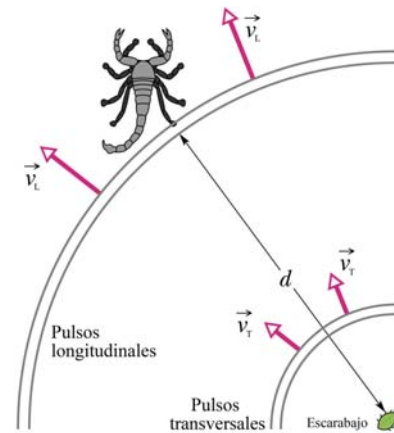


Ondas mecánicas

Cuando un escarabajo camina sobre la arena a unas pocas decenas de centímetros de un escorpión, éste inmediatamente se vuelve hacia él y corre raudamente para comérselo. El escorpión puede hacer esto incluso de noche, sin ver ni oír al escarabajo.



¿Cómo puede el escorpión detectar con tal precisión a su presa?



$$\Delta t = \frac{d}{v_T} - \frac{d}{v_L} = \frac{d}{50 \text{ m/s}} - \frac{d}{150 \text{ m/s}}$$

$$\Rightarrow d = (75 \text{ m/s}) \Delta t$$

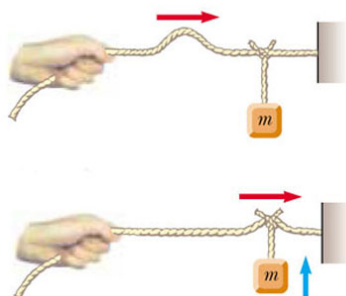
Si $\Delta t = 4 \text{ ms} \Rightarrow d = 30 \text{ cm}$

516

ENERGÍA TRANSMITIDA POR ONDAS ARMÓNICAS EN UNA CUERDA

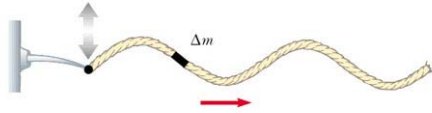
A medida que una onda mecánica se propaga por algún medio, ésta transporta energía (pero no masa).

Esto se puede observar colgando una pequeña masa a una cuerda estirada y mandando un pulso por la cuerda. Cuando el pulso llega al punto donde cuelga la masa, ésta se levanta. Esto significa que se ejerce un trabajo i.e. hay transferencia de energía.



517

Para una onda armónica $y = A \sin(kx - \omega t)$ podemos calcular la energía cinética de un segmento de la cuerda de largo Δx y masa $\Delta m = \mu \Delta x$.



La velocidad vertical de este segmento es $\frac{dy}{dt}$, donde x es fijo.

$$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} \Delta m v_y^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

Entonces

$$y = A \sin(kx - \omega t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$$

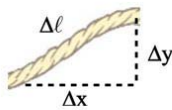
luego

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x \cos^2(kx - \omega t)$$

518

Por otro lado, la energía potencial del segmento Δm está dada por

$$\Delta U = T(\Delta l - \Delta x)$$



Δx = largo inicial

Δl = largo final

T = tensión

Para pequeñas perturbaciones de la cuerda en torno a su posición de equilibrio $\Delta y \ll \Delta x$, entonces

$$\Delta l \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\Delta l \approx \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2}$$

$$\Delta l \approx \Delta x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \Delta l - \Delta x \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \Delta x$$

519

Para una onda armónica

$$y = A \sin(kx - \omega t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = Ak \cos(kx - \omega t)$$

$$\therefore \Delta U \approx \frac{1}{2} A^2 k^2 \cos^2(kx - \omega t) \Delta x T$$

pero $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ = velocidad de propagación de la onda.

