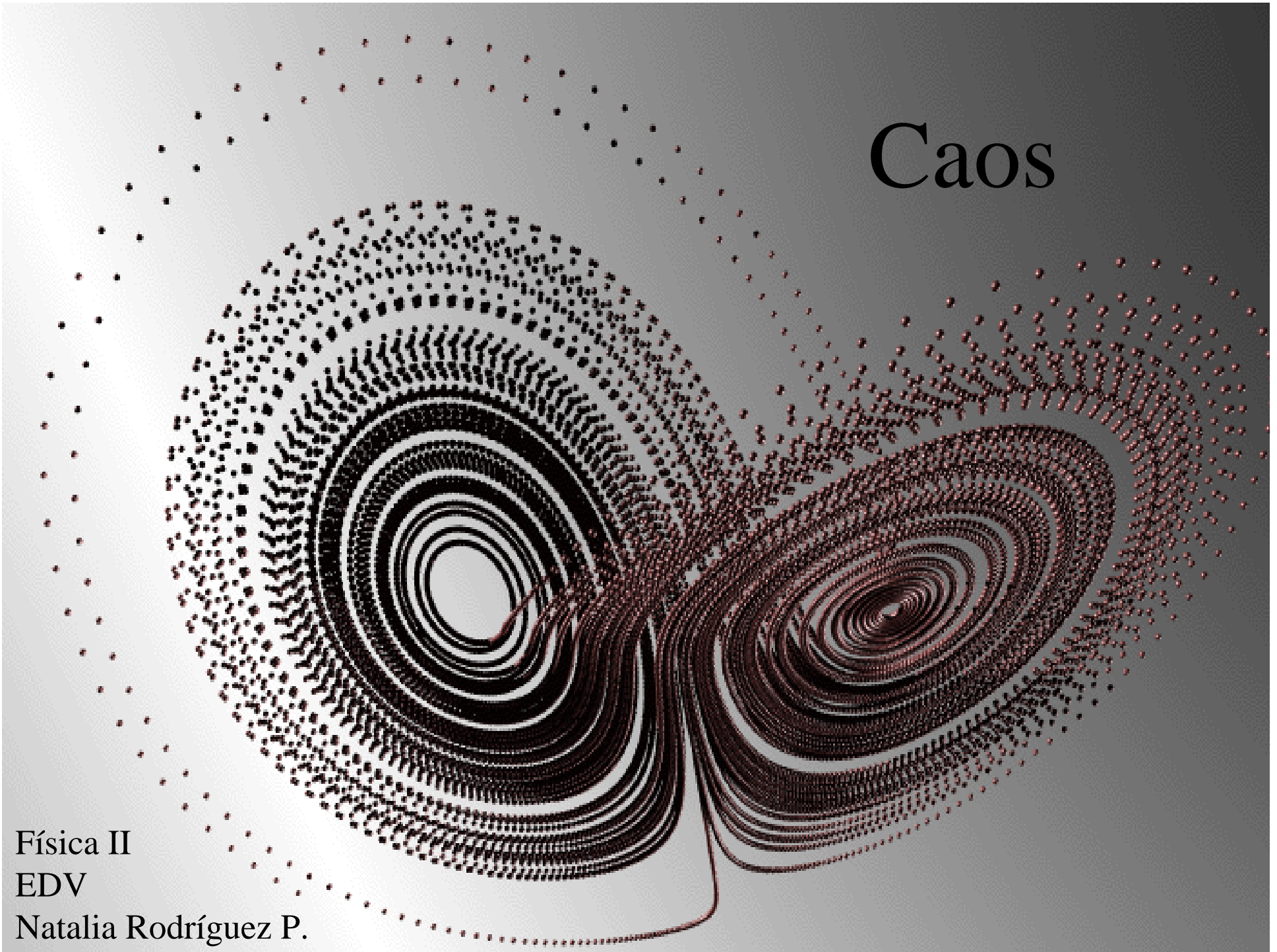


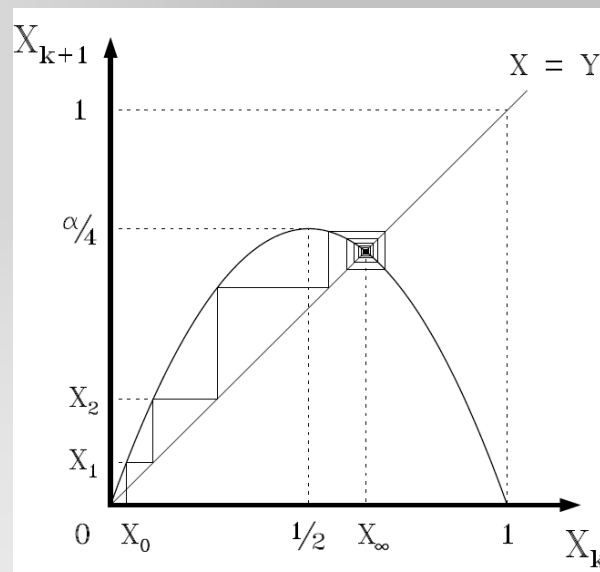
# Caos

Física II  
EDV  
Natalia Rodríguez P.



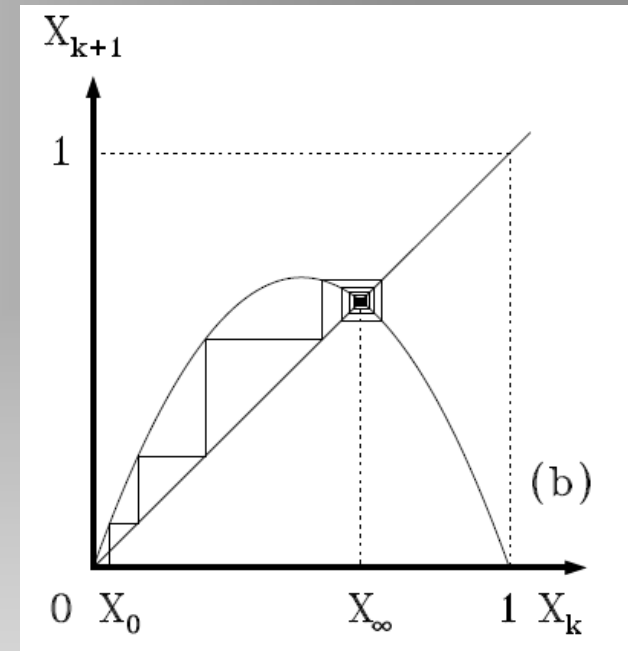
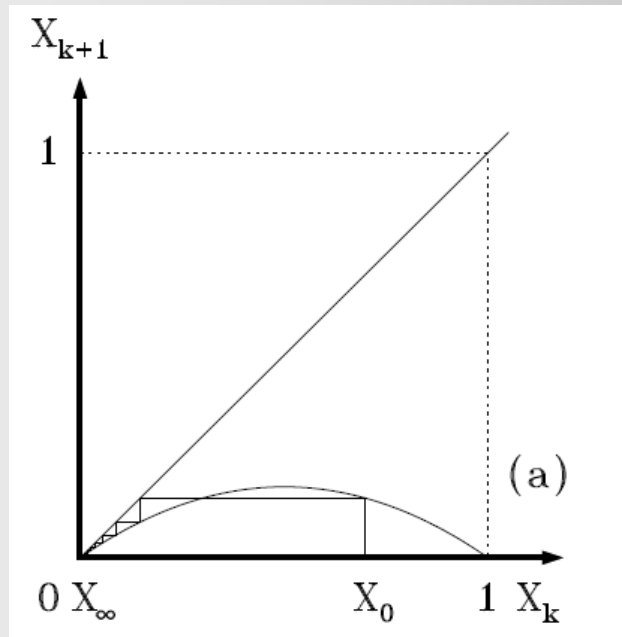
La ecuación prototípica empleada para ilustrar esta bien establecida teoría es la *curva logística*:  $X_{k+1} = \alpha X_k(1 - X_k)$ ,  $\alpha \in [0, 4]$ .  $X$  es el tamaño normalizado de una “población” entre 0 y 1, digamos conejos,  $k$  y  $k + 1$  son generaciones subsecuentes, y  $\alpha$  es un *parámetro*.

