

Trabajo y Energía Cinética

En las Olimpiadas de 1996, Andrey Chemerkin rompió el record mundial al levantar 260 kg desde el piso hasta arriba de su cabeza (aprox. 2 m). En 1957, Paul Anderson se acostó debajo de una plataforma de madera cargada con pedazos de plomo con un peso total de 27.900 N (¡2.850 kg!) y luego la levantó cerca de 1 cm.



¿Quién hizo más trabajo sobre los objetos que levantaron?



206

TRABAJO Y ENERGÍA

LAS LEYES DE NEWTON RELACIONAN LA ACELERACIÓN CON LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN CUERPO. ESTO PERMITE PREDECIR LOS VALORES FUTUROS DE LA POSICIÓN Y VELOCIDAD DE UNA PARTÍCULA.

SIN EMBARGO, EN MUCHAS SITUACIONES ES DIFÍCIL USAR LAS LEYES DE NEWTON PARA ANALIZAR EL MOVIMIENTO Y PREDECIR, POR EJEMPLO, LA VELOCIDAD DE UNA PARTÍCULA EN UN PUNTO ARBITRARIO DE LA TRAYECTORIA.

EJEMPLO: SALTADOR DE SKI



PARA ESTO, EXISTE UNA MANERA ALTERNATIVA DE RELACIONAR FUERZAS Y EL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA.

⇒ TEOREMA TRABAJO - ENERGÍA

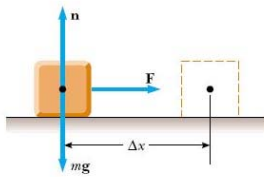
207

TRABAJO EN 1-DIMENSION

CASO MÁS SIMPLE: FUERZA CONSTANTE UNA DIMENSIÓN



LA FUERZA F QUE ACTÚA SOBRE UNA PARTÍCULA QUE SE MUEVE A LO LARGO DEL EJE x REALIZA UN TRABAJO DADO POR



DESPLAZAMIENTO DE LA PARTÍCULA

$$W = F \Delta x$$

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA F

$$\Delta x = x_f - x_i \Rightarrow \begin{aligned} \Delta x > 0 & \text{ si } x_f > x_i \\ \Delta x < 0 & \text{ si } x_f < x_i \end{aligned}$$

208

W ES UNA CANTIDAD ESCALAR



$W > 0 \Rightarrow$ FUERZA Y DESPLAZAMIENTO TIENEN EL MISMO SENTIDO

$W < 0 \Rightarrow$ FUERZA Y DESPLAZAMIENTO APUNTAN EN SENTIDOS OPUESTOS

$$W = 0 \quad \text{si} \quad \Delta x = 0$$



$$\text{UNIDADES: } [W] = [F][\Delta x] = \text{N} \cdot \text{m} \equiv \text{JOULES}$$

209

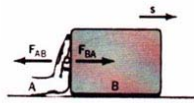
SI VARIAS FUERZAS ACTÚAN SOBRE UNA PARTÍCULA
EL TRABAJO TOTAL ES LA SUMA DE LOS TRABAJOS
INDIVIDUALES

$$W_{\text{TOTAL}} = F_{\text{net}} \Delta x = \left(\sum_i F_i \right) \Delta x$$

$$W_{\text{TOTAL}} = F_1 \Delta x + F_2 \Delta x + \dots$$

$$W_{\text{TOTAL}} = W_1 + W_2 + \dots = \sum_i W_i$$

ES IMPORTANTE IDENTIFICAR LA FUERZA QUE
INTERACTÚA CON EL CUERPO AL CALCULAR EL
TRABAJO



POR LA 3ª LEY DE
NEWTON SABEMOS QUE

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

ENTONCES

$$W_{\text{A SOBRE B}} = -W_{\text{B SOBRE A}}$$

210

EJEMPLO :



APLICANDO 2ª LEY DE NEWTON

$$\hat{x}) \quad -f_r = Ma$$

$$\hat{y}) \quad N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg$$

$$\text{ENTONCES } f_r = \mu N = \mu Mg$$

$$\Rightarrow \quad Ma = -f_r = -\mu Mg$$

$$a = -\mu g$$

LA ACCELERACIÓN ES CONSTANTE Y APUNTA EN SENTIDO
NEGATIVO POR LO TANTO EL BLOQUE DESACELERA

EL TRABAJO EFECTUADO POR LA FUERZA DE ROCE ES

$$W = -f_r \Delta x = -\mu Mg \Delta x < 0$$

↑
Δx ES POSITIVO

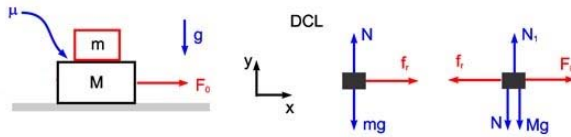
211

EL TRABAJO EFECTUADO POR LA FUERZA DE ROCE
NO SIEMPRE ES NEGATIVO



EJEMPLO

UN BLOQUE DE MASA m DESCANSA SOBRE UN
BLOQUE DE MASA M QUE DESLIZA SIN ROCE SOBRE
EL PISO QUE ES TIRADO POR UNA CUERDA



APLICANDO 2ª LEY DE NEWTON AL BLOQUE m

$$\hat{x}) \quad f_r = ma$$

$$\hat{y}) \quad N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\text{ENTONCES } f_r = \mu mg$$

$$\Rightarrow W = f_r \Delta x = \mu mg \Delta x > 0$$

212

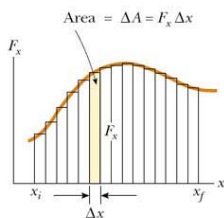
TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

$F = F(x)$ ES DECIR, LA FUERZA DEPENDE
DE LA POSICIÓN

→ EJEMPLOS: RESORTE
GRAVEDAD

¿CUÁL ES EL TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA $F(x)$
PARA MOVER UNA PARTÍCULA DESDE x_i HASTA x_f ?