Entonces

$$\Delta U = \frac{1}{2} A^2 k^2 \mu v^2 \cos^2(kx - \omega t) \Delta x$$

pero $v = \frac{\omega}{k}$ entonces

$$\Delta U = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \cos^2(kx - \omega t) \Delta x$$

Finalmente, la energía total de un segmento de cuerda que transporta una onda armónica es

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta U = \mu \omega^2 A^2 \Delta x \cos^2(kx - \omega t)$$

520

ΔE varía con el tiempo. Su valor máximo es

$$\Delta E_{\max} = \mu \omega^2 A^2 \Delta x$$

la potencia transmitida es

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \mu \omega^2 A^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \cos^2(kx - \omega t)$$

pero $\frac{\Delta x}{\Delta t} =$ velocidad de propagación de la onda

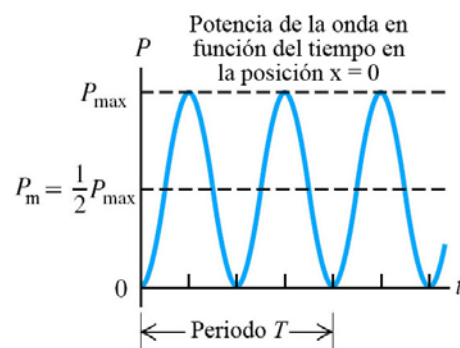
$$\text{Por lo tanto } P = \mu \omega^2 A^2 v \cos^2(kx - \omega t)$$

El valor medio de $\cos^2(kx - \omega t)$ es $\frac{1}{2}$. Entonces la energía media que transporta la onda es

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x$$

y la potencia media es

$$P_m = \frac{\Delta E_m}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$$



521

Ondas de Sonido



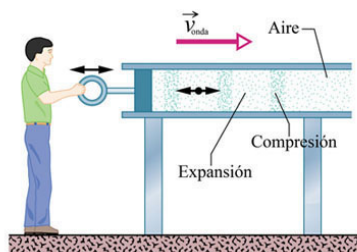
El murciélago herradura no sólo puede localizar una polilla volando en total oscuridad, también puede determinar su velocidad relativa para así poder capturarla en pleno vuelo.



¿Cómo funciona el sistema de detección del murciélago?
¿Cómo podría la polilla engañar al sistema o al menos reducir su efectividad?

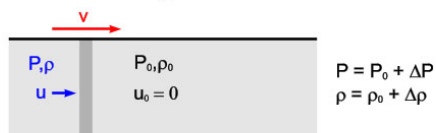
522

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE UN PULSO EN UN FLUIDO

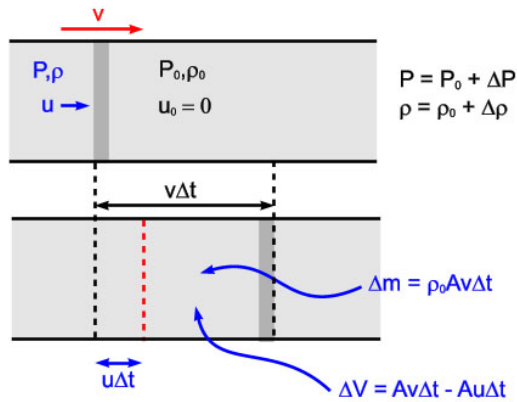


Consideremos un pulso de compresión que se propaga con velocidad v en un fluido. Inicialmente el fluido tiene presión P_0 y densidad ρ_0 y se encuentra en reposo $u_0 = 0$.

El fluido detrás del pulso tiene presión P , densidad ρ y velocidad u .



523



conservación de masa $\Rightarrow \rho \Delta V = \rho_0 \Delta V$

$$\rho(v-u)A\Delta t = \rho_0 \Delta V$$

$$\rho(v-u) = \rho_0 \quad (*)$$

524

El impulso neto ejercido sobre este elemento de volumen está dado por

$$\Delta p = (P - P_0) A \Delta t$$

pero $\Delta p = \Delta m u = \rho_0 \Delta V u$ entonces

$$(P - P_0) A \Delta t = \rho_0 \Delta V u$$

$$\Rightarrow u = \frac{P - P_0}{\rho_0 \Delta p} = \frac{\Delta p}{\rho_0 \Delta p} \quad (\text{velocidad inmediatamente detras del pulso de compresión})$$

