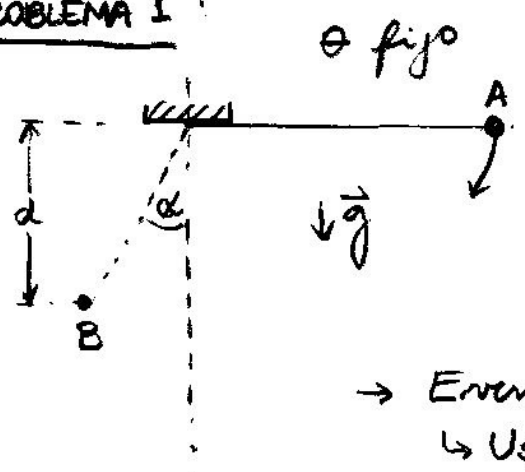
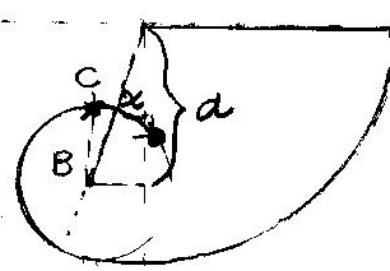
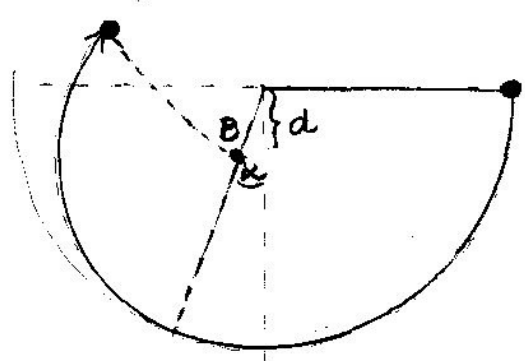
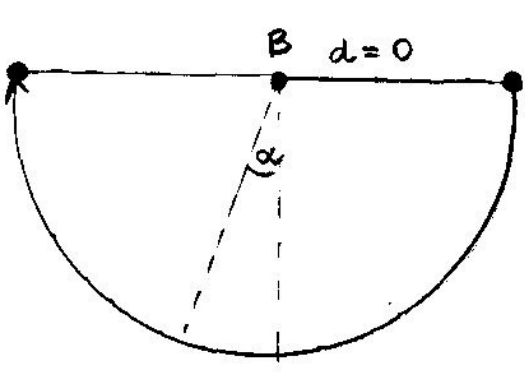


PROBLEMA 1



El pndulo de la figura se suelta desde el reposo en el punto A. Oscila hasta chocar con el clavo en B. Queremos que describa un círculo en torno a B.

→ Eventos posibles
↳ Usando lógica e intuición



→ Notemos que depende de d → la pregunta será: ¿Cuál es el valor mínimo de d tal que el pendulo describe una circunferencia en torno a B?

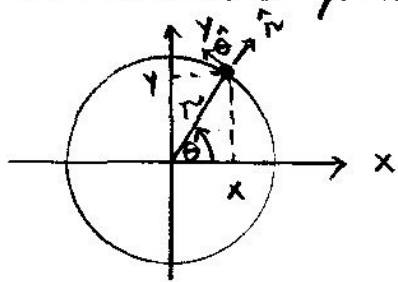
Solución:

Una vez que la cuerda alcance el clavo en B comenzará a describir un círculo en torno a B de radio:

$x = \frac{d}{\cos \alpha}$ \Rightarrow $R = l - \frac{d}{\cos \alpha}$ (*)
 $R + x = l$

Condición m masa describe círculo: en C la tensión de la cuerda debe ser ≥ 0

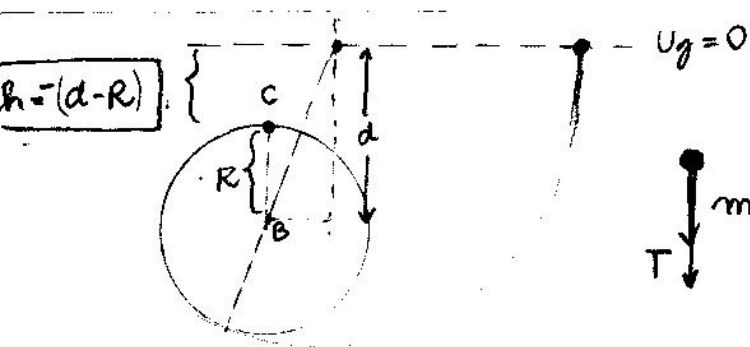
→ Coordenadas polares: $\frac{y}{x} = \tan \theta$