RECETA: DIVIDIR EL DESPLAZAMIENTO TOTAL
EN UN GRAN NÚMERO DE PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS Δx



PARA CADA INTERVALO

$$\Delta W_i = F(x_i) \Delta x$$

⇒ ÁREA DE UN RECTÁN-
GULO DE ALTURA
 $F(x_i)$ Y BASE Δx

TRABAJO TOTAL $L = \text{SUMA DE TODOS LOS } \Delta W_i$

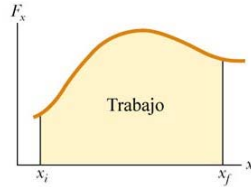
213

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N F(x_i) \Delta x$$

EN EL LÍMITE $\Delta x \rightarrow 0$ Y $N \rightarrow \infty$ SE TIENE

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

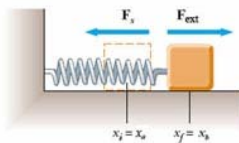
(Integral Definida)



$W \equiv \text{ÁREA BAJO LA CURVA } F(x)$

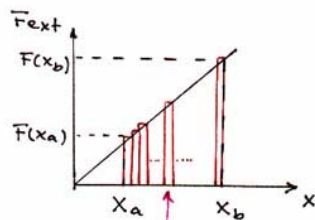
214

Ejemplo: resorte ideal



$$F_{\text{externa}} = -F(x) = kx$$

ESTIRAMOS LENTAMENTE EL RESORTE



$$\Delta W_i = F(x_i) \Delta x$$

$$W = \sum_{i=1}^N F(x_i) \Delta x \equiv \text{ÁREA TRAPECIO}$$

TRABAJO PARA
ESTIRAR EL
RESORTE

$$W = \text{ÁREA } \square + \text{ÁREA } \triangle$$

215

$$W = (x_b - x_a) \cdot F(x_a) + \frac{1}{2} (x_b - x_a) [F(x_b) - F(x_a)]$$

$$W = (x_b - x_a) \left[kx_a + \frac{1}{2} (kx_b - kx_a) \right]$$

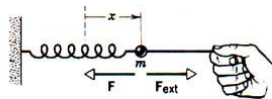
$$W = k(x_b - x_a) \left[\frac{1}{2} x_b + \frac{1}{2} x_a \right]$$

$$\therefore \boxed{W = \frac{1}{2} k x_b^2 - \frac{1}{2} k x_a^2}$$

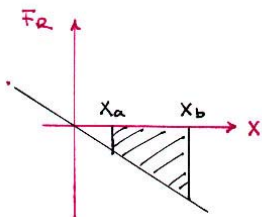
$x_b > x_a \Rightarrow W > 0 \Rightarrow$ LA FUERZA EXTERNA
REALIZA EL TRABAJO

$x_b < x_a \Rightarrow W < 0 \Rightarrow$ EL RESORTE ARAASTRA
LENTAMENTE AL AGENTE
EXTERNO

216



TRABAJO SOBRE LA
PARTÍCULA EFECTUADO = $\int_{x_a}^{x_b} F_R dx$
POR EL RESORTE



$$W_R = \int_{x_a}^{x_b} (-kx) dx$$

$$W_R = -\frac{k}{2} (x_b^2 - x_a^2)$$

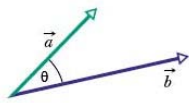
$$W_R = \frac{1}{2} k x_a^2 - \frac{1}{2} k x_b^2$$

Si $x_a > x_b \Rightarrow$ EL RESORTE SE CONTRAE
 $\vee W_R > 0$

Si $x_a < x_b \Rightarrow$ EL RESORTE SE ESTIRA
 $\vee W_R < 0$

217

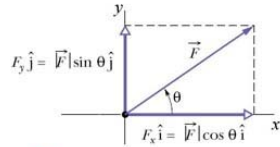
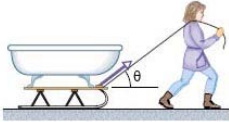
PRODUCTO PUNTO



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

TRABAJO EN 3-DIMENSIONES



DEFINICIÓN

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

FUEZA CONSTANTE

DESPLAZAMIENTO

$$W = F \Delta x \cos \theta = F \cos \theta \Delta x$$

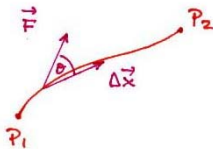
218

$$W \leq 0 \quad \text{si} \quad \vec{F} \perp \Delta \vec{x} \quad (\theta = \pi/2)$$

$$W > 0 \quad \text{si} \quad \vec{F} \text{ y } \Delta \vec{x} \text{ TIENEN EL MISMO SENTIDO} \quad (\theta = 0)$$

$$W < 0 \quad \text{si} \quad \vec{F} \text{ y } \Delta \vec{x} \text{ APUNTAN EN SENTIDOS OPUESTOS} \quad (\theta = \pi)$$

FUEZA VARIABLE :



$$\Delta W_i = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

$$W = \sum \Delta W_i$$

$$\text{Si } |\Delta \vec{x}| \rightarrow 0 \quad W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{DESPLAZAMIENTO} \\ \text{INFINITESIMAL} \\ \text{TANGENTE A LA} \\ \text{TRAJECTORIA} \end{array}$$

(integral de línea)

219

POTENCIA

SE DEFINE LA POTENCIA MECÁNICA COMO LA
RAZÓN A LA CUAL SE HACE EL TRABAJO.