Reemplazando en (*) se tiene

$$\rho \left\{ v - \frac{\Delta p}{\rho_0 \Delta p} \right\} = \rho_0 \Delta p$$

$$(\rho - \rho_0) v^2 = \rho_0 \Delta p \approx \Delta p$$

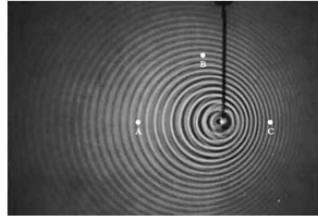
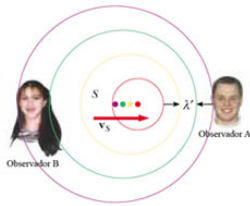
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} \quad \text{velocidad de propagación de un pulso en un fluido}$$

Speed of Sound in Various Media

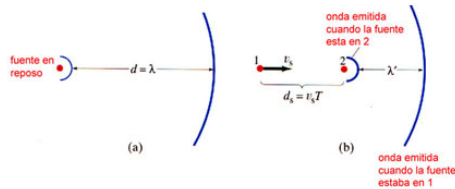
Medium	v (m/s)
Gases	
Hydrogen (0°C)	1 286
Helium (0°C)	972
Air (20°C)	343
Air (0°C)	331
Oxygen (0°C)	317
Liquids at 25°C	
Glycerol	1 904
Seawater	1 533
Water	1 493
Mercury	1 450
Kerosene	1 324
Methyl alcohol	1 143
Carbon tetrachloride	926
Solids^a	
Pyrex glass	5 640
Iron	5 950
Aluminum	6 420
Brass	4 700
Copper	5 010
Gold	3 240
Lucite	2 680
Lead	1 960
Rubber	1 600

525

EFFECTO DOPPLER (1803-1853)



Primero consideremos el caso de una fuente que se mueve con velocidad v_s hacia el observador. Suponiendo que el aire está en reposo respecto al observador se tiene



$$\lambda' = \lambda - d_s = \lambda - v_s T \Rightarrow \lambda' = \lambda \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)$$

526

entonces la nueva frecuencia está dada por

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f' = \frac{f}{1 - v_s/v}}$$

Como $v_s > 0 \Rightarrow f' > f$

Ahora consideremos una fuente que se aleja del observador. En este caso



$$\lambda' = \lambda + v_s T$$

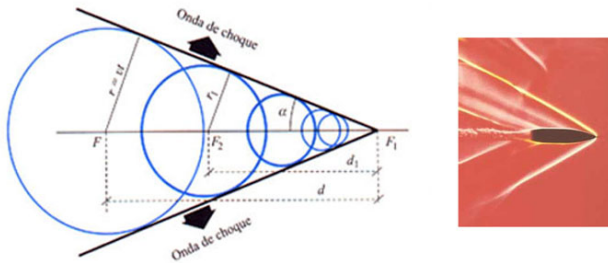
$$\lambda' = \lambda \left(1 + \frac{v_s}{v}\right)$$

$$\Rightarrow f' = \frac{f}{1 + v_s/v}$$

527

ONDAS DE CHOQUE. NÚMERO DE MACH

Este tipo de ondas se produce cuando la fuente emisora se mueve en un medio con mayor velocidad que la de propagación de las ondas sonoras.