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $x = r \cos \theta$
 $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $y = r \sin \theta$

$\hat{r} = i \cos \theta + j \sin \theta$ $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r} \end{array} \right.$
 $\hat{\theta} = -i \sin \theta + j \cos \theta$

$\vec{r} = r \hat{r}$
 $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$
 $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta}$



$$T - mg = m a_c \Rightarrow -T - mg = m \underbrace{a_c}_{-R \cdot \underbrace{\dot{\omega}^2}_{\dot{\theta}^2}} \Rightarrow T = -mg + mR\dot{\theta}^2$$

Condición $T \geq 0 \Rightarrow -mg + mR\dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{R\dot{\theta}^2 \geq g} \quad (**)$

Por otra parte, la energía se conserva $\Rightarrow E_A = E_C$. Con $E = U_g + K$
 $j m A \quad E_A = 0$

$$E_C = \frac{1}{2} m v_c^2 + U = 0$$

$$= \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + U$$

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 - mg(d-R) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 = mg(d-R)$$

$$\Rightarrow R^2 \dot{\theta}^2 = 2g(d-R)$$

$$\Rightarrow \boxed{R\dot{\theta}^2 = 2g \frac{(d-R)}{R}}$$

+ Condición $(**)$ $\Rightarrow 2g \frac{(d-R)}{R} \geq g$

$$\Rightarrow 2(d-R) \geq R$$

$$\Rightarrow 2d - 2R \geq R$$

$$\Rightarrow \boxed{2d \geq 3R}$$

Y Recordemos de $(**)$ que $R = l - \frac{d}{\cos \alpha}$

$$2d \geq 3 \left(l - \frac{d}{\cos \alpha} \right)$$

$$2d \geq 3l - \frac{3d}{\cos \alpha}$$

$$2d + \frac{3d}{\cos \alpha} \geq 3l$$

$$d \underbrace{\left(\frac{2 \cos \alpha + 3}{\cos \alpha} \right)}_{> 0} \geq 3l$$

$$\Rightarrow \boxed{d \geq \frac{3l \cos \alpha}{3 + 2 \cos \alpha}}$$

$$E = U + K$$

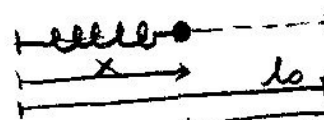
$$K = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$$

$$U_g = mgh$$

$$U_{el} = \frac{1}{2} K (\Delta x)^2$$

$$= \frac{1}{2} K (x - l_0)^2$$

$$\vec{F} = -K(x - l_0) \hat{x}$$

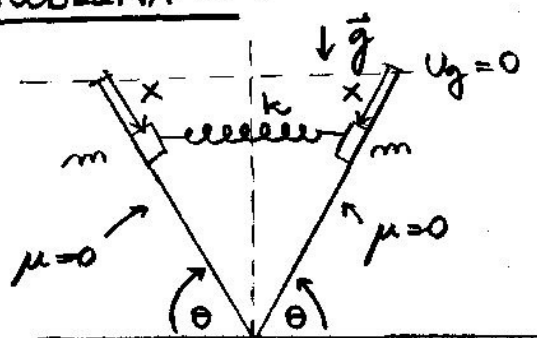


$$\Delta x = l_0 - x$$

Estirado: $x > l_0 \Rightarrow F < 0$

Comprimido: $x < l_0 \Rightarrow F > 0$

PROBLEMA 2 :



Planos: mismo θ inclinación θ , $\mu = 0$
 Bloques: masa m
 Resorte ideal constante k
 en $x=0$ el resorte posee su largo natural l_0
 los bloques parten desde el reposo en $x=0$

- Posición de los bloques cuando la compresión es máxima
- Rapidez máxima de los bloques y la posición en que la alcanzan

Solución:

Como no hay roce el sistema es conservativo.