POTENCIA PROMEDIO $P_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}$

POTENCIA INSTANTÁNEA $P = \frac{dW}{dt}$

UNIDADES: $J/s = W$ (watt)

OTRA UNIDAD DE POTENCIA SON LOS CABALLOS
DE POTENCIA (HP) $1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$

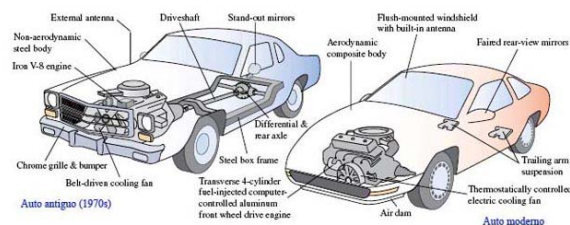
COMO $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$
 $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

220

1KWH ES EL TRABAJO REALIZADO EN 1 HORA
CUANDO LA POTENCIA ES 1KW

$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 1 \text{ h} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$

EJEMPLO: ENERGÍA Y EL AUTOMÓVIL



AUTOMÓVILES IMPULSADOS POR GASOLINA SON MÁQUINAS
MUY INEFICIENTES: MENOS DEL 15% DE LA ENERGÍA
QUÍMICA DEL COMBUSTIBLE ES USADA PARA MOVER
EL VEHÍCULO

221

67% DE LA ENERGÍA SE PIERDE EN EL MOTOR
10% SE PIERDE EN LA TRANSMISIÓN
6% SE PIERDE EN EL ROCE DE LAS PARTES
INTERNAS DEL AUTO
4% SE PIERDE EN LAS BOMBAS DE ACEITE Y
GASOLINA Y EN EL AIRE ACONDICIONADO

EL 13% RESTANTE SE USA PARA BALANCEAR LA
ENERGÍA PERDIDA POR EL ROCE DE LAS RUEDAS CON
EL SUELO Y EL ROCE CON EL AIRE

EL COEFICIENTE DE ROCE ENTRE LAS RUEDAS Y EL
PISO ES ~ 0.016

PARA UN AUTO DE 1450 KG $\Rightarrow$ PESO = 14200 N

ENTONCES $f_r = \mu M g = 227$ N

LA FUERZA DE ROCE CON EL AIRE ES

$$f_a = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

222

DONDE D ES EL COEFICIENTE DE ARRASTRE, A ES LA
SECCIÓN TRANSVERSAL DEL AUTO Y ρ ES LA DENSIDAD
DEL AIRE ($\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$)

TÍPICAMENTE $D \sim 0.50$ Y $A \sim 2 \text{ m}^2$

Fuerzas de roce y potencia requerida por un automóvil típico						
$v(\text{km/h})$	$v(\text{m/s})$	$N(\text{N})$	$f_r(\text{N})$	$f_a(\text{N})$	$f_t(\text{N})$	$\mathcal{P} = f_t v(\text{kW})$
0	0	14200	227	0	227	0
32	8.9	14100	226	48	274	2.4
64	17.9	13900	222	192	414	7.4
96	26.8	13600	218	431	649	17.4
128	35.8	13200	211	767	978	35.0
160	44.7	12600	202	1199	1400	62.6

FUERZA DE ROCE TOTAL $f_t = f_r + f_a$

POTENCIA TOTAL PARA MANTENER UNA VELOCIDAD
CONSTANTE v ES $\mathcal{P} = f_t v$

223

ESTA ES LA POTENCIA QUE TIENE QUE ENTREGAR
EL MOTOR PARA QUE EL AUTO AVANCE
POR EJEMPLO, SI $v = 96 \text{ km/h} = 26.8 \text{ m/s}$

$$P = 649 \text{ N} \cdot 26.8 \text{ m/s} = 17.4 \text{ kW}$$

$$P = P_a + P_r = f_a v + f_r v$$

$$\text{CON } P_a = 11.6 \text{ kW} \text{ Y } P_r = 5.84 \text{ kW}$$

∴ 67% DE LA POTENCIA ES USADA PARA
COMPENSAR LA RESISTENCIA DEL AIRE

$$\text{SI } v = 160 \text{ km/h} = 44.7 \text{ m/s} \Rightarrow P_a = 53.6 \text{ kW} \\ P_r = 9.03 \text{ kW}$$

∴ 86% DE LA POTENCIA ES EMPLEADA PARA
COMPENSAR LA RESISTENCIA DEL AIRE

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

(CASO ESPECIAL → FUERZA CONSTANTE

$$W = F \cdot \Delta x = F (x_f - x_i)$$

↑ ↑
 TRABAJO DESPLAZAMIENTO
 TOTAL

$$\text{SI } F = \text{cte} \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \text{cte}$$

