

P1

Mientras caen ambas masas no existen fuerzas no conservativas, así que la energía mecánica del sistema se mantiene constante durante todo el proceso.

valiendonos de esto podemos determinar la velocidad de cada masa al momento de que el hilo choque con el clavo.

$$\text{Energía} = E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \quad (\text{cinética} + \text{potencial})$$

luego, definiendo la altura $z=0$ donde está el clavo conservo energía de cada masa.

$$E_i = \text{Energía al momento que empiezan a caer} \\ = mgR$$

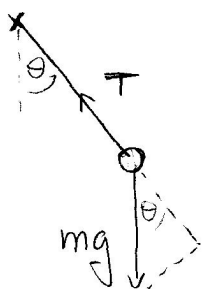
$$E_f = \text{Energía cuando choca con el clavo} \\ = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad ;$$

conservación de energía, i.e., $E_i = E_f \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR \Rightarrow v_0^2 = 2gR$$

Luego el movimiento es el de un péndulo de largo R fijo al clavo, para cada masa, considerando esto veremos cual es la tensión neta que soporta el clavo, lo que depende del ángulo como se verá más adelante.

veamos el DCL de una masa



para determinar la tensión analizamos las fuerzas en el eje radial:

$$\sum \vec{F}_{\text{radial}} = T(-\hat{r}) + mg \cos \theta \hat{r}$$

el signo indica que apunta hacia el origen

Ahora de cinemática sabemos que la aceleración en el eje radial es $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \hat{r}$

$$\text{luego } \Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -T + mg \cos \theta = -mR\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (1)$$

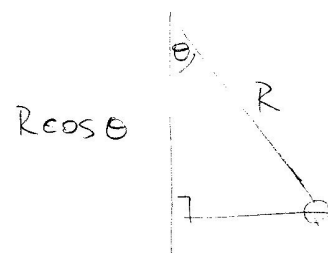
Debemos ahora determinar cual es la velocidad angular para lo cual usaremos la conservación de energía

E_1 = Energía al chocar el hilo con el clavo

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 = mgR$$

E_2 = Energía cuando la masa forma un ángulo θ con la vertical

$$= \frac{1}{2} m v^2 + mg(-R \cos \theta)$$



$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgR = \frac{1}{2} m v^2 - mgR \cos \theta$$

$$\Rightarrow v^2 = 2(gR + gR \cos \theta)$$

$$\Rightarrow R\dot{\theta}^2 = 2gR(1 + \cos \theta)$$

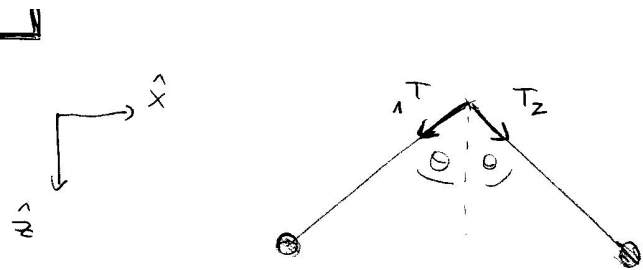
$$\Rightarrow R\dot{\theta}^2 = 2g(1 + \cos \theta)$$

Reemplazando en la ecuación (1)

$$\Rightarrow T = m \cdot 2g(1 + \cos \theta) + mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow T = mg(2 + 3 \cos \theta)$$

esta es la tensión que soporta una masa debido al hilo y apunta hacia el clavo.



por el principio de acción y reacción
el hilo soporta una fuerza igual
a la encontrada, en el sentido
contrario.

la fuerza neta en el clavo es entonces:

$$\vec{T} = T_2 \sin \theta \hat{x} - T_1 \sin \theta \hat{x} + T_1 \cos \theta \hat{z} + T_2 \cos \theta \hat{z}$$

pero $T_1 = T_2 \Rightarrow$

$$\vec{T} = 2 T_1 \cos \theta \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = 2mg \cos \theta (2 + 3 \cos \theta) \hat{z}$$

Entonces cuando choca el hilo con el clavo

$$\cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \vec{T} = 0$$

cuando las masas estan en posicion vertical

$$\cos \theta = 1$$

$$\Rightarrow \vec{T} = 2mg(2+3) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = 10mg \hat{z}$$