La *parábola* logística, la cual exhibe un aumento de generación a generación si la población es pequeña pero una disminución si es larga, se muestra abajo ( $\alpha = 2.8$ ) junto con una secuencia de *iteraciones*, una *órbita*, que muestra el *destino final* de la población,  $X_\infty$ .



El valor final de  $X$  depende del valor de  $b$  en la ecuación logística:

$$X_{(t+1)} = b * X_{(t)} * (1 - X_{(t)})$$

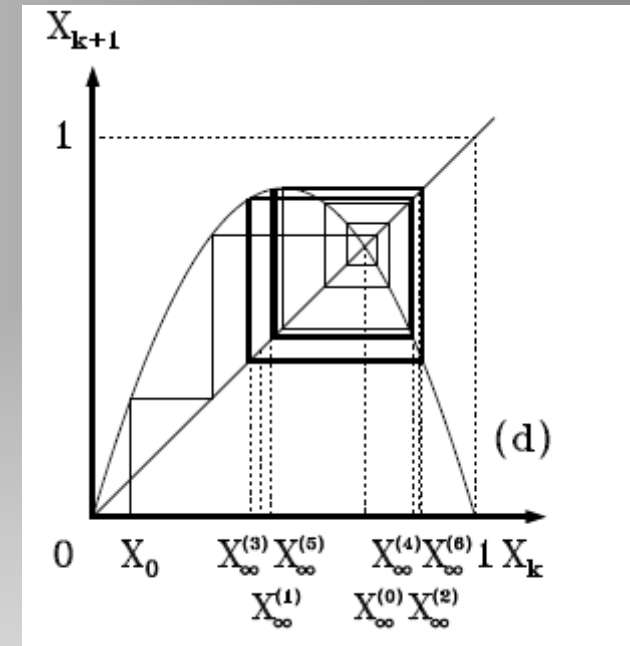
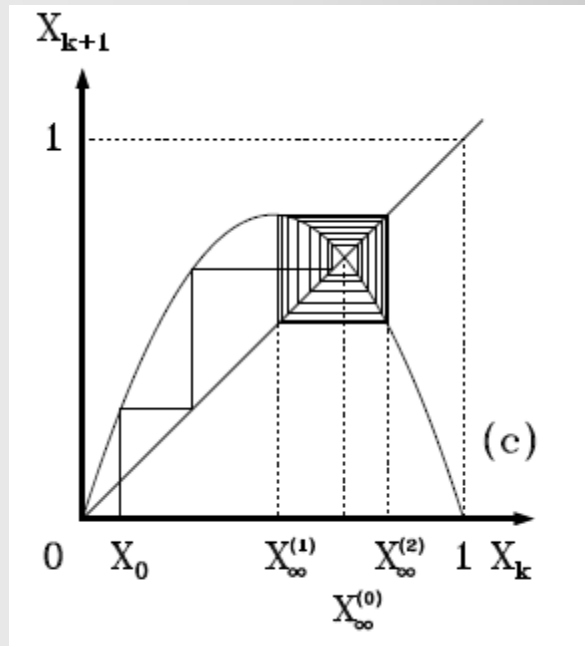


Si la parábola está *debajo* de  $X = Y$ , como en (a),  $X_{\infty} = 0$ . *Cero* es *punto fijo estable*.

Si la curva está *por encima* y  $\alpha < 3$ , como en (b),  $X_{\infty} = (\alpha - 1)/\alpha$ .  $X_{\infty}$  es un *punto fijo*.