RECORDEMOS QUE

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$$

EXPRESIÓN VÁLIDA PARA UN MOVIMIENTO
CON $a = \text{cte}$

ENTONCES

$$W = ma(x_f - x_i)$$

$$W = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

ENERGÍA CINÉTICA $\rightarrow$ $K \equiv \frac{1}{2} m v^2$

POR LO TANTO

$W = \Delta K$

TEOREMA
TRABAJO - ENERGÍA



RELACIONA LA ENERGÍA CINÉTICA
DE UNA PARTÍCULA CON EL
TRABAJO TOTAL

K REPRESENTA LA CAPACIDAD DE UNA PARTÍCULA
DE REALIZAR TRABAJO DEBIDO A SU VELOCIDAD

$W > 0 \Rightarrow$ ENERGÍA CINÉTICA AUMENTA

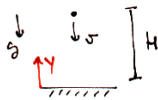
$W < 0 \Rightarrow$ ENERGÍA CINÉTICA DISMINUYE

EL TEOREMA TRABAJO - ENERGÍA ES VÁLIDO INCLUSO PARA
FUERZAS QUE DEPENDEN DE LA POSICIÓN EN 3D

226

EJEMPLOS

①



$$W_g = -mg \Delta y = -mg(0 - H)$$

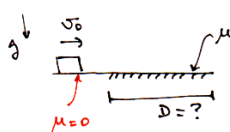
$$W_g = mgH$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

$$\Delta K = W \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mgH$$

$$v = \sqrt{2gH}$$

② FUERZA DE ROCE



$$W_g = 0 \quad (\vec{g} \text{ es } \perp \text{ al desplazamiento})$$

$$W_{roce} = -f_r \cdot D = -\mu mg D$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu mg D \Rightarrow D = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

227

Energía Potencial y Conservación de Energía

Los habitantes prehistóricos de la Isla de Pascua esculpieron cientos de estatuas de piedra (moais) en las laderas de sus volcanes y luego las movieron a diferentes sitios alrededor de toda la isla. La forma cómo ellos pudieron mover estas gigantescas estatuas tanto como 10 km sin la ayuda de maquinas sofisticadas ha sido un tema de amplio debate, con muchas delirantes teorías acerca de la fuente de la energía empleada.



¿Cómo pudo ser realizada esta tarea usando sólo medios primitivos?

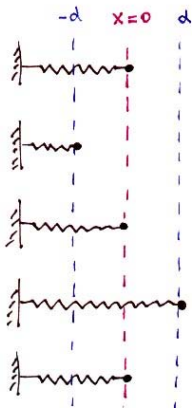


228

FUERZAS CONSERVATIVAS

EJEMPLOS

RESORTE $W_R = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$



$$W_R = 0 - \frac{1}{2} k d^2 = -\frac{1}{2} k d^2$$

$$W_R = \frac{1}{2} k d^2 - 0 = \frac{1}{2} k d^2$$

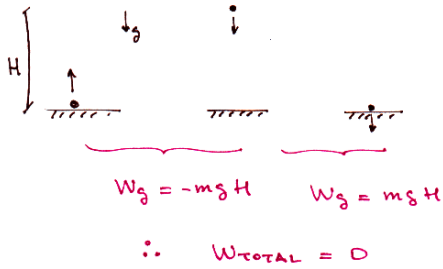
$$W_R = 0 - \frac{1}{2} k d^2 = -\frac{1}{2} k d^2$$

$$W_R = \frac{1}{2} k d^2 - 0 = \frac{1}{2} k d^2$$

$$W_{TOTAL} = 0$$

229

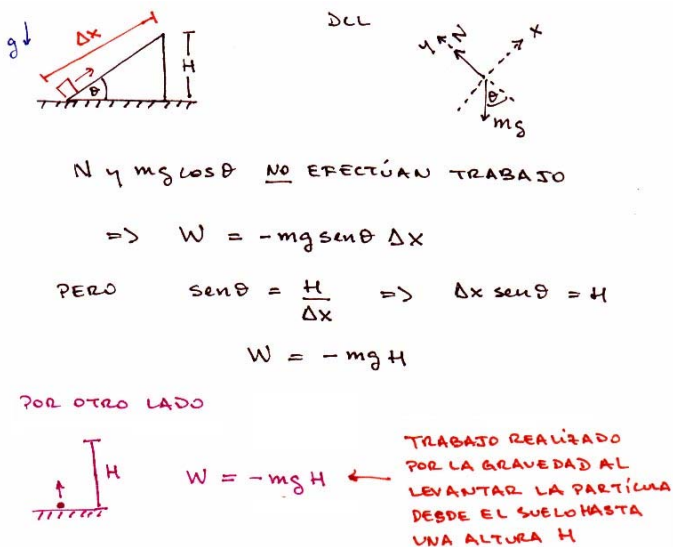
GRAVEDAD (CERCA DE LA SUP. TERRESTRE)



UNA FUERZA SE DICE CONSERVATIVA SI EL TRABAJO TOTAL EN CUALQUIER TRAYECTORIA CERRADA ES CERO

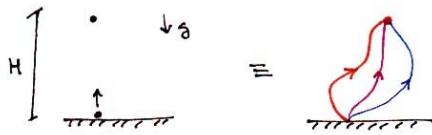
OTRA MANERA DE DECIRLO ES: UNA FUERZA ES CONSERVATIVA SI W ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA QUE UNE DOS PUNTOS

230



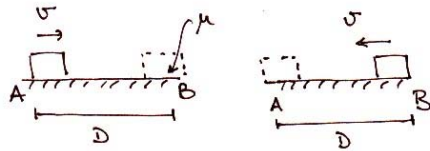
231

EN GENERAL, W_g ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA. SÓLO DEPENDE DE LA ALTURA O DIFERENCIA DE ALTURA H .



