Introducción

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

I

Índice general

I. INTRODUCCION **1**

I.1. UNIDADES 2

I.1.1. Introducción 2

I.1.2. Tiempo 2

I.1.3. Longitud 4

I.1.4. Masa 6

I.2. ANALISIS DIMENSIONAL 7

I.3. FISICA, MATEMATICAS Y COMPUTACION 10

I.4. EL ARTE DE LAS ESTIMACIONES 10

I.5. EJERCICIOS 12

Capítulo I

INTRODUCCION

Las Ciencias Naturales engloban diversas disciplinas, entre las cuales se encuentran la Física, la Biología, la Química y la Astronomía; sin que esta lista sea exhaustiva. Cada una de ellas estudia determinados fenómenos que ocurren en la naturaleza, ya sea a través de su *observación directa* o mediante experimentos llevados a cabo en forma *sistemática* en el laboratorio.

Ciertamente, estas divisiones no son esenciales en ciencia y solamente indican grados de especialización. En algunos casos, el mismo fenómeno puede concitar simultáneamente el interés de científicos de diversas disciplinas. Por ejemplo, el estudio de los objetos que presentan una evolución caótica en el tiempo, interesan simultáneamente a los Físicos y a los Matemáticos. De igual modo, la determinación de la estructura del ácido desoxiribonucléico (ADN) –la molécula portadora de la información genética en animales y vegetales–, fue el resultado del esfuerzo conjunto de biólogos, químicos, bioquímicos y físicos.

Quienes tienen como oficio el estudio de las distintas manifestaciones de la naturaleza se les denomina científicos. Para algunos de ellos, los denominados teóricos, su labor consiste en inventar esquemas lógicos que permitan explicar las observaciones realizadas con un mínimo de suposiciones y además, en forma simultánea, *predecir* la existencia de nuevos fenómenos. Otro grupo prefiere desarrollar su labor en un laboratorio comprobando si las predicciones aventuradas en alguna teoría refleja realmente la forma en que opera la naturaleza. También pueden preferir estudiar un fenómeno diferente, guiados por su propia intuición y al cual consideran de gran interés.

La elaboración de un esquema lógico, acompañado de un lenguaje matemático, recibe el nombre de teoría. Las predicciones de una teoría deben ser verificadas *experimentalmente* con una rigurosidad tal, que basta *una* observación o predicción que no concuerde con lo medido, para su modificación o descarte.

El desarrollo de una teoría es un proceso largo y complejo que toma normalmente años y la contribución de muchos investigadores. Sin embargo, siempre en alguna etapa de su evolución destacan figuras de gran capacidad intelectual cuyo aporte ha significado una revolución para su época. En Física, ese ha sido el caso de Nicolás Copérnico (1473-1543), Galileo Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1643-1727), Albert Einstein (1879-1955) y Niels Böhr (1885-1962), entre otros.

Desde su origen como disciplina científica, hace aproximadamente cuatrocientos años, la Física ha acumulado una enorme cantidad de conocimientos y para manejar una fracción de ese material, se requiere recorrer un largo camino. Esperamos que el estudio de los aspectos básicos de la mecánica inventada por Newton –que constituye el contenido de este curso–, marque el comienzo de este trayecto.

I.1. UNIDADES

I.1.1. Introducción

Las leyes de la Física son relaciones entre propiedades de la materia medibles en un laboratorio tales como: longitud, tiempo, masa, temperatura, energía, etc. Consecuentemente, es necesario contar con *unidades* o patrones de medida, que permitan cuantificar esas magnitudes. Por ejemplo, medir la distancia entre dos puntos ubicados sobre una recta, significa comprobar el número de veces que una varilla patrón – elegida arbitrariamente como la unidad de longitud– está contenida en el trazo que conecta dichos puntos. Si el resultado es 3, se dice que la distancia entre los puntos es igual a 3 unidades de longitud.

El valor de una propiedad física cualquiera debe indicar la unidad que se ha utilizado como patrón. Por ejemplo, si en el caso anterior se hubiera usado el metro como unidad de medida, la distancia se expresaría como 3 metros.

La mayor parte de las unidades que se utilizan corrientemente se pueden expresar como combinación de un grupo reducido de ellas, llamadas *unidades fundamentales*. En el *Sistema Internacional (SI)*, las más conocidas son: el *metro*, el *kilógramo* y el *segundo*. Otras magnitudes, tales como la energía, el momentum lineal, la fuerza, etc., poseen unidades que se expresan en función de este conjunto fundamental.

En este libro usaremos el Sistema Internacional de Unidades en la mayoría de los ejemplos y ejercicios propuestos.

I.1.2. Tiempo

El **segundo** (s) fue definido originalmente como la $1/86400$–ava parte de un día solar medio (esto es, el tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el cenit, promediado a lo largo de un año). La definición moderna de un segundo es más precisa, pero tiene la desventaja de ser más difícil de explicar en base a conceptos básicos. La incluimos aquí como una información cuyo sentido aparecerá claro más adelante.

El **segundo** se define como el tiempo que debe transcurrir para detectar $9,192631770 \times 10^9$ ciclos (o vibraciones) consecutivas en la luz proveniente de una transición hiperfina entre dos estados permitidos de un átomo de Cesio.

En la actualidad, el patrón o unidad de tiempo se puede determinar con gran precisión. El segundo se puede medir, sin error, con doce cifras significativas. Con el objeto de aprovechar este enorme progreso, se ha definido la unidad de longitud (el metro) en base al segundo. Para ello debemos previamente *definir* la velocidad de la luz. Esta decisión no genera problema alguno, puesto que la velocidad de la luz es una constante universal. Obviamente, el valor usado no altera las unidades previamente establecidas. Este es:

$$\mathrm{c} \equiv \text{velocidad de la luz} = 299.792.458 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right],$$

Combinando la definición de un segundo y la velocidad de la luz, obtenemos la unidad de longitud: el *metro*, con un grado de precisión equivalente al del segundo. En este contexto, el metro se define como la distancia que recorre la luz en el espacio vacío durante 1/299,729,458 segundos.

Note que, como el valor de la velocidad de la luz fue *definido*, no puede contener error de medición.

Revisemos como ha ido mejorando la precisión en la determinación de la unidad de tiempo a través de este siglo.

Hasta hace algunas décadas, la rotación diaria de la Tierra con respecto al sol, se utilizaba para definir el largo del día (*día solar*) y a partir de este intervalo se definía el segundo medio. Los relojes se ajustaban de manera de seguir lo más exactamente posible el largo del día solar.

El *día sideral* se determina midiendo el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos de una estrella muy brillante a través del meridiano del observatorio astronómico.

Cuando la exactitud alcanzada en la medida del tiempo mejoró, fue posible preguntarse si efectivamente la duración del día era una constante a través del tiempo o sufría pequeñas variaciones. La duda se originó del siguiente modo. En 1936, los relojes de péndulo alcanzaron una precisión de *una parte en* 10^8 y así se logró establecer que el largo del día en el mes de Enero de ese año *excedió* al de Julio por, aproximadamente *5 milisegundos*.

Más adelante, con la aparición de los relojes atómicos que alcanzan una precisión de una parte en 10^{12} ó 10^{13} , quedó absolutamente claro que la duración del día variaba en forma *compleja* con componentes periódicos anuales, semianuales, con el período de la Luna e incluso durante el transcurso de una *noche* con amplitudes del orden de las *décimas* de milisegundo.

El fenómeno de El Niño ocurrido en 1982 - 1983, marcó un máximo notable en el largo del día, con un aumento de hasta 30 milisegundos sobre el valor promedio, durante el mes de marzo de 1983.