El valor final de  $X$  depende del valor de  $b$  en la ecuación logística:

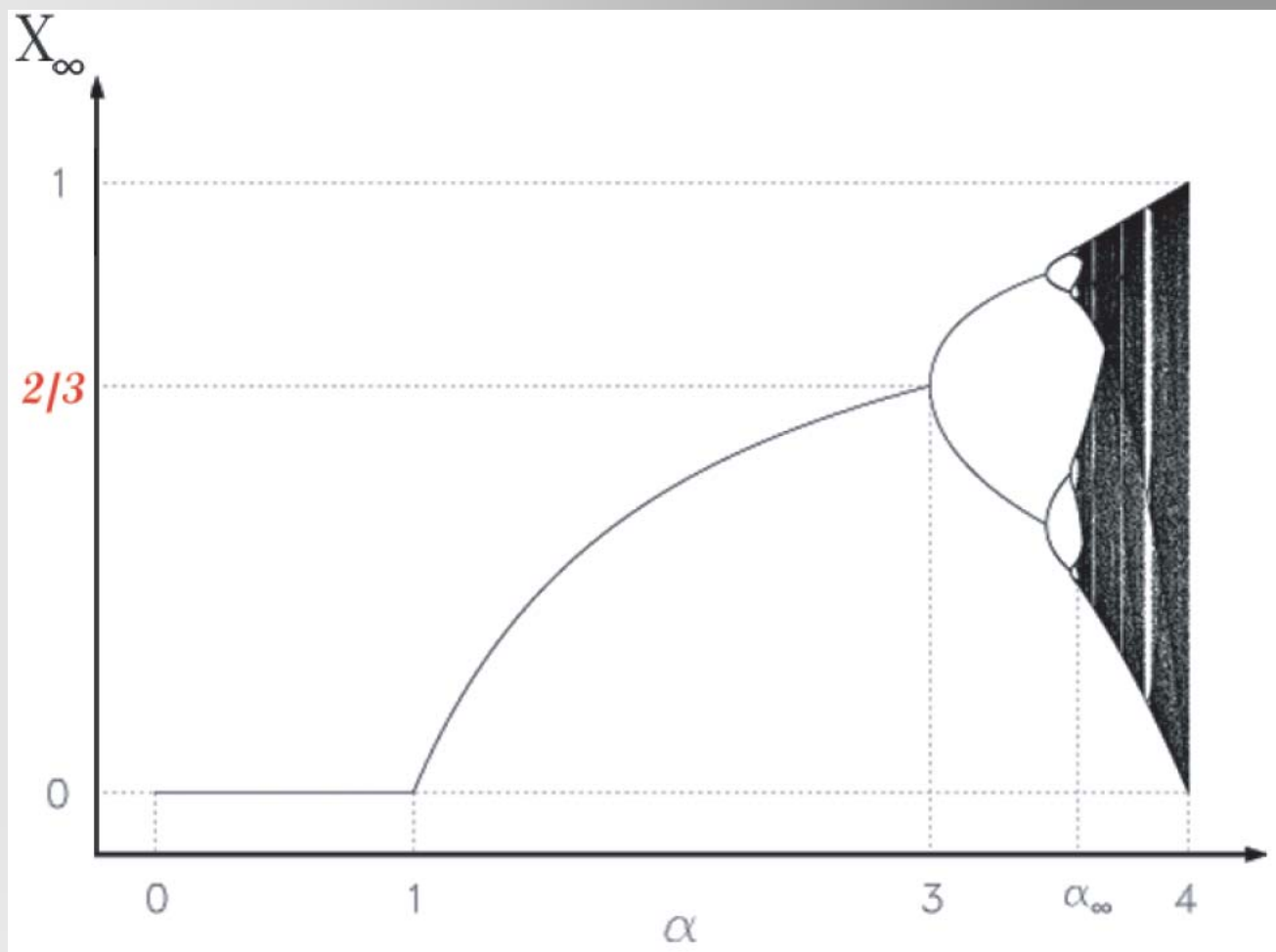
$$X_{(t+1)} = b * X_{(t)} * (1 - X_{(t)})$$