FUERZA NO-CONSERVATIVA

EJEMPLO FUERZA DE ROCE



$$W_{roce} = -\mu mg D$$

$$W_{roce} = -\mu mg D$$

$$W_{total} = -2\mu mg D \neq 0$$

232

ENERGÍA POTENCIAL

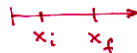
PARA UNA FUERZA CONSERVATIVA SE DEFINE EL CAMBIO DE ENERGÍA POTENCIAL POR

$$\Delta U = -W$$

EJEMPLOS:

RESORTE

$$W_R = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$



$$\Delta U = U_f - U_i = -\left(\frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2\right)$$

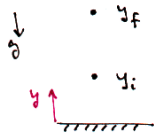
$$U_f - U_i = \frac{1}{2} k x_f^2 - \frac{1}{2} k x_i^2$$

$\therefore$

$$U_{RESORTE} = \frac{1}{2} k x^2$$

233

FUERZA DE GRAVEDAD



$$W_g = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Delta U = -W_g$$

$$U_f - U_i = mg(y_f - y_i)$$

$$\therefore \boxed{U_{\text{gravedad}} = mgy} \quad \text{ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL}$$

EN GENERAL, U REPRESENTA LA CAPACIDAD DE UNA PARTÍCULA PARA REALIZAR TRABAJO DEBIDO A SU POSICIÓN

ADEMÁS SÓLO SE PUEDE MEDIR ΔU , LA DIFERENCIA DE ENERGÍA POTENCIAL ENTRE DOS POSICIONES

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL



¿TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA EXTERNA PARA LLEVAR UNA MASA m DESDE r_A HASTA r_B ?

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{gravedad}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

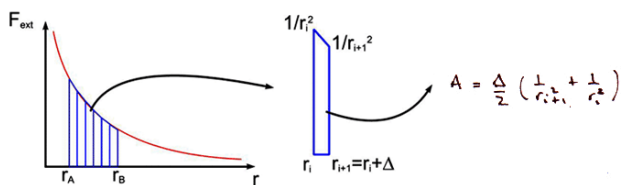
SI TRASLADAMOS LA PARTÍCULA RADIALMENTE DESDE A HASTA B, LA FUERZA $\vec{F}$ Y EL DESPLAZAMIENTO $\Delta \vec{r}$ APUNTARÁN SIEMPRE EN LA MISMA DIRECCIÓN, ENTONCES

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i = GMm \sum_{r_A}^{r_B} \frac{\Delta r_i}{r_i^2}$$

$$W_{A \rightarrow B} = GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

235

GRÁFICAMENTE SE TIENE



$$A = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1}{r_{i+1}^2} + \frac{1}{r_i^2} \right)$$

$$\text{ÁREA TRAPECIO } i\text{-ÉSIMO} = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{r_{i+1}^2} + \frac{1}{r_i^2} \right)$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[r_i (r_i + \Delta)^{-1} + \frac{(r_i + \Delta)}{r_i} \right]$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[\left(1 + \frac{\Delta}{r_i} \right)^{-1} + \left(1 + \frac{\Delta}{r_i} \right) \right]$$

$$\Delta \rightarrow 0 \quad = \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[1 - \cancel{\frac{\Delta}{r_i}} + 1 + \cancel{\frac{\Delta}{r_i}} \right]$$

$$\text{ÁREA TRAPECIO } i\text{-ÉSIMO} = \frac{\Delta}{r_i r_{i+1}}$$

236

$$\text{ÁREA TRAPEZOIDAL} = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_i r_{i+1}} = \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}$$

POR LO TANTO $W_{A \rightarrow B} = G M m \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)$

DONDE $r_1 \equiv r_A$ Y $r_{N+1} \equiv r_B$.

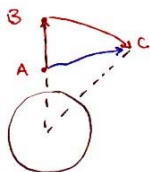
$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = G M m \left[\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_B} \right) \right]$$

$$\therefore W_{A \rightarrow B} = G M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA EXTERNA PARA MOVER LA MASA m DESDE r_A HASTA r_B EN CONTRA DE LA ATRACCIÓN GRAVITACIONAL DE LA TIERRA

237

EL TRABAJO PARA MOVER LA MASA m DESDE A HASTA C NO DEPENDE DE LA TRAYECTORIA SÓLO DEPENDE DE LA POSICIÓN INICIAL Y FINAL



$$r_B = r_C$$

$$W_{A \rightarrow C} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C}$$

POQUE EL DESPLAZAMIENTO ES PERPENDICULAR A LA FUERZA GRAVITACIONAL

LA FUERZA DE GRAVEDAD ES UNA FUERZA CONSERVATIVA



238

SE DEFINE LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL POR

$$\Delta U = -W_{\text{grav}} = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_{\text{grav}} \cdot d\vec{r}$$