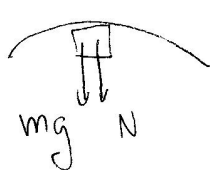
P2 primero hay que determinar la compresion inicial necesaria para que pase apenas por el primer circulo, que es lo mismo que determinar la velocidad con que debe entrar al Loop para que pase justo, veamos esta velocidad:

para pasar justo necesitamos que la normal no se anule en ningun momento, el punto en que la normal es menor es el punto mas alto de la circunferencia, el caso critico que discrimina si la masa se cae o no es que $N=0$ en este punto conservamos energia entre este punto y la entrada al loop:

en el punto mas alto $E_1 = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + mg(2R)$

en la entrada $E_2 = \frac{1}{2}mv_0^2$

DCL en el punto mas alto:


$$\Sigma F = -mg - N \quad (\text{en el eje radial})$$

$$F_{\text{centripeta}} = -mR\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow N = mR\dot{\theta}^2 - mg$$

condicion critica $N=0 \Rightarrow 0 = R\dot{\theta}^2 - mg$

$$\Rightarrow R\dot{\theta}^2 = g$$

luego $E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + 2mgR = \frac{1}{2}mv_0^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m \cdot gR + 2mgR = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 = 5gR$$

esta es la velocidad de entrada al loop para que pase apenas sin caer.

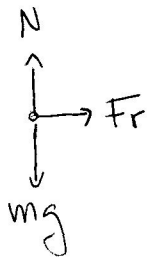
ahora falta determinar la compresión del resorte necesaria para llegar con v_0 a la entrada del loop.

sea d la compresión inicial, la distancia recorrida es $L - (\ell - d)$, la energía con que llega a la base del loop es la energía inicial menos el trabajo de la fuerza de roce

$$E_i = \frac{1}{2} k d^2 \quad (\text{Energía inicial (elástica)})$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (\text{Energía final})$$

DCL mientras avanza:



fuerza de roce: $F_r = \mu \cdot N$ en el sentido contrario al movimiento

$$N = mg$$

$$\text{Trabajo: } \vec{F}_r \cdot \vec{r} = -\mu \cdot mg \cdot (L - \ell + d) = W$$

$$\text{luego } E_f = E_i + W$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k d^2 - \mu mg (L - \ell + d)$$

Reemplazando v_0^2 :

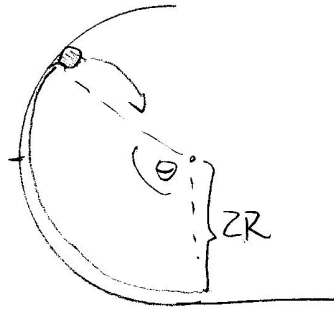
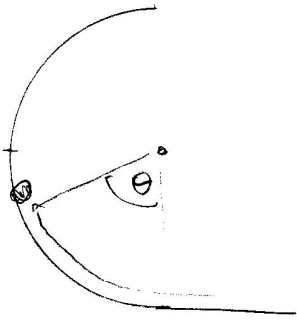
$$\frac{1}{2} m \cdot 5gR = \frac{1}{2} k d^2 - \mu mg (L - \ell) - \mu mg d$$

$$\Rightarrow d^2 - \frac{2\mu mg}{k} d - \frac{2mg}{k} (\mu (L - \ell) + \frac{5}{2} R) = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{\mu mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + \frac{mg}{k} (\mu (L - \ell) + \frac{5}{2} R)}$$

la solución con ~~el~~ signo $-$, da una distancia negativa así que la solución es utilizando el signo $+$.

para ver hasta donde llega en el círculo mayor, hay que analizar los posibles recorridos que puede hacer:



θ es el ángulo que forma con la vertical

1er caso: no alcanza a llegar a $\theta = \frac{\pi}{2}$, la condición del ángulo máximo es que $v = 0$

Si supera $\theta = \frac{\pi}{2}$ la condición del ángulo máximo es que $N = 0$ (2º caso)

para discriminar veamos que velocidad lleva cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$

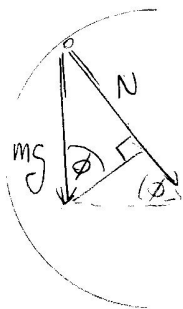
$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{5}{2} m g R \quad (\text{Energía inicial, al salir del loop pequeño})$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 + m g \cdot 2R \quad (\text{Energía en } \theta = \frac{\pi}{2})$$