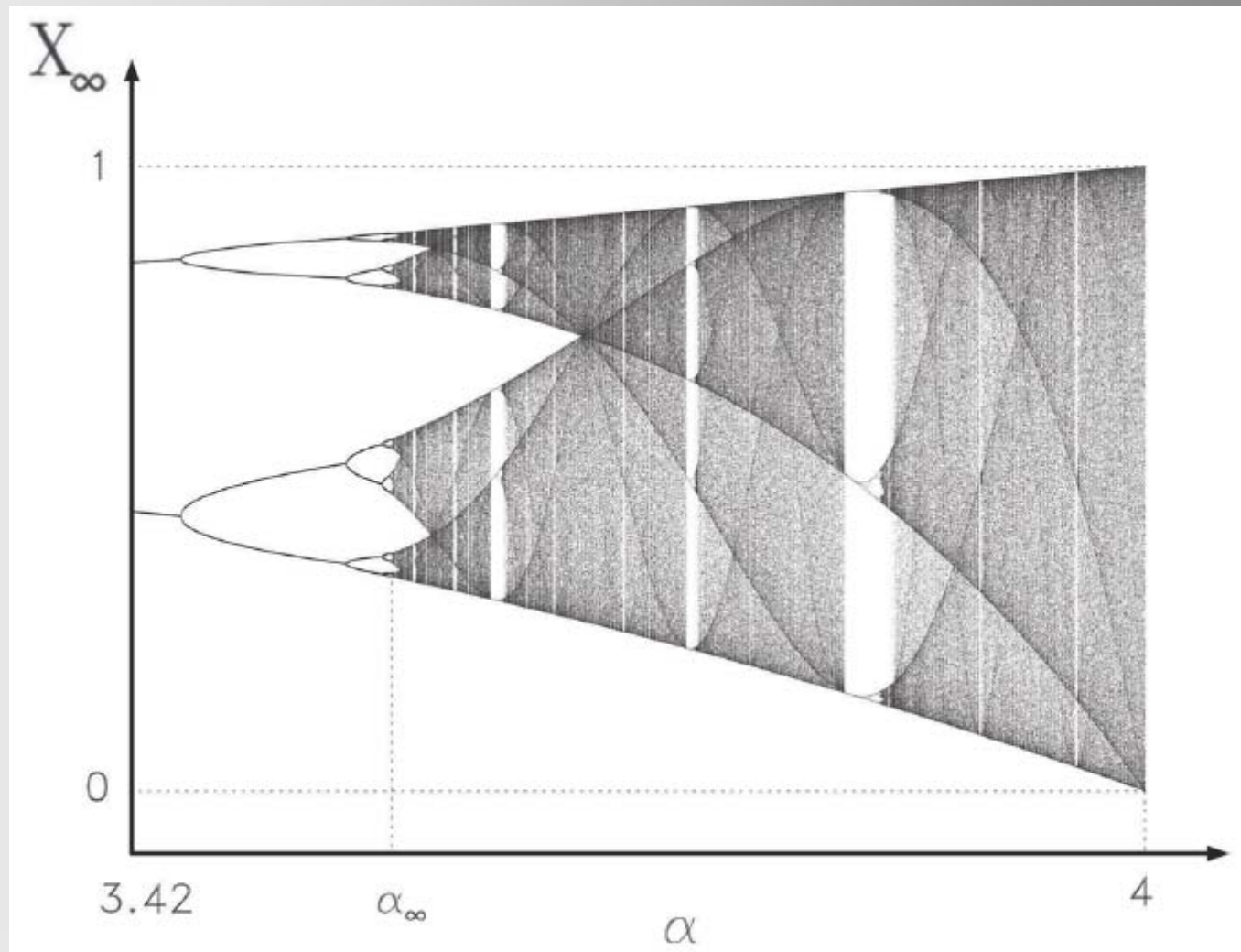
Si  $\alpha > 3$  como en (c,d) ( $\alpha = 3.2, 3.46$ ), se generan *oscilaciones*, cada 2 o 4 generaciones.