Energía:

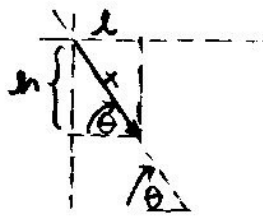
$$E = U_g + U_{el} + K$$

$$U_g = mgh$$

$$U_{el} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

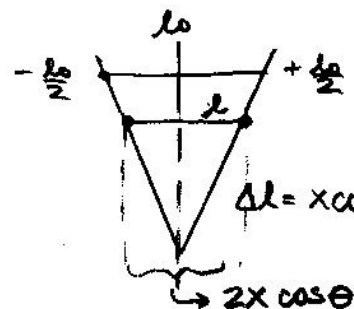
$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

\Rightarrow Energía inicial: $E_i = 0$
 ($x=0$)



$$l = x \cos \theta$$

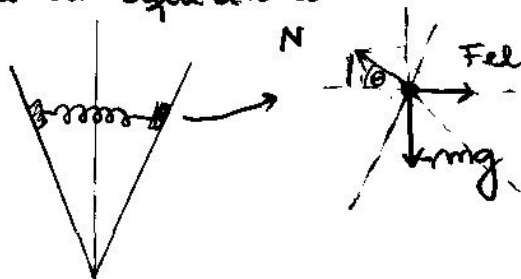
$$h = x \sin \theta$$



$$E = \sum_{i=1}^N U_i + K_i$$

Energía de un Sistema

Punto de equilibrio



$$\left. \begin{aligned} F_{el} &= N \sin \theta \\ N \cos \theta &= mg \end{aligned} \right\} F_{el} = mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$-k(l - l_0) = mg \tan \theta$$

$$-l + l_0 = \frac{mg \tan \theta}{k} \Rightarrow l_{eq} = l_0 - \frac{mg \tan \theta}{k}$$

Energía en cualquier instante

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2mgx \sin \theta + \frac{1}{2} k (2x \cos \theta)^2 = E_i = 0$$

$$E = m \dot{x}^2 - 2mgx \sin \theta + \frac{1}{2} k (2x \cos \theta)^2 = 0$$

Condición de máxima compresión: $\dot{x} = 0$

$$\Rightarrow 2mgx \sin \theta = \frac{1}{2} k (2x \cos \theta)^2$$

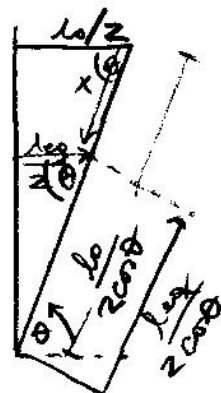
$$mgx \sin \theta = kx^2 \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow x = \frac{mg \sin \theta}{k \cos^2 \theta}$$

\rightarrow 1 solución $x=0$ (no sirve, es máximo)

Posición en la compresión máxima

$$x_{eq} = \frac{1}{2 \cos \theta} \left(l_0 - l_0 + \frac{mg \tan \theta}{k} \right)$$



¿Velocidad máxima?

→ Cuando la velocidad deja de aumentar, ie, cuando la aceleración es nula:

$$\ddot{x} = 0$$

De la ecuación de energía:

Derivo con respecto a x

$$\begin{aligned} \frac{dE(x, \dot{x})}{dx} &= 2m\ddot{x}\dot{x} - 2mg\sin\theta + k \cdot 2x\cos\theta \cdot 2\cos\theta = 0 \\ &= 2m\ddot{x}\dot{x} - 2mg\sin\theta + 4k\cos^2\theta x = 0 \end{aligned}$$

Condición de máximo de velocidad $\ddot{x} = 0$

$$\Rightarrow 4k\cos^2\theta x = 2mg\sin\theta$$

$$x = \frac{mg\sin\theta}{2k\cos^2\theta}$$

Posición en que alcanzan la veloc. máxima.