Si en F, la fuente emite una onda, al cabo de un tiempo t esta onda habrá recorrido una distancia $r = vt$ mientras que la fuente se habrá desplazado una distancia $d = v_F t$, entonces

$$\frac{r}{v} = \frac{d}{v_F} \Rightarrow \frac{d}{r} = \frac{v_F}{v}$$

528

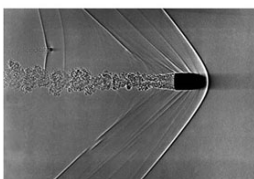
En una posición intermedia F_1 se tiene que la onda viaja una distancia $r_1 = v t_1$ en cambio la fuente se mueve una distancia $d_1 = v_F t_1$

$$\frac{r_1}{v} = \frac{d_1}{v_F} \Rightarrow \frac{d_1}{r_1} = \frac{v_F}{v}$$

Por lo tanto, todas las ondas emitidas tiene como superficie tangente común un cono cuyo ángulo α está dado por

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_F} = \frac{1}{M}$$

$$\text{Número de Mach} = \frac{v_F}{v} = M$$

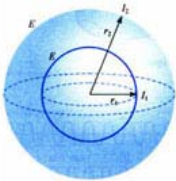


529

INTENSIDAD DE UNA ONDA ESFÉRICA

Supongamos una onda que se propaga en un medio con velocidad v .

Si la onda es esférica (ej. ondas sonoras), cada frente de onda recibe la misma energía pero la intensidad cambia.



A una distancia r_1 la intensidad está dada por

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

donde P es la potencia de la fuente, medida en Watts ($1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$).

A una distancia r_2 se tiene $I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}}$$

530

INTENSIDAD DEL SONIDO

La intensidad del sonido se mide en W/m^2 .

El oído humano puede detectar sonidos con intensidades entre 10^{-12} W/m^2 a 1 W/m^2 (límite del dolor).

El "silencio" no es proporcional a la intensidad.

Nivel de intensidad

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad \text{en dB} \quad \left(\frac{1}{10} \text{ bel} \right)$$

donde I_0 es un nivel de referencia, generalmente, igual al nivel de audición mínimo $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

$$\text{Ej. } I = 10^{-10} \text{ W/m}^2 \Rightarrow \beta = 10 \log \left(\frac{10^{-10}}{10^{-12}} \right)$$

$$\beta = 10 \log 100 = 20 \text{ dB}$$

531

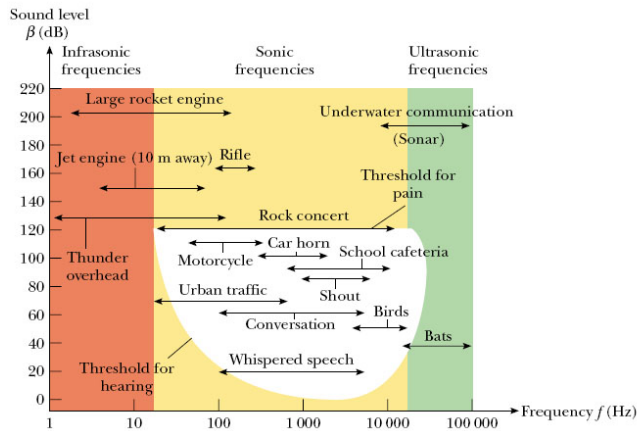


TABLE 13.4 Approximate intensity-levels in dB

Source	Intensity-level (dB)
Large rocket	≈ 180
Jet engine	140
Jet takeoff (30 m – 60 m)	≈ 125 intolerable
Rock concert (1.0 W/m^2)	≈ 120 painful
Yell into the ear (20 cm)	120 (immediate danger)
Pneumatic hammer	110
Passing subway train (10^{-2} W/m^2)	100 (damage after 2 hours)
Car without muffler	100
Shout (1.5 m)	100 very loud
Car horn, loud	95
Heavy truck (15 m)	90
City street	80 (damage after 8 hours)
Hair dryer	80
Loud music	80
Freeway traffic	75
Automobile interior	≈ 70 loud
Toilet flushing	≈ 67
Noisy store (10^{-6} W/m^2)	60
Conversation, average (1 m)	60 moderate
Office	50
Living room, city	40
Bedroom (10^{-9} W/m^2)	30 quiet
Library	30
Broadcast studio (10^{-10} W/m^2)	20 very quiet
Whisper	20
Cat purring	15
Rustling leaves	≈ 10 barely audible
Threshold (10^{-12} W/m^2)	0