PERO $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{grav}}$ ENTONCES

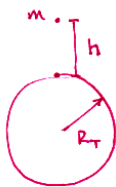
$$\Delta U = W_{A \rightarrow B} = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$U_B - U_A = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = - \frac{GMm}{r}} \quad \text{ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL}$$

239

VARIACIÓN DE ENERGÍA POTENCIAL CERCA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE



$$\Delta U = -GMm \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right)$$

$$\Delta U = - \frac{GMm}{R_T} \left(\frac{R_T}{R_T + h} - 1 \right)$$

$$\Delta U = - \frac{GMm}{R_T} \left(\frac{1}{1 + h/R_T} - 1 \right)$$

$$\Delta U \approx - \frac{GMm}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T} - 1 \right)$$

$$\Delta U \approx m \left(\frac{GM}{R_T^2} \right) h = mgh$$

$g = \text{gravedad en la superficie de la Tierra}$

240

Trabajo y Energía Cinética

En las Olimpiadas de 1996, Andrey Chemerkin rompió el record mundial al levantar 260 kg desde el piso hasta arriba de su cabeza (aprox. 2 m). En 1957, Paul Anderson se acostó debajo de una plataforma de madera cargada con pedazos de plomo con un peso total de 27.900 N (¡2.850 kg!) y luego la levantó cerca de 1 cm.



¿Quién hizo más trabajo sobre los objetos que levantaron?



241

CHEMERKIN LEVANTÓ UNA MASA TOTAL $m = 260 \text{ kg}$
 HASTA UNA ALTURA $h = 2 \text{ m}$
 TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE GRAVEDAD

$$W_{\text{grav}} = -mgh = - (2548 \text{ N}) (2.0 \text{ m})$$

$$W_{\text{grav}} = -5100 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{\text{aplicado}} = -W_{\text{grav}} = 5100 \text{ J}$$

POR OTRO LADO, ANDERSON EFECTUÓ UN TRABAJO
 DADO POR

$$W_{\text{aplicado}} = -W_{\text{grav}} = mg \Delta y$$

$$W_{\text{aplicado}} = (27900 \text{ N}) (0.01 \text{ m}) = 280 \text{ J}$$

ANDERSON NECESITÓ APLICAR UNA GRAN FUERZA PARA
 LEVANTAR LA PLATAFORMA PERO ENCIÓ SOLO UNA
 PEQUEÑA CANTIDAD DE ENERGÍA.

242

CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

SI EN UN SISTEMA ACTÚAN SÓLO FUERZAS CONSERVATIVAS

$$\Delta U_{\text{TOTAL}} = -W_{\text{TOTAL}}$$

POR EL TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

$$W_{\text{TOTAL}} = \Delta K$$

(CON $K = \frac{1}{2}mv^2$ (ENERGÍA CINÉTICA))

ENTONCES

$$\Delta U_{\text{TOTAL}} = -\Delta K$$

$$U_f - U_i = -\left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right)$$

$$U_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = U_f + \frac{1}{2}mv_f^2$$

243

SE DEFINE LA ENERGÍA MECÁNICA POR

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

POR LO TANTO $E_f = E_i$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E = 0} \quad \text{CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA}$$

SI ADEMÁS EN EL SISTEMA ACTÚAN OTRAS FUERZAS NO-CONSERVATIVAS (EJ. ROCE) SE TIENE

$$W_{\text{TOTAL}} = W_{\text{FZAS. CONS.}} + W_{\text{OTRAS}}$$

PERO

$$W_{\text{FZAS. CONS.}} = -\Delta U_{\text{FZAS. CONS.}} \quad \text{U SÓLO SE PUEDE DEFINIR PARA FZAS. CONS.}$$

ADEMÁS

$$W_{\text{TOTAL}} = \Delta K$$

244

ENTONCES

$$\Delta K = -\Delta U_{\text{FZAS. CONS.}} + W_{\text{OTRAS}}$$

$\Delta E_{\text{MECÁNICA}}$

$$\Delta(K + U) = W_{\text{OTRAS}}$$

WOTRAS GENERA OTROS TIPOS DE ENERGÍA DISTINTOS A LA ENERGÍA MECÁNICA (ES. ENERGÍA TÉRMICA).

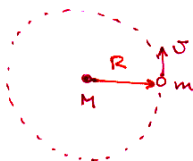
POR LO TANTO

$$\Delta E_{\text{TOTAL}} = \Delta(E_{\text{MEC.}} + E_{\text{OTRAS}}) = 0$$

CONSERVACIÓN DE
LA ENERGÍA

245

PLANETA O SATELITE EN ÓRBITA CIRCULAR



$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

PERO EN UNA ÓRBITA CIRCULAR SE TIENE

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$$

ENTONCES

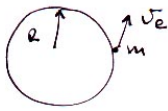
$$E = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R} < 0$$

UNA ÓRBITA SE DICE QUE ESTÁ LIGADA AL CENTRO DE FUERZAS SI SU ENERGÍA TOTAL ES NEGATIVA

ESTE ES EL CASO DE TODOS LOS PLANETAS RESPECTO AL SOL Y DE ALGUNOS COMETAS (AQUELLOS PERIÓDICOS)