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + m g \cdot 2R = \frac{5}{2} m g R$$

$$\Rightarrow v^2 = g R > 0 \Rightarrow \text{El 2º caso es lo que sucede.}$$

DCL
en el punto
donde se
despega



En el eje radial

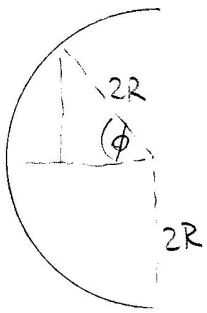
$$\sum F = -N - m g \sin \phi = -\frac{m v^2}{2R}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{2} \frac{m v^2}{R} - m g \sin \phi$$

Condición de que se despegue: $N = 0 \Rightarrow$

$$v^2 = 2 g R \sin \phi$$

Veamos conservando energía la velocidad que tiene en el punto que se despega



la altura es $2R + 2R \sin \phi$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2} m v^2 + m g \cdot 2R(1 + \sin \phi)$$

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{5}{2} m g R$$

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + 2 m g R(1 + \sin \phi) = \frac{5}{2} m g R$$

Reemplazo v^2 :

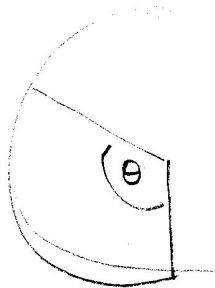
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot 2 g R \sin \phi + 2 m g R(1 + \sin \phi) = \frac{5}{2} m g R$$

$$\Rightarrow 2 \sin \phi + 4 + 4 \sin \phi = 5$$

$$\Rightarrow \sin \phi = \frac{1}{6}$$

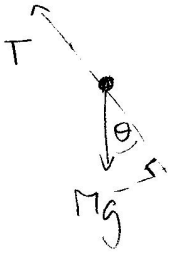
Midiendo el ángulo desde la vertical debe dar

$$\cos \theta = -\frac{1}{6}$$



P3 Para que la masa m se mueva es necesario que las fuerzas a lo largo del riel sean mayores que la fuerza de roce. Estas fuerzas están relacionadas con la masa M mediante la tensión del hilo.

DCL M



A lo largo del hilo vemos las fuerzas:

$$T - Mg \cos \theta = MR\dot{\theta}^2$$

Necesitamos saber el valor de $\dot{\theta}^2$, lo veremos utilizando conservación de energía:

definiendo $z=0$ en el riel:

$E_i = 0$ (energía inicial, parte del reposo desde la horizontal)

$$E_f = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mg(-R \cos \theta)$$

$$E_i = E_f \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 - M g R \cos \theta$$

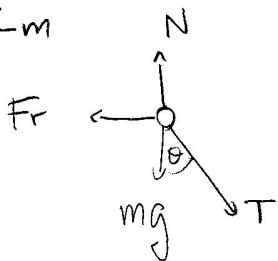
$$\Rightarrow R \dot{\theta}^2 = 2 g \cos \theta$$

Reemplazando en la ecuación anterior

$$T = Mg \cos \theta + M \cdot 2g \cos \theta$$

$$\Rightarrow T = 3Mg \cos \theta$$

DCL m



Según el eje vertical:

$$N - mg - T \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow N = mg + 3Mg \cos^2 \theta$$

En el eje horizontal para que se mueva es necesario que:

$$T \cdot \sin \theta \geq F_r$$

$$\Rightarrow 3\Gamma g \cos \theta \sin \theta \geq \mu \cdot N$$

$$\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{3\Gamma}{2} \sin(2\theta) \geq \mu m + \frac{3\mu\Gamma}{2} + \frac{3\mu\Gamma}{2} \cos(2\theta)$$

$$\Rightarrow \sin(2\theta) - \mu \cos(2\theta) \geq \frac{2\mu}{3} \frac{m}{\Gamma} + \mu$$

Ahora podemos escribir μ como $\mu = \tan \gamma$

$$\Rightarrow \sin(2\theta) \cos \gamma - \sin \gamma \cos 2\theta \geq \left(\frac{2}{3} \frac{m}{\Gamma} + 1\right) \sin \gamma$$

$$\Rightarrow \sin(2\theta - \gamma) \geq \left(\frac{2}{3} \frac{m}{\Gamma} + 1\right) \sin \gamma$$

En el caso límite, i.e., comienza a resbalar

$$\theta = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \left[\left(\frac{2}{3} \frac{m}{\Gamma} + 1 \right) \sin \gamma \right]$$

una condición para que el ángulo no exista es que

$$\left(\frac{2}{3} \frac{m}{\Gamma} + 1 \right) \sin \gamma > 1$$