I.1.3. Longitud

Las unidades siempre se definen en forma arbitraria. El criterio empleado para elegirlas es, entre otros, facilidad de reproducción y maniobrabilidad.

Un ejemplo de esta arbitrariedad es la existencia de diferentes unidades de longitud: el metro, la pulgada, el pie, la yarda, la milla...etc.

El metro (m) fue originalmente definido como la distancia que separa a dos marcas grabadas sobre una barra fabricada de una aleación de platino e iridio, que se guarda en la oficina *Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia.* La elección fue hecha de manera que la distancia entre el Ecuador y el Polo Norte, medida a lo largo del meridiano que pasa por París fuera exactamente 1×10^7 metros.

Esta última afirmación nos hace meditar acerca de la necesidad de una nueva unidad de longitud, más precisa y más fácil de repetir que la recién definida. Es difícil pensar en obtener una precisión del orden de una parte en 10^7 al medir una distancia tan grande, esto sin mencionar que fue realizada con los medios disponibles durante el siglo pasado.

En la actualidad el metro se define como:

Un metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299.792.458 segundos.

A continuación se muestra una lista con distancias y tamaños de diversos objetos. Se incluyen las unidades usadas en astronomía.

OBJETO	DISTANCIA
Tamaño del Universo	10^{26} m
Galaxia Andrómeda	$6,5 \times 10^{5}$ parsec $\approx 2 \times 10^{22}$ m
1 parsec $\equiv$ 1 pc	3,086 $\times 10^{16}$ m $= 6,48 \times 10^{5}/\pi$ A.U.
Unidad Astronómica = 1 A.U.	1,49597892 $\times 10^{11}$ m
α-Centauri (estrella más cercana)	1,3 pc
Vega (estrella brillante)	8,1 pc
Diámetro de nuestra Galaxia	3×10^{4} pc
Dist. Sol–Centro de la Galaxia	9×10^{3} pc
1 Año Luz	$9,4605 \times 10^{15}$ m
Distancia Sol – Tierra	1 A.U.
Radio del Sol	$6,9599 \times 10^{8}$ m
Distancia Tierra–Luna	$3,84 \times 10^{8}$ m
Radio de la Tierra	$6,37817 \times 10^{6}$ m
Radio de la Luna	$1,738 \times 10^{6}$ m
Grano de Sal	10^{-3} m
Virus	10^{-7} m
Radio de un Atomo	10^{-12} m
Radio del Núcleo Atómico	10^{-15} m

Una característica importante del sistema internacional *SI* es su estructura decimal: las unidades más grandes se definen como potencias de diez de las unidades más pequeñas. Por ejemplo, 1 kilómetro $\equiv$ 1 km $= 10^3$ m, 1 m $= 10^2$ centímetros $\equiv$ 10 milímetros $\equiv$ 10 mm, 1 mm $= 10^{-3}$ m.

En la siguiente Tabla se indican los nombres de las potencias de diez más utilizadas en la literatura científica.

TABLA

Potencia	Prefijo	Abreviación
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	de
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f

Conviene mencionar también un sistema de unidades no decimal cuyo uso está prácticamente restringido a los Estados Unidos: el *Sistema Técnico Inglés*. Su unidad fundamental de longitud es la **pulgada** = 2,54 cm, cuyas equivalencias son 1 *pie* = 12 pulgadas = 1/3 yarda $\simeq$ 0.3048 m.

I.1.4. Masa

El **kilógramo** (kg) se define como la masa de un cierto cilindro de Platino e Iridio que se guarda en la oficina *Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia*. Un kilógramo es aproximadamente igual a la masa de 1000 centímetros cúbicos de agua, a una temperatura de aproximadamente $4^\circ\, C$, donde su densidad alcanza el valor máximo.

Ejemplos de unidades del Sistema Internacional expresadas en base a las unidades fundamentales son: fuerza, 1 *newton* $\equiv 1\,N = 1\ kg\ m/s^2$ y la unidad de energía, 1 *joule* $\equiv 1J = 1\ kg\ m^2/s^2$.

Cuando nuestro estudio se extienda a áreas de la física, más allá de la mecánica, necesitaremos agregar otras unidades fundamentales. En el sistema internacional (*SI*) estas son: la unidad de temperatura (el grado Kelvin, ^{o}K), la unidad de intensidad luminosa (la candela (cd)), la unidad de corriente eléctrica (el Ampère (A)) y el mol de substancia ($N_A \equiv$ Número de Avogadro $= 6{,}022137 \times 10^{23}$ partículas).

I.2. ANALISIS DIMENSIONAL

En una expresión algebráica, las unidades son tratadas de la misma manera que la propiedad a la cual acompañan. Por ejemplo, si en una ecuación una cantidad es sumada, restada, dividida o multiplicada por otra, lo mismo acontece con las unidades asociadas a ellas. Para ilustrar esto, consideremos la distancia que recorre un objeto, inicialmente en reposo, cuando es sometido a una aceleración constante $a = 2\ m/s^2$ durante 0,1 horas. Dicha distancia d se calcula mediante la siguiente expresión:

$$d = \frac{1}{2}\, a\, t^2 = \frac{1}{2}\, 2\, \frac{m}{s^2} \times \left(0{,}1\, hora \times\ 3600\, \frac{s}{hora}\right)^2 = 129{,}600\, m = 129{,}6\ km,$$

aquí, la aceleración se ha multiplicado por un factor que tiene dimensiones de $(tiempo)^2$. En la segunda igualdad se realiza la conversión de horas a segundos y en esa operación, las unidades son tratadas como una cantidad algebraica.

Conviene recalcar que cuando se suman o restan términos en una ecuación, todos ellos deben tener la misma dimensión y estar expresados en las mismas unidades. Así por ejemplo, si v es una velocidad y t es el tiempo, la siguiente ecuación está *dimensionalmente incorrecta*:

$$y = v\, t + v\, t^2$$

pues, el término $[v\, t]$, tiene dimensiones de [longitud/tiempo] $\times$ [tiempo] = [longitud], en tanto que las dimensiones de $[v\, t^2]$ son [longitud/tiempo] $\times$ [(tiempo)^2] = [longitud] $\times$ [tiempo].

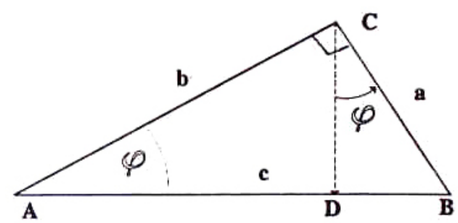
A menudo el análisis dimensional permite detectar errores de cálculo. Por ejemplo, si la propiedad que está siendo evaluada es la energía, el resultado debe tener dimensiones de $masa \times (velocidad)^2$ (en el Sistema Internacional de Unidades , $kg \times (m/s)^2$). Análogamente, al evaluar un área, el resultado debe tener dimensiones de $(longitud)^2$. Si esta condición no se cumple, significa que existe un error en el cálculo.

Ejemplo

Recordemos que para construir un triángulo basta conocer un lado y dos de los ángulos adyacentes a él. Con estos datos el triángulo queda totalmente determinado.

Usando este hecho y el análisis dimensional, compruebe el Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$.

Como en este caso se trata de un triángulo rectángulo, sólo necesitamos conocer un lado y uno de sus ángulos adyacentes, puesto que el restante es el complemento del anterior. Por otra parte, sabemos que el área de un triángulo debe tener las dimensiones de longitud al cuadrado.