246

VELOCIDAD DE ESCAPE



v_e = VELOCIDAD DE ESCAPE
= VELOCIDAD MINIMA
PARA ESCAPAR DE LA
ATRACCIÓN GRAVITACIONAL
DE LA TIERRA (U OTRO
PLANETA)

v_e ESTÁ DADO POR LA CONDICIÓN $E = 0$ DONDE

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

$\Rightarrow$ $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ VELOCIDAD
DE
ESCAPE

$v_e = 11.2 \text{ km/s}$ EN LA TIERRA

Energía Potencial y Conservación de Energía

Los habitantes prehistóricos de la Isla de Pascua esculpieron cientos de estatuas de piedra (moais) en las laderas de sus volcanes y luego las movieron a diferentes sitios alrededor de toda la isla. La forma cómo ellos pudieron mover estas gigantescas estatuas tanto como 10 km sin la ayuda de maquinas sofisticadas ha sido un tema de amplio debate, con muchas delirantes teorías acerca de la fuente de la energía empleada.



¿Cómo pudo ser realizada esta tarea usando sólo medios primitivos?



248

ES MUY PROBABLE QUE LOS MOAI HAYAN SIDO MOVIDOS POR LOS ANTIGUOS HABITANTES DE ISLA DE PASCUA.

USANDO TRONCOS Y RAMAS PARA HACERLOS DESLIZAR. EN UNA RECREACIÓN MODERNA DE ESTE SISTEMA, 25 HOMBRES FUERON CAPACES DE MOVER SOBRE UN PLANO HORIZONTAL UN MOAI DE 4000 KG UNA DISTANCIA DE 45 m EN 2 MIN.

SI CADA HOMBRE EJERCE UNA FUERZA PROMEDIO IGUAL A 2 VECES SU PESO, EL TRABAJO TOTAL ES

$$W_{ext} = |\vec{F}_{ext}| |\Delta x| \cos \theta = 50 m g d$$

$$W_{ext} = 50 (80 \text{ kg}) (9.8 \text{ m/s}^2) (45 \text{ m})$$

$$W_{ext} = 1.8 \times 10^6 \text{ J}$$

249

ESTE TRABAJO CAUSA LA ENERGÍA CINÉTICA DEL SISTEMA, PERO COMO EXISTE UN CONSIDERABLE ROCE ENTRE LOS TRONCOS, EL HOAJ Y EL SUELO PARTE DE ESTA ENERGÍA SE "PIERDE" EN CALOR.

$$\Delta E_{\text{calor}} + \Delta E_{\text{mecánica}}^0 = W_{\text{ext}} = 1.8 \times 10^6 \text{ J}$$

CALORÍA: SE DEFINE LA CALORÍA (cal) COMO LA ENERGÍA NECESARIA PARA ELEVAR LA TEMPERATURA DE 1 g DE AGUA DE 14,5°C A 15,5°C.

LAS CALORÍAS DE VALOR ALIMENTARIO SE MIDEN EN KILOCALORÍAS (10^3 cal)

$$1 \text{ kcal} = 10^3 \text{ cal} = 4186 \text{ J}$$

250

EJEMPLO: UN ESTUDIANTE DESEA PERDER PESO SUBIENDO ESCALERAS.

SUPONGAMOS QUE SUBE 80 Peldaños, CADA UNO DE 0,15 m DE ALTO EN 65 s IGNOREMOS LA ENERGÍA EMPLEADA AL BAJAR.

METABOLIZAR 1 g DE GRASA LIBERA 9 kcal

TÍPICAMENTE LA EFICIENCIA DE LOS MÚSCULOS HUMANOS ES $\sim 20\%$. ES DECIR CUANDO EL CUERPO CONVIERTE 100 J AL METABOLIZAR GRASA CORPORAL, SÓLO 20 J VAN A REALIZAR TRABAJO MECÁNICO, EL RESTO SE CONVIERTE EN ENERGÍA INTERNA.

i) ¿CUANTAS VECES TIENE QUE SUBIR LAS ESCALERAS PARA PERDER 500 g DE GRASA?

ii) POTENCIA PROMEDIO AL SUBIR LAS ESCALERAS

251

i)

$$\begin{aligned} \text{ENERGÍA LIBERADA AL QUEMAR 500 g DE GRASA} &= 500 \text{ g} \left(\frac{9 \text{ kcal}}{1 \text{ g}} \right) \left(\frac{4186 \text{ J}}{1 \text{ kcal}} \right) \\ &= 1.88 \times 10^7 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{ENERGÍA MECÁNICA} = \Delta E = 0.2 \times (1.88 \times 10^7 \text{ J})$$

$$\Delta E = W = n F \Delta y$$

$$\Delta E = n (80 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (80 \times 0.15 \text{ m})$$

$$3.77 \times 10^6 \text{ J} = n (9.41 \times 10^3 \text{ J})$$

$$\therefore n = 400 !!$$

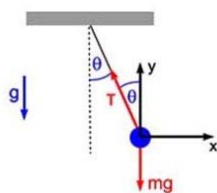
ii) $P_{\text{promedio}} = \frac{W}{t} = \frac{9.41 \times 10^3 \text{ J}}{65 \text{ s}} = 144.8 \text{ W}$

$$P_{\text{promedio}} = 144.8 \text{ W} \left(\frac{1 \text{ hp}}{746 \text{ W}} \right) = 0.194 \text{ hp}$$

