

Repaso matemático

Def: función exponencial

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} (e^{\alpha x}) = \alpha \cdot e^{\alpha x}$$

$\alpha \in \text{complejos } (\mathbb{C})$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Números complejos:

Sea $w \in \mathbb{C}$

Representación cartesiana

$$w = x + iy$$

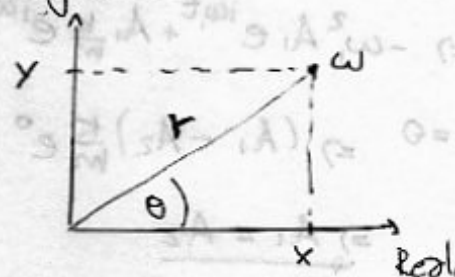
Representación en coordenadas polares.

$$w = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w = r e^{i\theta}$$

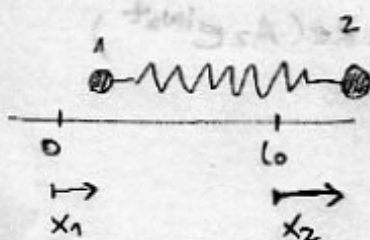
Imaginarios



$$\tan \theta = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[P] 2 masas (m) unidas por un resorte (k, l_0)



x_1 es la posición de la masa 1 medida desde el origen

x_2 es la posición de la masa 2 medida desde l_0

$$F = ma \Rightarrow m \ddot{x}_i = F_{\text{elástica}} = -k \cdot \text{deformación}$$

$$m \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$m \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \quad (2)$$

Se propone una solución de la forma $x(t) = \text{Re}(A e^{i\omega t})$ $A \in \mathbb{C}$

necesitamos determinar A y ω .

\rightarrow parte real.

$$\ddot{x}(t) = \text{Re} \left(\frac{d^2}{dt^2} (A e^{i\omega t}) \right) = \text{Re} (A (i\omega)^2 e^{i\omega t})$$

$$= \text{Re} (A e^{i\omega t}) \cdot (-\omega^2) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Utilizando esto en (1) y (2) \Rightarrow

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m} x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 = 0$$

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) x_2 - \frac{k}{m} x_1 = 0 \quad (4)$$

Con (3) y (4) tenemos un sistema de ecuaciones, entonces buscamos solución tal que $x_1(t) \neq 0$ y $x_2(t) \neq 0$, luego:

$$(3) \Rightarrow x_2 = \left(\frac{\frac{k}{m} - \omega^2}{k/m} \right) x_1$$

$$\text{Reemplazo en (4)} \Rightarrow \left[\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 - \frac{k}{m} \right] x_1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} - \omega^2 = \pm \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_1^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0 \quad \text{y} \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

(2 soluciones)

Cuanto vale A_1, A_2 ?

para $\omega_1 = 0$ (1) $\Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0$ $x_1(t) = \text{Re}(A_1 e^{i\omega_1 t})$

$$\Rightarrow -\omega_1^2 A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1 \frac{k}{m} e^{i\omega_1 t} - \frac{k}{m} A_2 e^{i\omega_1 t} = 0$$

$x_2(t) = \text{Re}(A_2 e^{i\omega_1 t})$

$$\omega_1 = 0 \Rightarrow (A_1 - A_2) \frac{k}{m} e^0 = 0$$

$e^0 = \cos(0) + i\sin(0)$

$$\Rightarrow A_1 = A_2$$

$= 1 + i \cdot 0$
 $= 1$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1(t) &= \text{Re}(A e^{i\omega_1 t}) = A \\ x_2(t) &= \text{Re}(A e^{i\omega_1 t}) = A \end{aligned} \right\} (*)$$

para $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ (1) $\Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0$ $x_1(t) = \text{Re}(A_1 e^{i\omega_2 t})$

$$\Rightarrow \left(-\frac{2k}{m} A_1 + \frac{k}{m} A_1 - \frac{k}{m} A_2 \right) e^{i\omega_2 t} = 0$$

$x_2(t) = \text{Re}(A_2 e^{i\omega_2 t})$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} (-A_1 - A_2) e^{i\omega_2 t} = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1(t) &= \text{Re}(B e^{i\omega_2 t}) = B \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \phi\right) \\ x_2(t) &= \text{Re}(-B e^{i\omega_2 t}) = -B \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \phi\right) \end{aligned} \right\} (I)$$

⊛ En realidad esta solución no es completa. sabemos que

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0 \quad ; \quad \text{pero } \omega_1 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = 0 \quad ; \quad \text{integrando } \int \ddot{x}_1 dt = \dot{x}_1 = C \quad (\text{integral de cero})$$

$$\int \dot{x}_1 dt = \int C dt = C \cdot t + D$$

$$\Rightarrow x_1(t) = C \cdot t + D \quad \left. \begin{array}{l} C, D \text{ constantes} \end{array} \right\} (II)$$