→ Corresponde al x_{eq} y es igual a $\frac{1}{2}$ de x de compresión máxima

Reemplazamos en la ecuación de energía y despejamos \dot{x} :

$$m\dot{x}^2 = 2mgx\sin\theta - \frac{1}{2}k(2x\cos\theta)^2$$

$$\dot{x}^2 = 2g\sin\theta x - \frac{k}{2m} 4\cos^2\theta x^2$$

$$= \cancel{2}g\sin\theta \frac{mg\sin\theta}{2k\cos^2\theta} - \frac{k}{2m} \cancel{4} \cos^2\theta \frac{m^2g^2\sin^2\theta}{\cancel{4}k^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{mg^2\sin^2\theta}{k\cos^2\theta} - \frac{mg^2\sin^2\theta}{2k\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mg^2\sin^2\theta}{k\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{m}{2k} g^2 \tan^2\theta$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{m}{2k}} g \tan\theta$$

Rapidez máxima

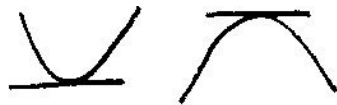
Función → máximo?

$f(x) = \dots$ o mínimo

1º: $\frac{df(x)}{dx} = 0 \rightarrow$ derivo q/a la variable. \rightarrow despejar x \rightarrow derivada es tangente $f(x)$ máximo (o min)

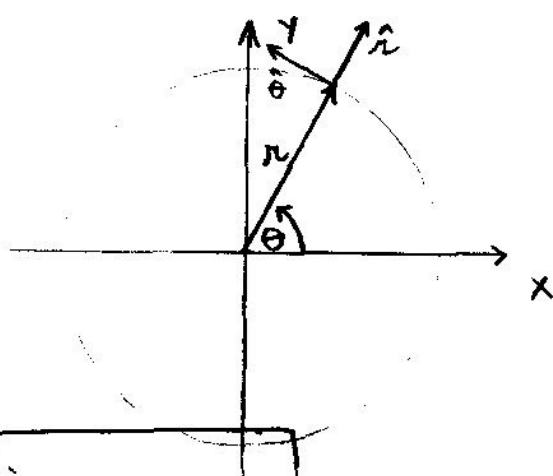
2º: reemplazar en $f(x) \rightarrow$ valor del máximo.

3º: comprobar que se trate de un máximo (o mínimo).



$$\frac{d^2f}{dx^2} > 0 \rightarrow \cup$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} < 0 \rightarrow \cap$$



$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$$

$$\boxed{\vec{r} = r \hat{r}}$$

Vector posición

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r}$$

Posición:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

Velocidad:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

Aceleración:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta}$$

• ENERGÍA Y TRABAJO

$$\boxed{E = U + K}$$

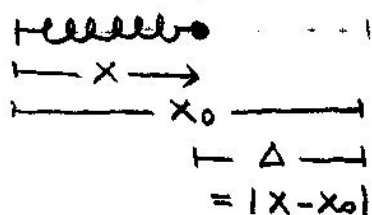
$$K = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$$

$$U_g = mgh$$

$$U_{el} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 = \frac{1}{2} k \Delta^2$$

$$\vec{F} = -\nabla U_{el}$$

$$F(x) = -\frac{dU_{el}(x)}{dx} = -k(x - x_0)$$



• Resorte estirado:

$$x > x_0 \Rightarrow F < 0$$

$$(\Delta > 0)$$

• Resorte comprimido:

$$x < x_0 \Rightarrow F > 0$$

$$(\Delta < 0)$$



Sistema Conservativo

$$\rightarrow \text{Sin roce} \Rightarrow E = \text{cte} \quad \forall t$$

$$E_i = E_f$$

Sistema no Conservativo

$$\rightarrow \text{Con roce} \Rightarrow E \neq \text{cte} \quad \text{Se pierde energía}$$

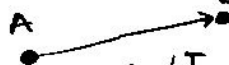
✓ Fuerza

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para nosotros:

$$W_{ab} = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad \text{Fuerza por distancia}$$

• Teorema de las Fuerzas Vivas:



$$W^T = W_c + W_{nc}$$

$$W_c = -\Delta U = U(A) - U(B)$$

$$W^T = \Delta K = K(B) - K(A)$$

$$K(B) - K(A) = -U(A) - U(B) + W_{nc}$$

$$[K(B) + U(B)] - [K(A) + U(A)] = W_{nc}$$

$$E(B) - E(A)$$

POTENCIA: $P = \frac{dW}{dt}$ Tasa de variación del trabajo

$$\boxed{\Delta E = W_{nc}}$$

$$P = \frac{W}{T} \quad [\text{Watt}] = \frac{[\text{Joule}]}{[\text{seg}]}$$

Variación de energía mecánica es igual al trabajo realizado.