Es posible entonces escribir una fórmula para el área de un triángulo rectángulo, de la siguiente forma:

$$\text{Area del triángulo } \Delta\, ABC \equiv A_c = c^2\, f(\varphi),$$

donde c es el lado del triángulo rectángulo y φ es el ángulo adyacente. Esta fórmula no especifica la función $f(\varphi)$ y sólo se sabe que debe ser una cantidad adimensional, de acuerdo a los resultados de esta sección.

Además, debe ser una *fórmula de validez general*, puesto que a partir de esos dos elementos: c y φ, el triángulo rectángulo queda determinado, es único, y por lo tanto su área debe depender solamente de estos dos valores, de forma que al variar uno de ellos, se modifica el triángulo y, en consecuencia, cambia el valor de su área.

Si Ud. recuerda sus cursos de geometría, probablemente conoce de varias fórmulas para determinar el área de un triángulo, siendo la más simple, y por ello la más usada, el producto de la altura por la base dividido por dos. La fórmula propuesta más arriba es sin duda una de las expresiones menos usadas para evaluar el área de un triángulo.

Como es una expresión general, se aplica también al triángulo $\Delta\, ACD$, con la misma función $f(\varphi)$. Más aún, también es válida para el triángulo $\Delta\, CBD$. En resumen,

$$\text{Area } \Delta\, ACD \equiv A_b = b^2\, f(\varphi), \qquad \text{Area } \Delta\, CBD \equiv A_a = a^2\, f(\varphi),$$

y como el área del triángulo ABC, A_c, es la suma de las áreas A_a y A_b, se obtiene que:

$$A_c = A_a + A_b \quad \Longrightarrow \quad c^2\, f(\varphi) = a^2\, f(\varphi) + b^2\, f(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Ahora es fácil determinar la función $f(\varphi)$ usando la fórmula usual para el área de un triángulo:

$$c^2\, f(\varphi) = \frac{a\,b}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad f(\varphi) = \frac{a\,b}{2\,c^2} = \frac{\cos\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}{2}. \square$$

Ejercicio

Una pelota se lanza con velocidad horizontal v, desde una altura H, medida desde la superficie de la Tierra. La distancia horizontal que recorre la pelota hasta el momento en que choca contra el suelo es R. Se sabe que la partícula se mueve bajo la acción de la aceleración de gravedad $g = 9{,}8\ m/s^2$. Usando análisis dimensional encuentre una expresión para R en función de H, v y g.

Ejercicio

Unidades Geometrizadas. A partir de las constantes universales de gravitación G, de la velocidad de la luz en el espacio vacío c, y de Planck h, es posible construir unidades fundamentales de longitud L^*, masa M^* y tiempo t^*.

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg\ s^2}\right], \qquad c = 2{,}9979 \times 10^8 \left[\frac{m}{s}\right], \qquad h = 6{,}6261 \times 10^{-34} \left[\frac{kg\ m^2}{s}\right].$$

Construya las unidades L^*, M^* y t^*, combinando adecuadamente las constantes universales mencionadas.

Ejercicio

Un experimentador encuentra que en ciertas condiciones la altura de un cuerpo sobre la superficie de la tierra varía con el tiempo t, de acuerdo a la ecuación:

$$z(t) = a + b\ t + c\ t^2$$

i) ¿Qué dimensiones tienen las constantes a, b y c ?

ii) ¿Cuál es el significado físico de cada una de estas constantes?

I.3. FISICA, MATEMATICAS Y COMPUTACION

La Geometría es una herramienta importante en la formulación y análisis de los problemas que nos interesa estudiar en física, así como también lo es el cálculo diferencial. De hecho, este último fue desarrollado por Newton –simultáneamente con Leibnitz–, para expresar sus leyes en forma precisa. Al final del libro hemos incluido un complemento matemático donde repasamos brevemente los conceptos básicos de trigonometría y nociones de series, haciendo énfasis en las aproximaciones y en el cálculo del área encerrada bajo una curva, que son los procedimientos más requeridos en física.

Al final de esta sección se incluye un conjunto de ejercicios relacionados con esta materia.

La definición de derivada se incorporó junto con la introducción de velocidad, en el segundo capítulo.

Con respecto a las ciencias de la computación, es claro que en los últimos veinte años, la investigación, la ingeniería y la enseñanza han sido paulatinamente influenciadas por ella. Su impresionante desarrollo ha permitido resolver problemas muy importantes de Física e Ingeniería y continúa abriendo nuevas líneas de investigación en diferentes áreas del conocimiento. El computador se ha transformado en una herramienta de trabajo esencial en casi todos los aspectos de la sociedad moderna. En particular, aquellos problemas científicos o tecnológicos que se tornan muy difíciles o imposibles de resolver por métodos analíticos, pueden normalmente ser abordados numéricamente.

A pesar de la importancia del cálculo numérico en ciencia, será tratado ocasionalmente durante este curso introductorio.

I.4. EL ARTE DE LAS ESTIMACIONES

Cerramos este capítulo con un ejemplo cuyo planteamiento es diferente a lo usual. Resolveremos un problema estimando, con nuestro criterio, los valores de los datos necesarios para la resolución.

Este tipo de ejercicios fueron popularizados por Enrico Fermi (1901-1954) (Premio Nobel en 1938), destacado físico de origen italiano, dotado de una habilidad innata para encontrar respuestas aproximadas a problemas complejos, sin recurrir a cálculos elaborados.

Lo que se pretende es obtener una respuesta para un problema determinado, cuya solución exacta, de existir, requeriría gran cantidad de trabajo, ya sea para calcular o bien para recolectar la información necesaria para realizar los cálculos.

El ejemplo con que ilustramos este método, fue planteado por el propio Fermi a sus estudiantes en la Universidad de Chicago. Les pidió estimar el número de afinadores de piano que trabajaban en la ciudad de Chicago.

La primera impresión es que la pregunta no puede ser respondida pues falta mucha información; sin embargo, al analizar la situación es posible darse cuenta que se puede llegar a una estimación razonable acerca del número pedido. Una forma de hacerlo es comenzar por estimar la población de la ciudad de Chicago, digamos: cinco millones de habitantes (es una ciudad como Santiago). Si suponemos que en promedio una familia está formada por cuatro personas, eso da un total de 1.250.000 familias. Además, si una de cada cinco familias posee un piano, entonces deberían haber del orden de 250.000 pianos en Chicago. Si consideramos que cada piano es afinado aproximadamente cada cinco años, eso da un total de 50.000 afinamientos por año. Ahora bien, un técnico puede dar servicio en forma adecuada a unos 4 pianos diariamente y supondremos que trabaja doscientos cincuenta días al año. Esto significa que para dar servicio a todos los usuarios de Chicago se requieren del orden de $50{,}000/(250 \times 4) = 50$ técnicos. La respuesta es aproximada, pero no se aleja mucho del número de técnicos que aparecen en las páginas amarillas de la guía de teléfonos de la ciudad de Chicago.

Dependiendo de las estimaciones utilizadas durante el desarrollo del cálculo, se podría haber obtenido un número tan bajo como 25 o tan alto como 75, pero ciertamente el número final difícilmente resultará superior a 100. La razón por la cual este tipo de cálculo puede entregar resultados acertados, radica en la cancelación de los errores cometidos en las diversas estimaciones. Si nos excedimos en el número de habitantes de la ciudad de Chicago, es posible que hayamos subestimado la cantidad de pianos atendidos diariamente por un técnico. Es decir, los errores en cada uno de las números considerados, están distribuídos aleatoriamente (i.e., al azar). Por supuesto, el entrenamiento en el arte de resolver situaciones similares, mejora la precisión de las respuestas.

Ejercicio

Repita la estimación anterior para el caso de la ciudad de Santiago. ¿Cómo cambiarían las cifras usadas anteriormente?