252

PÉNDULO SIMPLE

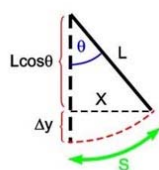
UN PÉNDULO SIMPLE CONSISTE DE UNA MASA m UNIDA A UNA CUERDA IDEAL DE LARGO L



APLICANDO LA LEY DE NEWTON

$$\hat{x}) -T \sin \theta = m a_x$$

$$\hat{y}) T \cos \theta - m g = m a_y$$



PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS $\theta \ll 1$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{y} \quad \sin \theta \approx \theta$$

ENTONCES

$$\sin \theta = \frac{X}{L} \Rightarrow \theta \approx \frac{X}{L} \approx \frac{s}{L}$$

253

VELOCIDAD TANGENCIAL $v_t = \frac{\Delta s}{\Delta t} = L \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = L \omega$

ACELERACIÓN TANGENCIAL $a_t = \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = L \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = L \alpha$

PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS $\theta \ll 1$

$$\Delta y = L - L \cos \theta$$

$$\Delta y = L(1 - \cos \theta) \approx L \frac{\theta^2}{2} \ll 1 \quad \therefore \quad \Delta y \approx 0$$

POR OTRO LADO $a_x \approx a_t$

LAS ECS. DE MOVIMIENTO QUEDAN

$$\hat{x}) \quad -T\theta = m a_t$$

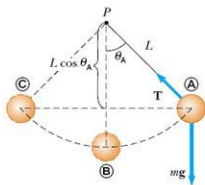
$$\hat{y}) \quad T - mg = 0 \Rightarrow T = mg$$

$$\therefore \quad -mg\theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta} \quad (\text{H.A.S.})$$

254

CONSERVACIÓN DE ENERGÍA: COMO LA TENSIÓN ES SIEMPRE PERPENDICULAR A LA TRAYECTORIA DE LA MASA m NO EFECTÚA TRABAJO. LA ÚNICA FUERZA QUE EFECTÚA TRABAJO ES LA FUERZA GRAVITACIONAL



$$\Rightarrow \Delta E = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ENERGÍA EN EL PUNTO A} &= K_A + U_A \\ &= -mgL \cos \theta_A \end{aligned}$$

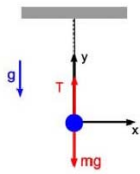
$$\text{ENERGÍA EN EL PUNTO B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - mgL$$

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - mgL = -mgL \cos \theta_A$$

$$v_B = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_A)}$$

255

LA TENSION EN EL PUNTO B ESTÁ DADA POR

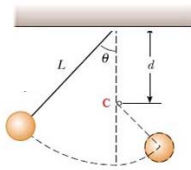


$$4) \quad T_B - mg = m \frac{v_B^2}{L}$$

$$T_B = mg(3 - 2\cos\theta_A)$$

EJEMPLO:

SI EL PÉNDULO ES SOLTADO DESDE UNA POSICIÓN HORIZONTAL ($\theta = 90^\circ$), ¿CUÁL ES EL VALOR MÍNIMO DE d PARA QUE PUEDA DAR UNA VUELTA COMPLETA EN TORNO A LA CLAVISA C?



ENERGÍA INICIAL = 0

$$\text{ENERGÍA FINAL} = \frac{1}{2} m v_B^2 - mg y_B$$

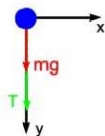
$$\text{PERO } y_B + 2(L-d) = L$$

$$\Rightarrow y_B = 2d - L$$

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - mg(2d - L) = 0$$

256

EN EL PUNTO MAS ALTO



$$T + mg = m \frac{v^2}{L-d}$$

CASO EXTREMO: $T = 0$

$$\therefore v_{min}^2 = g(L-d)$$

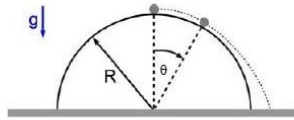
$$\text{ENTONCES } \frac{1}{2} m g (L-d) - mg(2d-L) = 0$$

$$\therefore d > \frac{3}{5} L$$

257

EJEMPLO:

SI UNA PARTÍCULA DE MASA m SE SUELTA DESDE LA CÚSPIDE DE UNA SUPERFICIE SEMI-ESFÉRICA, CALCULE EL ÁNGULO EN QUE LA BOLITA SE DESPEGA DE LA SUPERFICIE.



$$\text{ENERGÍA INICIAL} = mgR$$

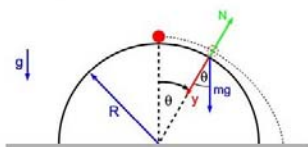
$$\text{ENERGÍA EN LA POSICIÓN } \theta = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta$$

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = mgR$$

$$v^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

258

APLICANDO 2ª LEY DE NEWTON



$$mg\sin\theta = ma_t$$

$$mg\cos\theta - N = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta - m2g(1 - \cos\theta)$$

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg$$

LA PARTÍCULA SE DESPEGA JUSTO CUANDO $N = 0$

$$\Rightarrow \cos\theta_c = \frac{2}{3}$$

LA VELOCIDAD EN DICHO PUNTO ES $v^2 = 2gR(1 - \frac{2}{3})$

$$v^2 = \frac{2}{3}gR$$

259