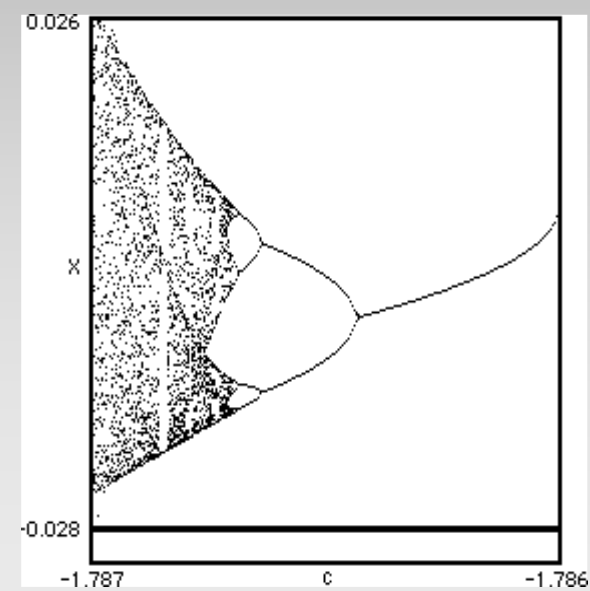
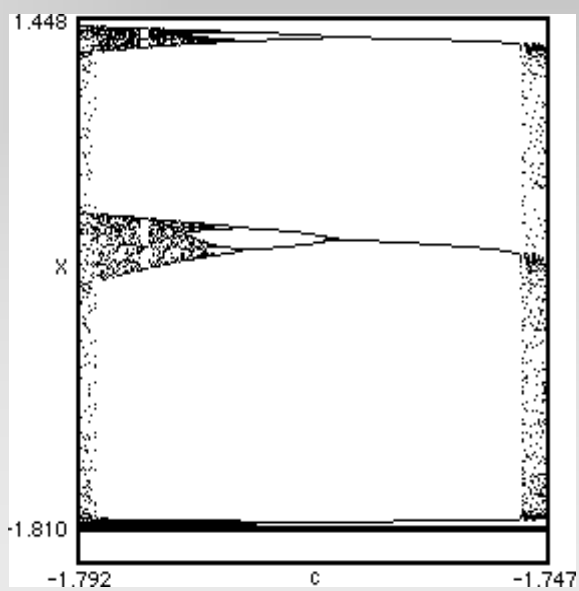
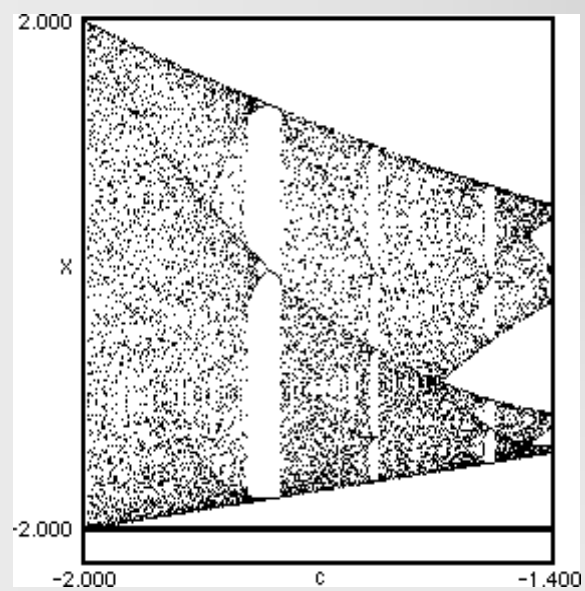
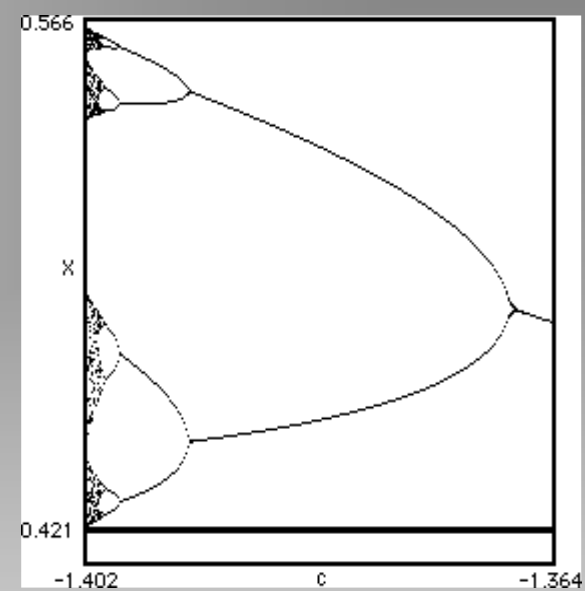
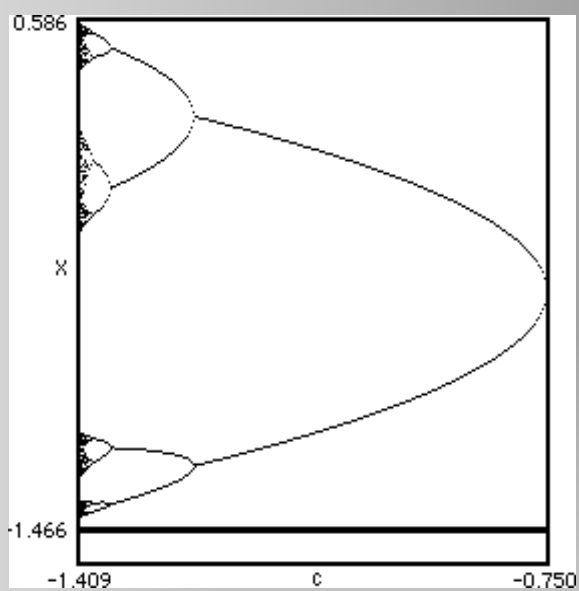
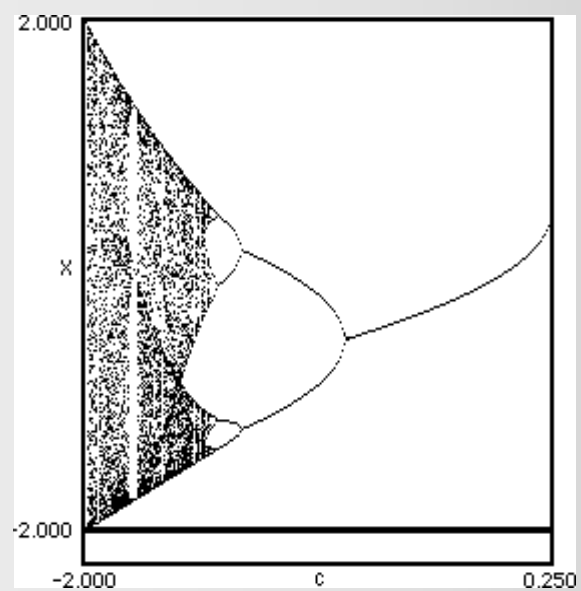
*Bifurcaciones* sucesivas ocurren al aumentar  $\alpha \leq \alpha_{\infty} \approx 3.5699$ : esto es, oscilaciones cada 2 generaciones, cada 4, cada 8, cada 16, y, rápidamente, cada *potencia de 2*.