Ejercicio

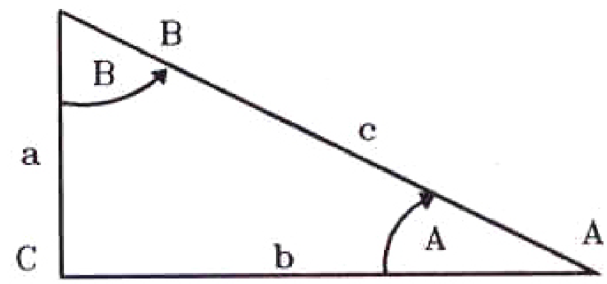
Las ciudades de Nueva York y Los Angeles en USA están aproximadamente a la misma latitud y separadas unos 4500 km. Además, se sabe que cuando en Nueva York son las 10 de la mañana, en Los Angeles son las 7 de la mañana. Estime el perímetro de la Tierra sabiendo que ambas ciudades no están muy alejadas del Ecuador terrestre.

Ejercicio

Un dígito binario recibe el nombre de *bit*. Un grupo de *bits* se denomina una *palabra*. Una palabra de ocho bits recibe el nombre de *byte*. Una letra normal cualquiera está representada en lenguaje binario por un *byte*. Suponga que se dispone de un disco de computador con capacidad para 100 *Megabytes*. Estime el número de libros que podrían ser almacenados en ese disco.

I.5. EJERCICIOS

En el enunciado de los problemas de Trigonometría que se plantean a continuación, nos referimos a los lados y ángulos que se indican en el triángulo rectángulo de la Figura.



1.– Hallar el valor de las funciones trigonométricas del ángulo A, sabiendo que:
a) a = 8 , b = 15, b) b = 2 , c = $\sqrt{11}$, c) a = p , b = q.

2.– Encontrar el valor de las funciones trigonométricas (sen, cos, tan, etc.) del ángulo B, sabiendo que:
a) a = 5 , c = 7, b) b = 5 , c = 13, c) a = 6 , b = 8.

3.– Dados cos A = 0.44, c = 30.5 ; hallar el valor de b.

4.– Si tan A = 11/3 y b = 27/11 ; hallar el valor de c.

5.– ¿Para qué valor del ángulo *agudo* x, se cumple: $\tan(30° - x) = \cot(30° + 3x)$?

6.– Determinar el valor de los ángulos agudos A y B, de un triángulo rectángulo, si se cumple la siguiente relación $\operatorname{sen} 2\,A = \cos 3\,A$.

7.– Si $b = 2a$, determinar el valor de las funciones trigonométricas de A (sen, cos, tan, etc.) ¿Por qué no aparece a y b en ellas?

8.– Dados: $A = 30°$, a = 25, encontrar el valor de c, B y b.

9.– Dados: $B = 45°$, $b = 15$, determinar el valor de c, A y a.

10.– Hallar el valor de $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A$, para $A = 30°$, 45°, 60°.

11.– Demuestre que $\cos 60° = 2\cos^2(30°) - 1$.

12.– Expresar cada una de las siguientes funciones como una función del ángulo complementario.

a) $\tan 30°$, *b)* $\cos 20°$, *c)* $\sec 81°$,

d) $\operatorname{sen}(33°33')$, *e)* $\csc(72°17,4')$.

13.– Dar los valores del ángulo A, comprendidos entre 0° y 360°, que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} A = 1/2$, b) $\cos A =$ - $1/2$, c) $\tan A = 1$,
d) $\cot A = -\sqrt{3}$, e) $\sec A = 2$.

14.– Expresar el resto de las funciones trigonométricas, en función de $\operatorname{sen} A$.

15.– Escribir en función de $\csc A$, cada una de las otras cinco funciones de A.

16.– En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a 5/2 del producto de los catetos, hallar el valor de la tangente del mayor de los ángulos agudos del triángulo.

17.– Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\cos x \tan x = \operatorname{sen} x$, *b)* $\operatorname{sen} x \sec x - \tan x = 0$,

c) $\operatorname{sen} x \cot x = \cos x$, *d)* $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$,

e) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$, *f)* $(1 + \tan^2 x)\cos^2 x = 1$,

g) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2$

18.– En un triángulo rectángulo se tienen los siguientes valores para sus lados y ángulos: a = 1, A = 30° c = 2, B = 60°.

A partir de ellos, construya una tabla de senos, cosenos y tangentes para los ángulos 0°, 30°, 60° *y* 90°.

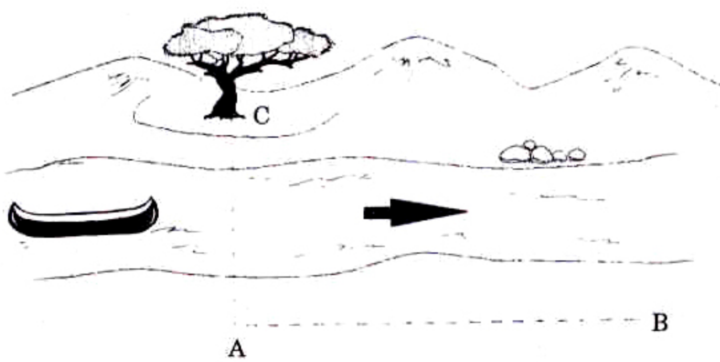
19.– En cada una de las expresiones siguientes, realice las transformaciones necesarias para expresarlas en función de θ.

$a)\,\mathrm{sen}(\pi+\theta)$, $b)\cos(270^\circ-\theta)$, $c)\tan(540^\circ+\theta)$, $d)\cot(630^\circ-\theta)$,

$e)\cos(\theta-5\pi/2)$, $f)\,\mathrm{sen}(\theta-90^\circ)$ $g)\tan(-\pi/2-\theta)$.

20.– Un árbol ha sido quebrado por el viento. La parte inferior del tronco, permanece vertical y tiene una altura de 5 m. La parte derribada se apoya con uno de sus extremos en el tronco y con el otro en el piso, dibujando un ángulo de 35° con el piso.

Calcular la altura que tenía este árbol antes de partirse en dos.



21.– Para calcular el ancho de un río, se mide una distancia, AB (ver Figura), a lo largo de su orilla, tomándose el punto A directamente opuesto a un árbol C, ubicado en la otra ribera. Si el ángulo $\angle(A\,B\,C)$ es de 55° y la distancia AB de 10 m, ¿cuál es el ancho del río?

22.– El mástil de un gran navío tiene una altura de 30 m sobre el nivel del mar. Lejos de allí, un pescador en su bote, ve el mástil subtendido por un ángulo de 5°. Si el ángulo está en un plano vertical: ¿a qué distancia se encuentra el bote?

(Desprecie la altura del bote y del pescador que está sentado en él.)

23.– Al observar dos torres desde el *punto medio* de la distancia que las separa, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son 30° y 60° respectivamente. Demostrar que la altura de una de las torres alcanza el triple del valor de la altura de la otra.

24.– Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte (ver Figura) situado en una llanura encuentra que, desde un cierto lugar, el fuerte se ve bajo un ángulo de

10°, y desde otro punto, 200 m más cerca del fuerte, se ve bajo un ángulo de 15° ¿Cuál es la altura del fuerte y cuál es su distancia al segundo lugar de observación?