Esta solución es mas general: igual para $x_2(t) = C \cdot t + D$

Luego la solución más general del problema es una superposición de nuestras soluciones: (I) y (II) \Rightarrow

$$x_1(t) = C \cdot t + D + B \cos(\sqrt{\frac{2K}{m}} t + \phi)$$

$$x_2(t) = C \cdot t + D - B \cos(\sqrt{\frac{2K}{m}} t + \phi)$$

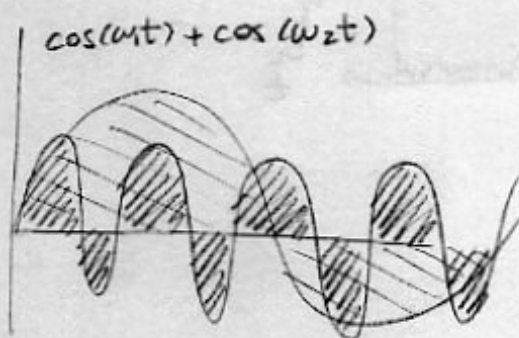
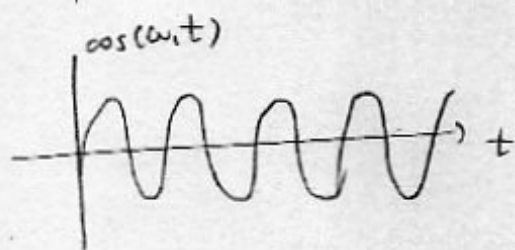
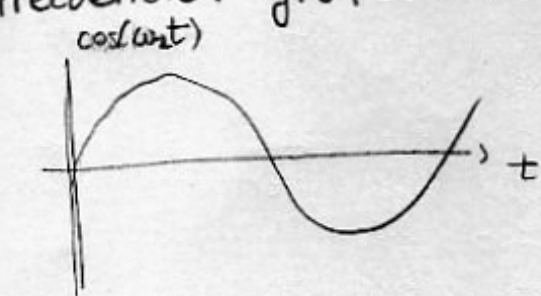
con B, C, D, ϕ constantes determinadas por las condiciones iniciales.

Por lo general cuando ninguno de las frecuencias es cero, ambas soluciones son sinusoidales:

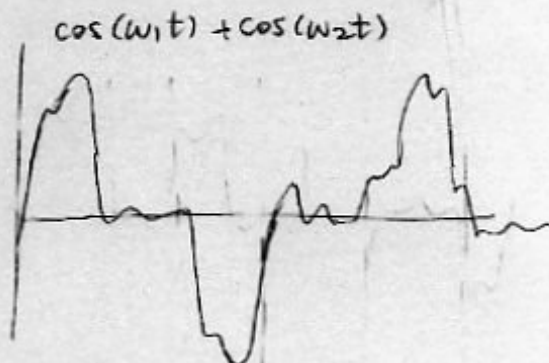
$$x_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

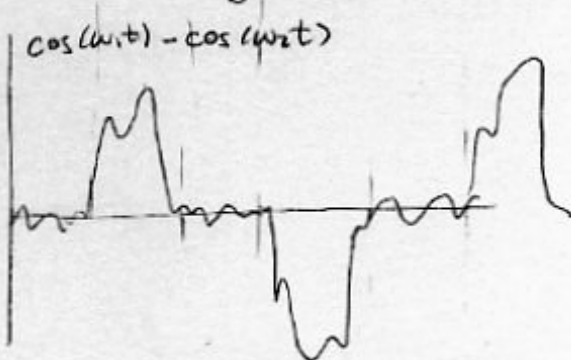
En este caso las soluciones son una combinación de sinusoidales de distinta frecuencia. gráficamente se ve:



Vemos que en ciertos puntos las amplitudes se suman y en otros se restan.



Amplitud de $x_1(t)$



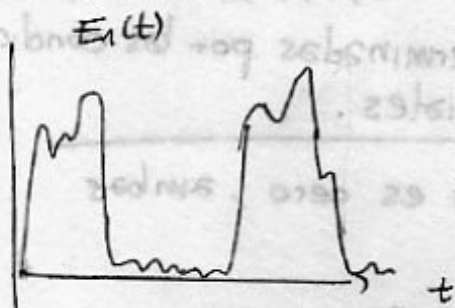
Amplitud de $x_2(t)$

veamos que cuando la amplitud de una es grande la de la otra es pequeña \longrightarrow

La energía es ~~E~~ $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

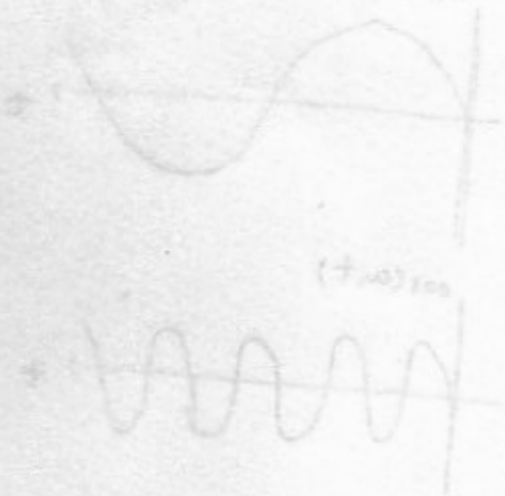
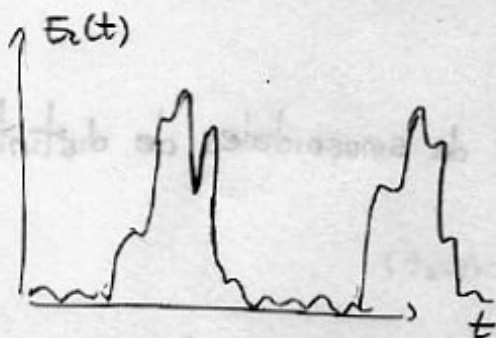
$\dot{x}(t)$ es proporcional a la amplitud $\Rightarrow E$ es proporcional a la amplitud²

gráficamente:



Como las amplitudes máximas y mínimas se iban alternando lo mismo se ve para la energía

Interpretation: Las dos masas se traspasan la energía una a la otra a través del resorte.



Resonancia de un sistema de masas y resortes