El conjunto atrayente estable de la dinámica, esto es,  $X_{t=\infty}$  en función de  $b$ , se conoce en la literatura como el diagrama de las bifurcaciones o el árbol de Feigenbaum:



La cola de dicho diagrama es de la siguiente forma:





## Referencias:

1. H. Bai-Lin (Ed.), *Chaos*, World Scientific, Singapore, 1984.
2. M. J. Feigenbaum, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations," *J. Stat. Phy.* 19(1):25, 1978.
3. J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*, Penguin Books, New York, 1987.
4. F. C. Moon, *Chaotic Vibrations*, John Wiley & Sons, New York, 1987.
5. H.-O. Peitgen, H. Jurgens, and D. Saupe, *Chaos and Fractals*, Springer-Verlag, New York, 1992.



# Trabajo

Reproducir el diagrama de Feigenbaum

# ¿Cómo?

- Cree una función en la cual se ingrese  $X_{t=0}$ ,  $b$ ,  $T$ . donde  $T$  indica el tiempo máximo.
- Esta función debe entregar como resultado  $x(t+1)$
- Luego deberá definir otra función que le permita graficar  $x(t)$  vs  $b$ , donde el valor de  $b$  fluctúa entre 0 y 4, para esto comience con graficar lo anterior para un solo valor de  $b$ .

Fin