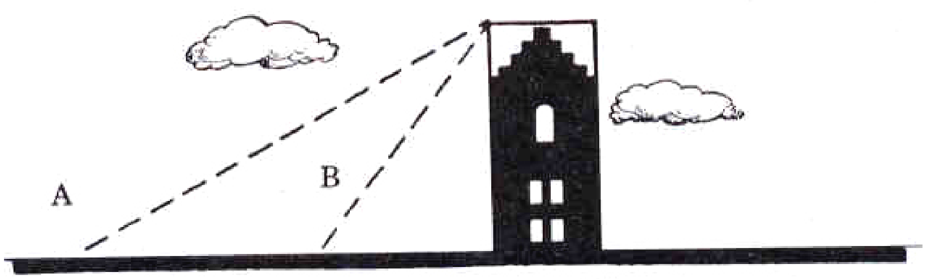
25.– En un hexágono regular de lado a, se pide:

a) Calcular los radios de los círculos inscrito y circunscrito en función de a.
b) La diferencia entre las áreas del hexágono y el círculo inscrito.
c) La diferencia entre las áreas del hexágono y el círculo circunscrito.

26.– Con el fin de medir la altura, h, de un objeto se ha medido la distancia entre dos puntos, A y B, a lo largo de una recta que pasa por su base en un plano horizontal y resultó ser ℓ metros. Los ángulos de elevación de la punta del objeto desde A y B resultaron ser α y β respectivamente, siendo A el punto más cercano a la base (ver Figura siguiente). Demostrar que la altura está dada por la fórmula:

$$h = \frac{\ell}{\cot\beta - \cot\alpha}, \qquad \text{si A y B están del mismo lado, y por:}$$

$$h = \frac{\ell}{\cot\beta + \cot\alpha}, \qquad \text{si A y B están en lados opuestos de la base del objeto.}$$



Problemas #24 y #26

27.– A partir de la serie:

$$(1+x)^n = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{n!}{(n-\alpha)!}\,\frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

compruebe que para $h << 1$, es posible aproximar $(1+h)^n$ como:

$$(1+h)^n \approx 1 + n\,h + O(h^2).$$

Para verificar la exactitud de esta aproximación, elija tres valores de h, por ejemplo: 0,01, 0,1 y 0,5, con ellos calcule el valor de $(1+h)^8$ de dos formas: utilizando la expresión exacta y a través de la aproximación mencionada. Compárelos y estime el porcentaje de error cometido, en cada uno de los casos, al truncar la serie.

28.– a) Verifique numéricamente la igualdad siguiente:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

b) Estime el valor del ángulo α si:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

29.– Calcule el valor de las siguientes series:

$$a) \quad 1 + 1/2! + 1/3! + ..,1/n! + ...$$

$$b) \quad 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + ...$$

$$c) \quad 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + ...$$

Respuestas: a) $(e-1)$, b) e^{-1}, c) $(1-e^{-1})$.

Compruebe estos resultados numéricamente.

30.– Una forma de estudiar la convergencia de una serie es comparándola con otras, cuya convergencia es bien conocida.

a) Sea: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, una serie *convergente*, cuyo término k–ésimo es a_k.

Si existe otra serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \text{tal que,} \quad |b_k| \; < \; |a_k| \; \forall \; k \; \epsilon \; N,$$

entonces, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge .

b) Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, una serie divergente y sea

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \qquad \text{otra serie, tal que} \qquad b_k > a_k > 0, , \; \forall \; k \; \epsilon \; N,$$

entonces $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge.

Usando estos resultados –que no necesita demostrar–, estudie la convergencia de:

$i)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\,(k+1)} \qquad ii)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{k+1}{k}\right),$

$iii)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!(k+1)!} \qquad iv)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^{\alpha}}{k},\ \ \alpha > 0$

Indicación:

i) Recuerde que 1/[k ·(k+1)] = 1/k − 1/(k + 1).
ii) Compare (k+1)/k con 1.
iii) Compare con la serie correspondiente al número e.

31.– Es común utilizar la siguiente aproximación $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$ (para α pequeño), cuando el ángulo α está expresado en radianes.

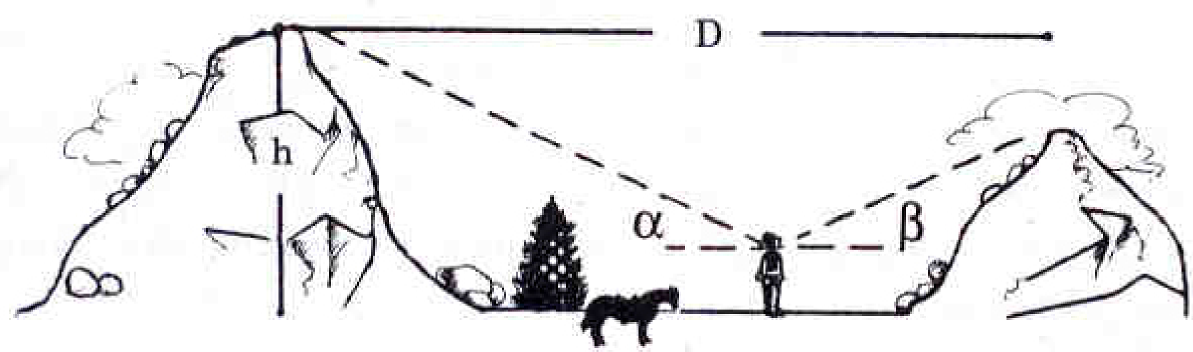
a) A partir de la definición de radianes como medida angular, justifique esta aproximación.

b) Usando la expresión asociada a la serie $\operatorname{sen}\alpha$, demuestre que la aproximación es correcta.

32.– Repita el análisis del problema anterior, con la aproximación:
$\cos\,\alpha \approx 1$ (para α pequeño).

33.– Una persona ubicada en el punto P de la Figura, observa dos montes con ángulos de elevación α y β respectivamente.

Si el de la izquierda tiene una altura h y la separación entre ambos es D, calcule la altura del monte opuesto.



34.– Sean α y δ dos ángulos medidos en radianes.

i) Usando la expresión para la suma de ángulos, calcule:

$$\frac{[\operatorname{sen}(\alpha+\delta)-\operatorname{sen}\alpha]}{\delta},$$

ii) Haga tender a cero el valor de δ, es decir, suponga que $\delta << 1$ y calcule el valor de la expresión anterior, utilizando las aproximaciones relevantes.

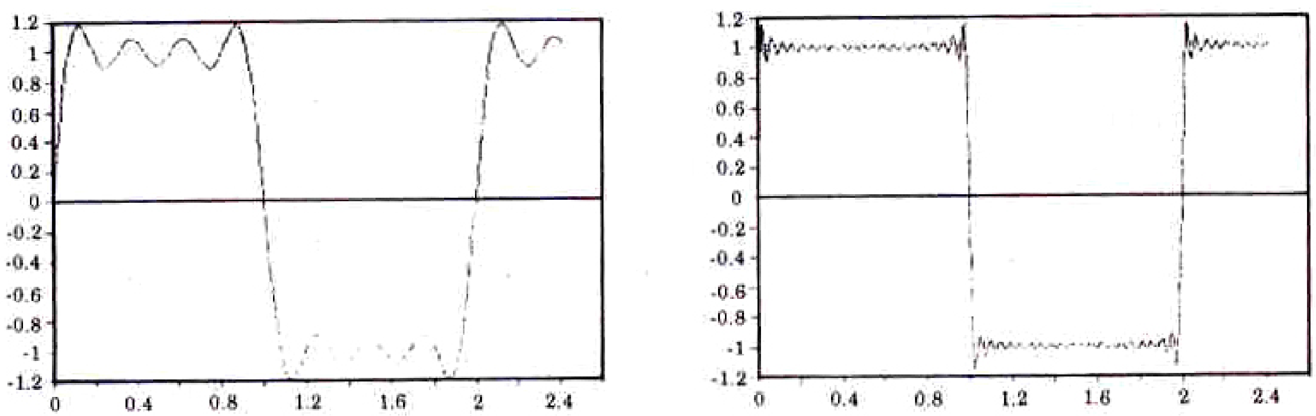


Figura I.1: [Ejercicio # 35]. El gráfico de la izquierda corresponde a la serie truncada en el octavo término. Si se incluyen los primeros 41, se obtiene el gráfico de la derecha.

35.– Graficar la función:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}[\operatorname{sen}x+(\operatorname{sen}3x)/3+(\operatorname{sen}5x)/5+...]$$

Compruebe que al aumentar el número de términos de la serie, ésta se aproxima rápidamente a la función:

$$f(x)=\ +1 \qquad 0<x<\pi$$

$$f(x)=\ -1 \qquad \pi<x<2\pi$$

Compruebe que para $x=\pi$ se produce una discontinuidad de la función y en el caso que $n\to\infty$, este salto es del orden de un 18 % de la altura de la función.

¿Puede ver esto en el gráfico del computador ? (Nota: sume un número grande de términos de la serie).

36.– a) Demostrar que para ángulos pequeños, es válida la aproximación:

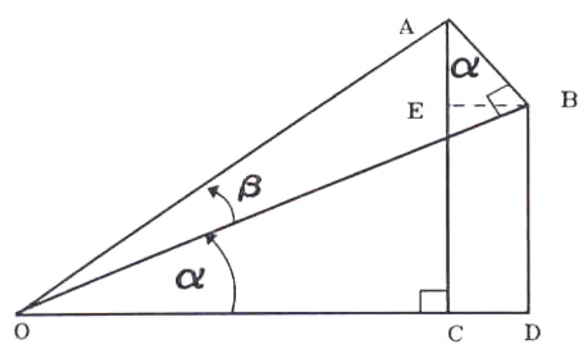
$$\operatorname{sen}(2\alpha) \approx 2\operatorname{sen}\alpha$$

b) Encuentre el valor máximo que pueden alcanzar los ángulos, si se tolera un error de a lo más $0,001$ en la aproximación. (Use una calculadora).

c) Qué rango de valores de $\beta > 0$, mantienen la convergencia de las siguientes series:

$$i) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\beta}\right)^k, \qquad\qquad ii) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\beta^k}.$$

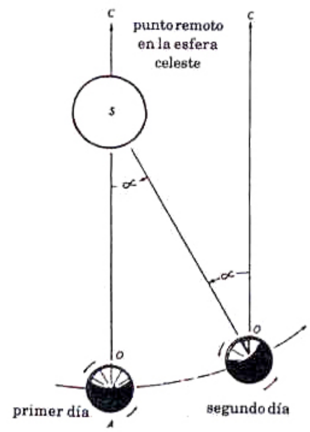
d) ¿Cuál es el valor de las series anteriores suponiendo que convergen?



37.– Use el triángulo de la Figura para encontrar la expresión de $\cos(\alpha + \beta)$ en función de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$.

38.– En esta Figura se puede apreciar la diferencia entre un día *sideral* y uno *solar*.

Para hacer la explicación más simple, supongamos que es posible observar las estrellas durante el día. En realidad las estrellas están allí y de hecho los radioastrónomos las observan durante el día.
Para un observador en el Ecuador, el día solar es el intervalo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el cenit (posición del Sol justo sobre nuestras cabezas). El día sideral es el tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos de una *estrella lejana* por el cenit.



La diferencia que existe entre ambas definiciones se debe al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol como se indica en la Figura que se acompaña.

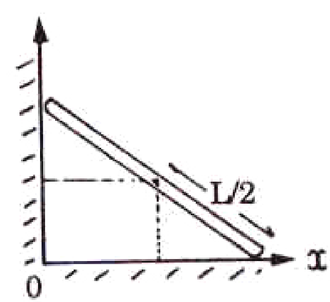
Este desplazamiento no cambia la posición de la estrella lejana –precisamente por estar tan lejana–, pero la posición del Sol en el cenit ocurre antes que la Tierra alcance a dar una vuelta completa alrededor de su propio eje.

Determinar el valor del ángulo α definido en la Figura. Calcule la diferencia, expresada en segundos, entre el día sideral y el día solar.

39.– Encontrar el desarrollo en serie de cos $3\,\alpha$, en potencias de α.

Desprecie las potencias de orden α^4, o mayores.

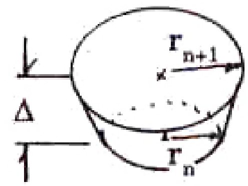
40.– Demostrar que el punto medio de una escalera de largo L, que resbala apoyándose en el muro, describe una circunferencia.
La ecuación de una circunferencia de radio R es: $x^2 + y^2 = R^2$.



41.– Se pide calcular el volumen del cono que se muestra en la Figura haciendo uso de las herramientas matemáticas introducidas en el complemento matemático del apéndice. Para ello se sugiere trabajar de la siguiente forma:

a) Descomponga el cono en una suma de troncos de cono de altura constante Δ y cuyo volumen está dado por la fórmula siguiente:

$$V_{\text{Tronco de Cono}} = \pi \cdot \left[\frac{r_n + r_{n+1}}{2}\right]^2 \cdot \Delta.$$



Sume cada uno de estos volúmenes hasta completar el cono. Use las propiedades de la sumatoria y los resultados obtenidos anteriormente para:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{n=N} n^2 = \frac{N(2N+1)(N+1)}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{n=N} n = \frac{N(N+1)}{2},$$

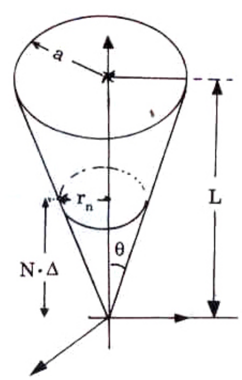
$$r_n = n \cdot \Delta \cdot \tan\theta, \qquad \Delta = \text{Cte.}, \ \tan\theta = \frac{a}{L} = \text{Cte.}$$

b) Para obtener el valor exacto del volumen de un cono, tome los siguientes límites en los resultados anteriores:

$$\Delta \longrightarrow 0, \qquad N \longrightarrow \infty,$$

de manera que el producto permanezca constante.

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta\to 0}} N \bullet \Delta = L.$$



42.– Una camionada de arena seca se descarga formando un cono cuya base es una circunferencia de 4 metros de diámetro. Si la pendiente de la arena seca es de $\theta = 32°$ y su densidad es $\rho = 1,7$ g/cm^3, calcule la masa de la arena.

43.– Encuentre el ángulo entre dos diagonales de un cubo.

44.– Un tetraedro regular es la figura geométrica que se obtiene al formar una pirámide con cuatro triángulos equiláteros idénticos. Encuentre el ángulo entre dos de sus caras.

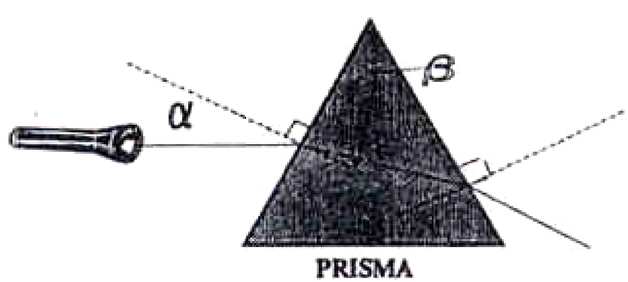
45.– Un tambor de 50 cm de radio y 1.5 m de largo se encuentra en posición horizontal apoyado sobre su manto y lleno con parafina hasta una altura h = 60 cm. ¿Cuántos litros de parafina hay en el tambor?

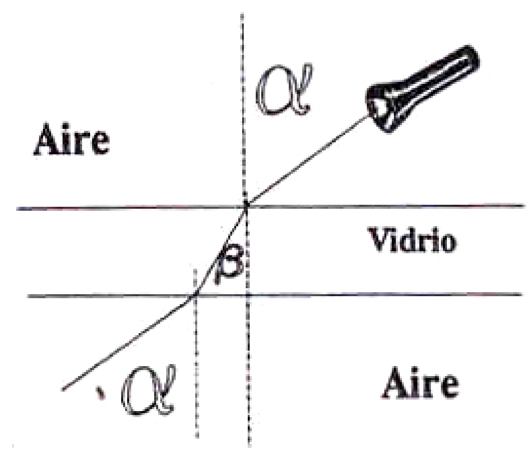
46.– ¿Para qué latitud, el paralelo terrestre tiene 1/3 de la longitud del Ecuador?

47.– Al incidir un rayo de luz sobre una superficie que separa dos medios diferentes, por ejemplo, al pasar del aire al vidrio o viceversa, ésta sufre un cambio de dirección (ver Figura). Este fenómeno se conoce con el nombre de *refracción* de la luz. La ecuación que describe este fenómeno es la *Ley de Snell*:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{vidrio}}}$$

donde v_{aire} y v_{vidrio}, corresponden a la velocidad de la luz en el aire y en el vidrio respectivamente. (Para el vidrio común se acepta el valor $v_{\text{aire}}/v_{\text{ vidrio}} \simeq 1{,}5$).





Supongamos que un haz de luz incide sobre un vidrio de caras paralelas y de 2 cm de espesor, con un ángulo de incidencia $\alpha = 40°$. Determine el espesor d del vidrio para el cual el rayo de luz emergente se encontrará paralelamente desplazado respecto al incidente. (Ver Figura).

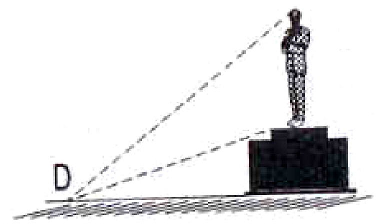
48.– Considere ahora un rayo de luz incidiendo sobre un prisma en la forma como se muestra en la Figura. Encuentre el ángulo β para $\alpha = 20°,\ 40°,\ 50°$ y $70°$.

¿Para qué valor del ángulo incidente α, el rayo de luz se propaga paralelamente a la cara interior del lado opuesto al de incidencia del prisma?

Para valores de α mayores, el haz de luz se refleja especularmente en la superficie interior del prisma. Este fenómeno se conoce con el nombre de *reflexión total*.

49.– Desde un punto D, un observador divisa una estatua con su pedestal. Conoce su altura y la del pedestal, que son 5 y 4 m, respectivamente.

El ángulo de elevación de la cabeza de la estatua con respecto al piso es el doble del ángulo que subtiende el pedestal.
A partir de estos datos, calcule a qué distancia se encuentra este observador.



50.– Usando el método de las sumatorias, calcule el valor del área encerrada entre la línea $y = x$ y la parábola $y = x^2$, entre el intervalo [0,1] del eje x.

Respuesta: 1/6.

51.– **Estimaciones del tamaño de la Tierra.**

Los antiguos reconocieron la esfericidad de la Tierra a través de diversas observaciones:

a) En los eclipses de Luna la sombra de la Tierra sobre la superficie lunar es redonda.

b) La elevación de una estrella sobre el horizonte varía con la latitud.

c) Los barcos se pierden rápidamente de vista desapareciendo bajo el horizonte al alejarse.

Uno de los primeros valores para el perímetro del globo terráqueo fue obtenido por Eratóstenes ($\sim$ 330 A. de C.).

Eratóstenes sabía que al mediodía del 22 de Junio el Sol caía verticalmente en Siena (actualmente Asuán): la luz solar que incidía sobre un profundo pozo se reflejaba en el fondo hacia arriba. (Ver Figura). El mismo día, a la misma hora, se midió en Alejandría la sombra de un alto obelisco. Eratóstenes encontró que los rayos del Sol formaban un ángulo de $7,5^\circ$ con la vertical.

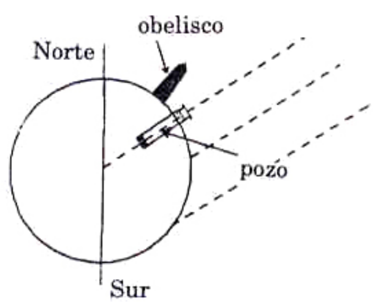


Figura I.2: Ejercicio # 51. El valor obtenido por Eratóstenes no resultó ser el correcto debido a la imprecisión en la medida de las distancias.

Sabiendo que Alejandría se encuentra a algo más de 800 Km. al Norte de Siena, estime el valor del perímetro y radio terrestres.

52.– **Estimación del alcance visual sobre el horizonte.**

Suponga que un observador se encuentra a una altura h sobre el suelo en un terreno sin accidentes . ¿A qué distancia ℓ, se halla el límite del horizonte?

(Use $R =$ 6,400 km). Calcule ℓ para:

$h_1 = 2$ m, ($\sim$ estatura de una persona),

$h_2 = 20$ m, ($\sim$ vigía de un barco),

$h_3 = 300$ m, ($\sim$ altura del cerro San Cristóbal).

(Ver Figura)

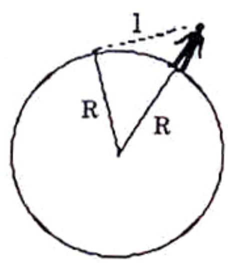
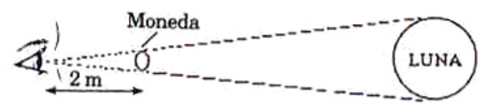


Figura I.3: Ejercicio # 52



Ejercicio # 54

Figura I.3: Ejercicio # 52 Ejercicio # 54

53.– **Masa de la Tierra.**

La mayoría de los líquidos y sólidos constituyentes de nuestro planeta tienen densidades que fluctúan entre 1 y 10 kg/lt. A partir de estos datos y usando $R = 6{,}400$ km para el radio de la Tierra, *estime* un valor para su masa.

54.– **Relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.**

Se intercala una moneda de un diámetro de 2 cm. entre el ojo y la Luna, ocultándola a la vista. La moneda se aleja gradualmente, encontrándose que el borde de la Luna empieza a ser visible cuando la moneda está a unos dos metros de la pupila.

Use estos datos para encontrar una relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.

55.– **Tamaño de la Luna y distancia a la Tierra.**

El tamaño de la Luna fue comparado con el de la Tierra por Aristarco (270 A. de C.), durante un eclipse lunar. (Esto ocurre cuando la Tierra se interpone entre la Luna y el Sol). Aristarco midió el tiempo que tardaba la Luna en cruzar la sombra de la Tierra, y encontró que el diámetro de la sombra terrestre era dos veces y media el diámetro de la Luna.

Sin embargo, la sombra de los planetas no es un cilindro, sino un cono. Durante una eclipse solar (cuando la Luna se interpone entre el Sol y la Tierra), es sólo un poco más que el vértice del cono de sombra de la Luna lo que alcanza a la Tierra.

Aristarco dedujo esto observando que durante el eclipse, la Luna cubre apenas el disco solar. Argumentó que en un eclipse de Luna, la sombra de la Tierra se reduce en la misma razón que en el caso de la Luna.

Con estos datos, deduzca que $d = \frac{2}{7}D$, donde d es el diámetro lunar y D, el diámetro terrestre. Usando este resultado, el valor del radio terrestre y la relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra, estime:

a) el diámetro lunar,

b) la distancia Tierra–Luna.

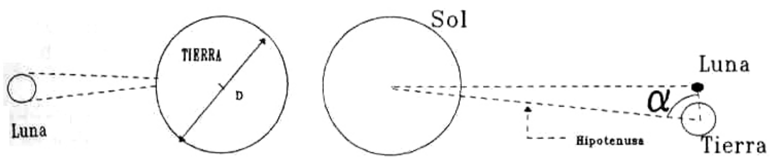


Figura I.4: Ejercicio # 55 Ejercicio # 56

Figura I.4: Ejercicio # 55 Ejercicio # 56

56.– **Distancia Tierra–Sol.**

La distancia de la Tierra al Sol es difícil de estimar. Aristarco notó que cuando hay media Luna (es decir, se ve iluminada exactamente la mitad del disco lunar), los rayos del sol deben caer sobre la Luna perpendicularmente con respecto a la línea de visión del observador. En ese momento es posible medir el ángulo α con que el Sol es visto desde la Tierra. Su valor es muy cercano al de un ángulo recto: $90^\circ - \alpha \simeq 1^\circ$.

(Aristarco, erróneamente, lo estimó en: $90^\circ - \alpha \simeq 3^\circ$).

Use este resultado y la distancia Tierra–Luna, para estimar la distancia Tierra–Sol.

Estime, además, la rapidez (módulo de la velocidad) con que la tierra orbita alrededor del Sol.

57.– **Nuevo método experimental para estimar la distancia Tierra–Luna.**

Supongamos dos observadores A y B que están ubicados sobre el mismo meridiano terrestre y dispuestos de manera tal, que los rayos de luz provenientes de la Luna forman, tanto para A como B, un ángulo X con la vertical local, como se señala en la Figura.

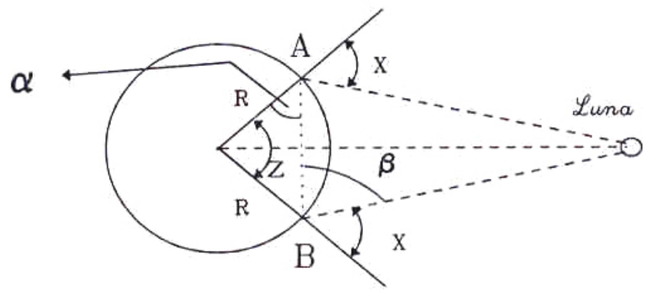


Figura I.5: Ejercicio # 57

Para calcular la distancia entre la Tierra y la Luna, debemos conocer el valor del ángulo Z. Una forma de obtenerlo es midiendo la distancia entre A y B sobre la superficie terrestre.

En la antiguedad, la determinación de esta distancia resultaba difícil, prefiriéndose el método siguiente: cada observador medía el ángulo que formaban los rayos provenientes de una estrella elegida previamente por ambos, y la vertical en el respectivo punto. Designando estos ángulos como u para A y v para B, se puede demostrar que $Z = u + v$.

Obtenga esta relación y justifique la suposición que los rayos que inciden en A son paralelos con los que inciden en B.

Ahora, suponiendo conocidos: R, X y Z, calcule, en función de estas cantidades, la distancia Tierra–Luna medida desde el centro de la Tierra. Suponga que la Luna es un objeto puntual.

¿Por qué ambos observadores deben ubicarse en un meridiano en lugar de un paralelo, por ejemplo? Haga un diagrama para justificar su respuesta.

58.– Consiga una hoja de papel muy larga y con un grosor de $0,1$ mm (10^{-4} m). Comience a doblarla por su mitad, de manera que en cada doblez el grosor aumenta al doble.

¿Cuántos **dobleces** son necesarios, para que el grosor final que adquiere, alcance a cubrir la distancia Tierra–Luna (aproximadamente 380.000 Km)?
Antes de hacer el cálculo escoja alguna de las alternativas propuestas en la Tabla.

a) 42 veces
b) 1320 veces
c) 483200 veces
d) 639421 veces
e) $2,4 \bullet 10^8$ veces.

Ahora calcule y concluya cuánto puede confiar en su intuición.

59.– Estudie la siguiente situación: alrededor del Ecuador terrestre se construye un anillo metálico que calza en forma exacta, sin huelgo. A continuación se corta el anillo metálico en un punto y se le agrega un pedazo de anillo de 1 metro de longitud. Si al agregarle el nuevo pedazo, el anillo queda suspendido equidistante de la superficie terrestre a una altura h:

a) Estime, sin calcular: ¿A qué altura queda el anillo?

b) Haga el cálculo numérico y compare con su estimación.

60.– a) ¿Con qué rapidez puede Ud. lanzar una piedra?

b) ¿Qué velocidad cree Ud. que alcanza una bala a la salida del cañón.

En ambos casos, justifique cuantitativamente su estimación.

61.– a) Calcule *numéricamente* el valor de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = ?$$

Indicación:

Calcule esta suma con tres cifras significativas. Descarte los términos de la serie más pequeños que 10^{-4} y al sumarlos aproxime la última cifra de modo que mantenga el mismo número de cifras significativas del comienzo.

Si sabe el mínimo de BASIC u otro lenguaje de programación... olvídese de estas instrucciones y haga que la máquina calcule.

b) Recordando que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$

Calcule *el valor exacto* de la serie propuesta en la parte a).

Se propone el siguiente método:
1) Escriba la serie correspondiente al número $e = e^1$.
2) A la serie propuesta en la primera parte, súmele la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+1)! \qquad \textit{término a término.}$$

3) Relacione esta nueva serie con la del número **e**.

62.– Demuestre la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta/2)} = \left(\cos\,\beta/2 + \frac{\operatorname{sen}\beta\,\cos^2(\alpha-\beta/2)}{\cos(\beta/2)\operatorname{sen}(2\,\alpha-\beta)}\right).$$

63.– En este ejercicio definiremos la *división entre números complejos*. Del texto, ya conocemos la multiplicación entre estos números. Por otro lado, sabemos que la división es la operación inversa de la multiplicación. Comencemos entonces por el inverso de un número complejo.

a) **Inverso de un complejo**

Dado un número complejo $z = a + ib$, el inverso, al que llamaremos z^{-1}, será aquel número (complejo) tal que:

$$z \bullet z^{-1} = z^{-1} \bullet z = 1. \quad \text{Esta operación es abeliana.}$$

¿Encuentre una expresión para z^{-1}, que cumpla la condición anterior y tenga la forma $z^{-1} = c + i\,d$? c y d son números reales y dependen sólo de los valores de a y b.

Compruébela para $z = 1 + i \cdot 5$

b) **División**

Para dividir complejos sólo tenemos que multiplicar por el inverso del complejo con respecto al cual nos interesa dividir.

Así : $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \bullet z_2^{-1}$

Dado $z_1 = a + i \cdot b$ y $z_2 = c + i \cdot d$, demuestre que

$$\frac{z_1}{z_2} = (a\,c + b\,d)/(c^2 + d^2) + i \cdot (-a\,d + b\,c)/(c^2 + d^2)$$

64.– La Figura muestra un péndulo bifilar. Este péndulo puede oscilar girando en torno a un eje horizontal que pasa por los puntos de apoyo, o girar en torno a un eje *vertical* que pasa por el punto medio de la barra.

Suponga que la barra se gira en 90^o con respecto a este eje vertical: calcule cuánto se elevó la barra verticalmente.